

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям


О.Ф. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12318/уч.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02 – 2021, типового учебного плана №G31-1-025/пр. тип. от 30.06.2021 г., учебных планов: G31-1-029/уч. от 30.06.2021 г., № G31-1-029/уч-СИБД от 30.06.2021 г., №G31-1-209/уч. от 22.03.2022 г., №G31-1-209/уч-СИБД от 22.03.2022 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Лебедев Андрей Владимирович, заведующий кафедрой функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Бахтин Виктор Иванович, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Иванишко Ия Александровна, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

Ромащенко Галина Станиславовна, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Гороховик Валентин Викентьевич – главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 13 от 22.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор _____



А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» является подготовка специалистов, для решения проблем оптимизации в прикладных задачах.

Задачи учебной дисциплины:

- 1.Познакомить студентов с основными типами экстремальных задач.
- 2.Изучить необходимые и достаточные условия существования решений различных типов экстремальных задач;
- 3.Освоить алгоритмы и методы решения различных экстремальных задач.
- 4.Привить студентам навыки составления математических моделей, которые наилучшим образом соответствуют конкретной прикладной задаче.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится к модулю «Математические методы» компонента учреждения высшего образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» должно обеспечить формирование следующей **специализированной** компетенции:

СК-4. Применять математический аппарат при исследовании задач механики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- теоремы о существовании точек минимума (максимума) для функций на подмножествах метрических пространств;
- необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума функций на абстрактных подмножествах конечномерного векторного пространства;
- основы выпуклого анализа и методы исследования выпуклых задач оптимизации;
- теорию выпуклого и линейного программирования;
- теорию нелинейного программирования;

уметь:

- находить точки минимума и максимума для функций, определенных на конечномерных векторных пространствах;

- с помощью дифференциальных критериев выпуклости проверять является ли заданная функция выпуклой или нет;
 - использовать условия оптимальности и критерий Куна-Таккера для решения задач выпуклого программирования;
 - использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;
 - использовать условия оптимальности первого и второго порядка для решения задач нелинейного программирования;
- владеть:**
- методами решения основных конечномерных задач оптимизации.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в пятом семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» отведено:

– в очной форме получения высшего образования: 120 часов, в том числе 68 аудиторных часа, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 28 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

Тема 1.1. Общая задача оптимизации

Задачи безусловной и условной оптимизации. Достаточные условия существования экстремума — теорема Вейерштрасса. Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах.

Раздел 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах

Тема 2.1. Методы линейного и выпуклого анализа в задачах оптимизации

Выпуклые множества. Теоремы отделимости. Конусы, двойственные конусы.

Тема 2.2. Необходимые геометрические условия экстремума

Направления убывания функций, контингентные векторы к множествам. Необходимые геометрические условия экстремума. Вычисления направлений убывания и контингентных векторов. Теорема Люстерника.

Тема 2.3. Принцип Лагранжа

Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.

Тема 2.4. Достаточное условие экстремума

Достаточные условия второго порядка для задач с ограничениями типа равенств. Достаточные условия второго порядка для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.

Раздел 3. Линейное программирование

Тема 3.1. Задача линейного программирования

Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

Тема 3.2. Линейные задачи и крайние точки выпуклых множеств

Крайние точки выпуклых множеств. Теорема Минковского. Теорема Крейна – Мильмана. Теорема Кли. Линейные задачи и крайние точки выпуклых множеств. Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи.

Тема 3.3. Симплекс-метод

Алгоритм симплекс-метода для невырожденных задач. Нахождение начальной крайней точки. W-задача.

Тема 3.4 Теория двойственности

Принцип Лагранжа в линейной задаче. Теория двойственности.

Раздел 4. Выпуклые задачи оптимизации

Тема 4.1. Выпуклые функции

Выпуклые функции Задача выпуклого программирования.

Тема 4.2. Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования

Критерий экстремума для выпуклых задач. Принцип Лагранжа для выпуклых задач.

Тема 4.3. Теорема Куна –Таккера

Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна –Таккера. Теорема о седловой точке.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение							
1.1	Общая задача оптимизации	2	2					опрос, собеседование
2	Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах							
2.1	Методы линейного и выпуклого анализа в задачах оптимизации	2	2					опрос, собеседование
2.2	Необходимые геометрические условия экстремума	2	2				2	Контрольная работа № 1
2.3	Принцип Лагранжа	4	4					проверка индивидуальных заданий
2.4	Достаточное условие экстремума	4	4				2	Контрольная работа № 2
3	Линейное программирование							
3.1	Задача линейного программирования	2						опрос, собеседование
3.2	Линейные задачи и крайние точки выпуклых множеств	2	2					опрос, собеседование
3.3	Симплекс-метод	4	4					проверка индивидуальных заданий
3.4	Теория двойственности	4	2					опрос, собеседование
4	Выпуклые задачи оптимизации							

4.1	Выпуклые функции	2	2					опрос, собеседование
4.2	Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования	2	2					опрос, собеседование
4.3	Теорема Куна –Таккера	4	2				2	Контрольная работа № 3 по темам 3.3, 4.2
	Всего	34	28				6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

- 1.Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач : учебное пособие для вузов / Иоффе А. Д.,Тихомиров В. М. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 480 с. - <https://e.lanbook.com/book/266777>.
- 2.Палий, И. А. Линейное программирование : учеб. пособие для студ. высших учебных заведений, обучающихся по естественным направлениям / И. А. Палий. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2023. - 175 с.
- 3.Ржевский, С. В. Математическое программирование : учебное пособие / С. В. Ржевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/206993>.
4. Бахтин В.И., Лебедев А.В., Конечномерные экстремальные задачи, М.: URSS, 2023.
4. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач, - Изд. 2-е испр. - Москва : URSS, 2023. - 208 с.
5. Галеев, Э. М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи : учебное пособие / Э. М. Галеев. - Изд. стер. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2018. - 335 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. Учебное пособие. – Москва: Наука, 1981.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В., Оптимальное управление, М.: Наука, 1979.
3. Базара М., Шетти К., Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы, М.: Мир, 1982.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Теория экстремальных задач, М.: Наука, 1974.
5. Сеа Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, М.: Мир, 1973.
6. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В., Курс методов оптимизации, М.: Наука, 1986
7. Эльстер К.-Х. и др. Введение в нелинейное программирование. – Москва: Наука, 1985.
8. Васильев Ф.П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М.: Издательство МГУ, 1974.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Методы оптимизации, Минск: Издательство БГУ, 1975.
10. Гирсанов И.В., Лекции по математической теории экстремальных задач, М.: Издательство МГУ, 1989. РХД 2003.
11. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации, Минск: Издательский центр БГУ, 2007.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, собеседование, контрольная работа, проверка индивидуальных заданий.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации» учебным планом предусмотрен **зачет**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

1. Опрос, собеседование – 40 %;
2. контрольные работы – 60 %;

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) – 30% и отметки на зачете – 70%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.2. Необходимые геометрические условия экстремума. (2 ч)

Студент изучает направления убывания функций, контингентные векторы к множествам. Анализирует необходимые геометрические условия экстремума. Вычисляет направлений убывания и контингентные векторы.

Примерный перечень заданий:

1. Определить, является ли компактным множество $M \subset \mathbb{R}^3$, заданное равенствами:

$$x^2 + y = 3, \quad y^2 + z = 5.$$

2. Исследовать функцию на экстремальные значения:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^3 \rightarrow \text{extr}.$$

3. Исследовать функцию на экстремумы методом множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} x^2 - xy + z^2 \rightarrow \text{extr} \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Форма контроля – контрольная работа №1

Тема 2.4 Достаточное условие экстремума. (2 ч)

Студент исследует достаточные условия второго порядка для задач с ограничениями типа равенств и для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.

Примерный перечень заданий:

Исследовать функцию на экстремумы методом множителей Лагранжа

1.

$$\begin{cases} x - y - z \rightarrow \text{extr} \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 + 2 \rightarrow \text{extr} \\ y \geq x^2 \\ x \geq 0, y \leq 4 \end{cases}$$

Форма контроля – контрольная работа №2

Тема 3.3 Симплекс-метод

Тема 4.2 Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования. (2 ч)

Примерный перечень заданий:

1. Найти минимальное и максимальное значение функции:

$$\begin{cases} x - y \rightarrow \text{extr} \\ 3x \geq y - 4 \\ |x + y| \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

2. Найти оптимальный план в задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Форма контроля – контрольная работа № 3

Примерная тематика практических занятий

Практическое занятие № 1. Экстремумы функций одной переменной

Практическое занятие № 2. Доказательство неравенств

Практическое занятие № 3. Экстремумы функций нескольких переменных

Практическое занятие № 4. Производная по направлению: определение, контр-примеры

Практическое занятие № 5. Производная по направлениям.

Практическое занятие № 6. Конус направлений убывания функции. Контингентные векторы. Геометрические необходимые условия экстремума.

Практическое занятие № 7. Двойственные необходимые условия экстремума.

Практическое занятие № 8. Линейное программирование: составление задач, графический метод решения.

Практическое занятие № 9. Линейное программирование: графический метод решения с параметром, метод исключения переменных

Практическое занятие № 10. Симплекс-метод.

Практическое занятие № 11. Выпуклые функции, выпуклые множества

Практическое занятие № 12. Выпуклые задачи: теорема Куна-Такера

Практическое занятие № 13. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств. Метод множителей Лагранжа.

Практическое занятие № 14. Гладкие задачи с ограничениями типа неравенств.

Практическое занятие № 15. Смешанные гладкие задачи.

Практическое занятие № 16. Доказательство неравенств.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения*, которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Использование указанных методов обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления, и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

- подготовка к практическим занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Классификация задач оптимизации.
2. Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации.
3. Теоремы о существовании оптимальных решений
4. Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, полная производная.
5. Конус направлений убывания функции, и конус контингентных направлений множества; их основные свойства.
6. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.
7. Дважды вполне дифференцируемые функции.
8. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями.
9. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
10. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
11. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств
12. Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.
13. Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация.
14. Выпуклые множества и их основные свойства.
15. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости.
16. Опорные гиперплоскости. Крайние точки множества.
17. Линейное программирование. Примеры задач. Основные определения и свойства. Точки экстремума в задаче линейного программирования.
18. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для замкнутого множества.
19. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для произвольного (не обязательно замкнутого) множества.
20. Выпуклый конус. Теорема об опорной гиперплоскости к выпуклому конусу.
21. Двойственный, бидвойственный конусы. Их свойства.
22. Выпуклые линейные комбинации, выпуклая оболочка.

23. Невырожденные линейные задачи. Начальный опорный план.
24. Графический метод решения задач линейного программирования.
25. Симплекс-метод.
26. Метод искусственного базиса (w-задача).
27. Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности.
28. Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций.
29. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
30. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.
31. Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.
32. Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.
33. Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна – Таккера.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Теория вероятностей	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
2. Уравнения математической физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
