

УДК 519.63

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. ВОЛКОВ¹⁾, Е. И. КАЧАЛОВСКАЯ²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина,
буль. Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Беларусь

Построены и исследованы два варианта итерационных алгоритмов реализации спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотренные алгоритмы основаны на использовании стабилизированной версии итерационного метода бисопряженных градиентов с комбинированным переобусловливателем в виде диагональной матрицы коэффициентов уравнения и дискретного аналога оператора Лапласа, представленного конечно-разностной или спектральной аппроксимацией. Для обработки дискретного аналога оператора Лапласа в первом случае реализован итерационный метод переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров, а во втором случае – алгоритм Бартельса – Стюарта. На основе численных экспериментов показана высокая эффективность предлагаемых алгоритмов. В обоих случаях количество итераций практически не зависит от размерности сетки и умеренно возрастает при увеличении степени неоднородности коэффициентов задачи. Вычислительная сложность алгоритмов характеризуется величиной $O(N\sqrt{N})$, где N – количество узлов сетки. Несмотря на существенную субоптимальность вычислительной сложности, при размерности сетки $N = n \times n$, $n \leq 300$, временные затраты на реализацию алгоритмов демонстрируют значения не хуже, чем у алгоритмов оптимальной вычислительной сложности $O(N)$.

Ключевые слова: спектральные методы Чебышева; метод бисопряженных градиентов; метод переменных направлений; алгоритм Бартельса – Стюарта; эллиптические уравнения.

Образец цитирования:

Волков ВМ, Качаловская ЕИ. Итерационная реализация спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;3:53–62.
EDN: CZNGYI

For citation:

Volkov VM, Kachaloukaya EI. An iterative Chebyshev spectral solver for two-dimensional elliptic equations with variable coefficients. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;3:53–62. Russian.
EDN: CZNGYI

Авторы:

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Екатерина Ивановна Качаловская – старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета.

Authors:

Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
v.volkov@tut.by

Ekaterina I. Kachaloukaya, senior lecturer at the department of applied mathematics and informatics, faculty of physics and mathematics.
katerina.kulgun@gmail.com

AN ITERATIVE CHEBYSHEV SPECTRAL SOLVER FOR TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

V. M. VOLKOV^a, E. I. KACHALOUSKAYA^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bBrest State A. S. Pushkin University, 21 Kasmanawtaw Boulevard, Brest 224016, Belarus

Corresponding author: E. I. Kachalousskaya (katerina.kulgun@gmail.com)

In this paper, we constructed and investigated two variants of iterative algorithms implemented the Chebyshev spectral method solving two-dimensional elliptic equations with variable coefficients. The considered algorithms are based on the use of the stabilised version of the bi-conjugate gradient iterative method with a combined preconditioner in the form of a diagonal matrix of equation coefficients and the discrete analogue of the Laplace operator represented by the finite difference or spectral approximations. To process the discrete analogue of the Laplace operator, we implemented the alternative direction implicit method with an optimal set of iterative parameters and the Bartels – Stewart algorithm in the first and the second cases respectively. Based on numerical experiments, we showed the high efficiency of the proposed algorithms. In both cases, the number of iterations is practically independent of the mesh size and increases moderately with an increasing degree of heterogeneity of the problem coefficients. The computational complexity of the algorithms is estimated as $O(N\sqrt{N})$, where N is the number of grid points. Despite of the significant suboptimality of the computational complexity, in the case of a moderate grid size $N = n \times n$, $n \leq 300$, the computation time demonstrates values no worse than those of algorithms of optimal computational complexity $O(N)$.

Keywords: Chebyshev spectral methods; bi-conjugate gradient method; alternative direction implicit method; Bartels – Stewart algorithm; elliptic equations.

Введение

Разработка эффективных численных алгоритмов решения многомерных эллиптических задач с использованием спектральных методов на основе полиномов Чебышева [1–3] имеет ряд особенностей, не свойственных методам конечных элементов и конечных разностей. В первую очередь это касается разработки алгоритмов оптимальной вычислительной сложности, количество арифметических операций которых возрастает пропорционально количеству узлов сетки [4]. Кроме того, сама формулировка дискретной задачи для спектральных методов имеет свою специфику, связанную с тем, что операторы спектрального дифференцирования выражаются матрицами полной структуры. Отмеченные особенности порождают существенные трудности при использовании спектральных методов для решения многомерных задач.

К настоящему времени задача построения эффективных численных алгоритмов для решения многомерных эллиптических уравнений на основе спектрального метода Чебышева всесторонне изучена на примере двумерного уравнения Пуассона. Среди результатов в этой области можно выделить развитие двух перспективных подходов к реализации спектральных моделей, представленных в виде матричной системы алгебраических уравнений Ляпунова – Сильвестра, таких как использование итерационного метода переменных направлений [5] и использование итерационных методов в пространствах Крылова с переобусловливателем [6]. В качестве переобусловливателя традиционно выступает конечно-разностный (конечно-элементный) аналог оператора Лапласа в виде пятидиагональной разреженной матрицы [3; 7], для обращения которой высокую эффективность показал метод переменных направлений [6].

Второй из отмеченных подходов представляется более эффективным. Это связано с тем, что метод переменных направлений допускает близкую к оптимальной вычислительную сложность лишь при существенных ограничениях на свойства одномерных компонент оператора спектрального дифференцирования. В частности, требование перестановочности произведения компонент дискретного оператора лишает перспективы непосредственного использования данного подхода в общем случае задач с переменными коэффициентами. В то же время, как будет показано ниже, метод переменных направлений остается эффективным для обработки переобусловливателя.

В настоящей статье представлены результаты численного исследования эффективности спектрального метода Чебышева при решении эллиптических задач с переменными коэффициентами. Для реализации спектральной модели использован метод бисопряженных градиентов [8] с комбинированным переобусловливателем в виде композиции диагональной матрицы коэффициентов уравнения, применяемой до начала вычислений к дискретной модели, и матрицы дискретного аналога оператора Лапласа. Обработка второй составляющей переобусловливателя на каждой итерации метода бисопряженных градиентов реализована посредством итерационного метода переменных направлений либо алгоритма Бартельса – Стюарта [9].

На примере модельной задачи показано, что рассмотренные алгоритмы демонстрируют близкие к оптимальным характеристики эффективности, которые объективно подтверждаются слабой зависимостью количества итераций от размерности сетки и пределов изменения коэффициентов задачи.

Постановка дифференциальной задачи и спектральный метод Чебышева

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения в прямоугольной области с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = -q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = (-1; 1) \times (-1; 1), \quad (1)$$

$$u(x = \pm 1, y) = u(x, y = \pm 1) = 0. \quad (2)$$

Без существенного нарушения общности ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты уравнения (1) имеют вид

$$\sigma(x, y) = \exp(-0,5 \ln(\alpha)(x^2 + y^2)), \quad (3)$$

где постоянная $\alpha = \frac{\max_{(x, y) \in \Omega} (\sigma(x, y))}{\min_{(x, y) \in \Omega} (\sigma(x, y))}$ определяет диапазон изменения коэффициента задачи $\alpha^{-1} \leq \sigma(x, y) \leq 1$.

Функция $q(x, y)$ задавалась таким образом, чтобы точное решение задачи (1)–(3) выражалось аналитически:

$$u(x, y) = \sin^2(p_x \pi x) \sin^2(p_y \pi y). \quad (4)$$

Очевидно, что функция (4) удовлетворяет краевым условиям (2) для произвольных целых значений p_x, p_y . Для построения спектральной модели во внутренних узлах сетки

$$\omega_h = \left\{ (x_k, y_m), x_k = y_m = \cos \frac{k\pi}{n-1}, k = \overline{0, n-1}, m = \overline{0, n-1} \right\} \quad (5)$$

аппроксимируем дифференциальные операторы уравнения (1) с помощью соответствующих операторов спектрального дифференцирования [1; 2], в результате чего приходим к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$Au = f, \quad A \in R^{N \times N}, \quad f, u \in R^N, \quad N = (n-2)^2. \quad (6)$$

Структура матрицы системы уравнений (6) аналогична структуре матрицы

$$\tilde{A} = (E \otimes \bar{D}) \bar{S} (E \otimes \bar{D}) + (\bar{D} \otimes E) \bar{S} (\bar{D} \otimes E),$$

где $E \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – единичная матрица; $\bar{D} \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышева [2], в которой удалены первые и последние строки и столбцы; $\bar{S} \in R^{N \times N}$ – диагональная матрица коэффициентов во внутренних узлах сетки (5). Отметим, что $A \neq \tilde{A}$, поскольку \tilde{A} не учитывает корректно краевые условия. Кроме того, структура матрицы \tilde{A} , а следовательно, и матрицы A (например, при наличии в уравнении смешанных производных) не является разреженной. В силу этого непосредственное умножение такой матрицы на вектор имеет вычислительную сложность $O(N^2)$ (а ее обращение – $O(N^3)$), что на порядок и более превосходит оптимальные затраты.

Для итерационных методов неотъемлемой составляющей алгоритма является вычисление произведения матрицы системы уравнений (6) на вектор приближенного решения. В рассмотренном случае данное произведение может быть вычислено следующим образом:

$$Au = \aleph \left\{ D \cdot (S * (D \cdot U)) + (S * (U \cdot D^T)) \cdot D^T \right\}. \quad (7)$$

Здесь $U \in R^{n \times n}$ – двумерный массив (квадратная матрица) значений приближенного решения в узлах сетки (5), включая граничные; $D \in R^{n \times n}$ – матрица спектрального дифференцирования Чебышева; $S \in R^{n \times n}$ – матрица значений коэффициентов в узлах сетки; символ * обозначает поэлементное умножение массивов (матриц), а матричная операция $\aleph\{X\}$ – удаление из двумерного массива $X \in R^{n \times n}$ граничных точек с последующим преобразованием его в вектор-столбец.

В случае достаточной гладкости коэффициентов существует альтернативный способ вычисления произведения переобусловленной матрицы дискретной задачи на вектор приближенного решения, основанный на недивергентном представлении дифференциального оператора:

$$\bar{S}^{-1}Au = \bar{D}_2 \cdot \bar{U} + \bar{U} \cdot \bar{D}_2^T + \bar{S}_x * (\bar{D} \cdot \bar{U}) + \bar{S}_y * (\bar{U} \cdot \bar{D}^T). \quad (7')$$

Здесь $\bar{D}_2, \bar{D}, \bar{U}, \bar{S}_x, \bar{S}_y \in R^{(n-2) \times (n-2)}$; \bar{D}_2 и \bar{D} – матрицы спектрального дифференцирования второго и первого порядков; \bar{S}_x и \bar{S}_y – матрицы частных производных коэффициентов уравнения по x и y соответственно, нормированные на значение самого коэффициента $\sigma = \sigma(x, y)$.

Наиболее трудоемкой операцией в вычислениях по формулам (7) и (7') является умножение полных матриц размера $n \times n$ в формуле (7) и размера $(n-2) \times (n-2)$ в формуле (7'), что требует порядка $O(n^3) = O\left(N^{\frac{3}{2}}\right)$ арифметических операций.

Отметим, что поскольку речь идет об умножении матрицы спектрального дифференцирования Чебышева, имеющей циклическую структуру, то существует способ вычисления данного произведения с использованием алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье [2], позволяющего снизить вычислительные затраты до уровня $O(N \ln(N))$. Однако следует учитывать, что асимптотические оценки вычислительной сложности алгоритма не всегда объективно отражают его реальную эффективность при конечных значениях размерности сетки, обеспечивающих приемлемую точность результатов. Численные эксперименты показывают, что эффективность непосредственного умножения матрицы на вектор согласно формулам (7) и (7') способна конкурировать с алгоритмом на основе быстрого дискретного преобразования Фурье при размерности сетки вплоть до $n = 10^3$ и более, что представляется достаточным для широкого круга приложений. Оценка вычислительных затрат при умножении системной матрицы на вектор приближенного решения по формулам (7) и (7') позволяет отметить незначительное преимущество (в пределах 5 % согласно результатам численных экспериментов) вычислений по формуле (7').

Прежде чем перейти к непосредственному исследованию эффективности итерационных алгоритмов реализации спектральной модели, приведем результаты численных экспериментов, показывающих возможности достижения необходимой точности на примере модельной задачи (1)–(4). На рис. 1 представлены вид решения задачи и графики зависимости относительной погрешности решения от количества узлов сетки при различной степени неоднородности коэффициентов.

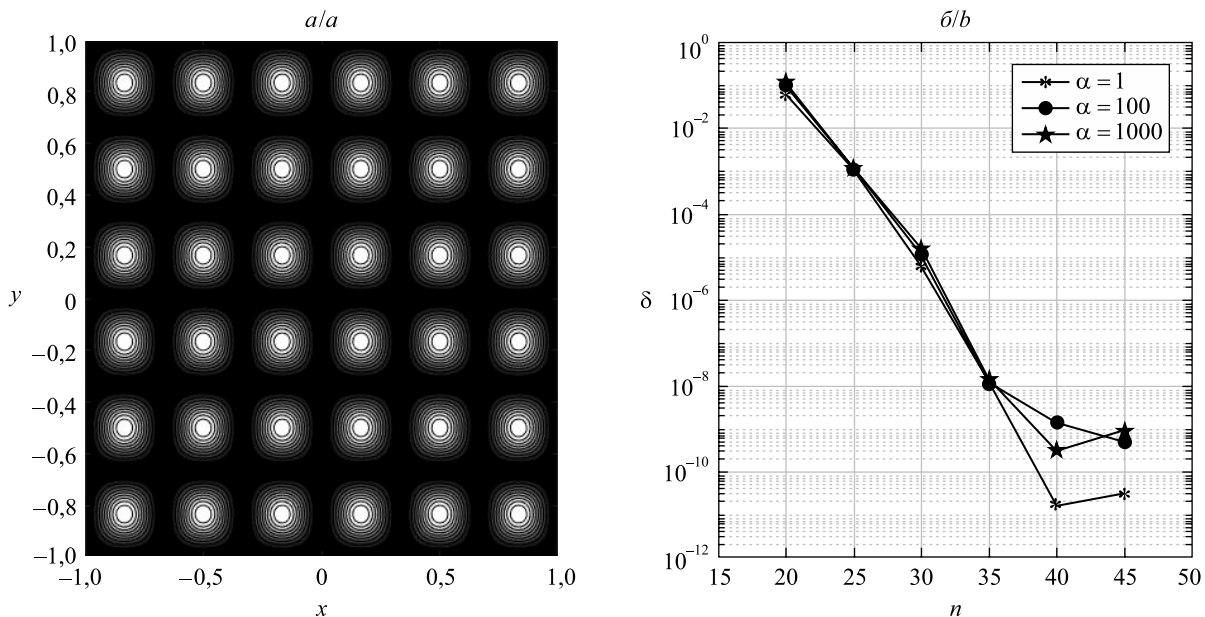


Рис. 1. Решение задачи (1)–(4) при $p_x = p_y = 3$ (а) и зависимость относительной погрешности (δ) спектрального метода от количества узлов (n) сетки при различных диапазонах изменения коэффициента $\sigma(x, y)$ задачи (1)–(4) (б)

Fig. 1. The solution of the problem (1)–(4) with $p_x = p_y = 3$ (a) and dependence of relative error (δ) of the spectral method on the number of grid nodes (n) for different ranges of variation of the coefficient $\sigma(x, y)$ of the problem (1)–(4) (b)

Решение задачи получено с помощью спектрального метода Чебышева, реализуемого с использованием итерационного метода бисопряженных градиентов. Итерации прекращались при достижении значения относительной нормы невязки $\varepsilon \leq 10^{-10}$. Как видно из рис. 1, скорость сходимости погрешности метода носит экспоненциальный характер. Предельная точность решения, ограниченная величиной ε , достигается на сетке с количеством узлов $n \geq 40$, т. е. наличие 6–7 точек на один период решения (4) оказывается достаточным для достижения предельной точности, при этом уменьшение относительной погрешности с $\delta \cong 10^{-1}$ до $\delta \cong 10^{-10}$ происходит при увеличении количества узлов сетки всего лишь в 2 раза (с $n = 20$ до $n = 40$). Последнее обстоятельство указывает на ограниченность возможностей использования многосеточных итерационных техник с той же эффективностью, что и при реализации дискретных моделей на основе методов конечных элементов и конечных разностей, имеющих полиномиальную скорость сходимости.

Итерационный метод реализации спектральной модели

Для решения системы алгебраических уравнений (6), характерной для спектрального метода решения задачи (1), (2), как уже отмечалось выше, использована стабилизированная версия метода бисопряженных градиентов [7] с комбинированным переобусловливателем в виде диагональной матрицы коэффициентов \bar{S} , применяемой непосредственно к системе (6) до начала основной итерационной процедуры:

$$\bar{S}^{-1}Au = \bar{S}^{-1}f$$

– и дискретного аналога оператора Лапласа

$$\Lambda = (E \otimes P) + (P \otimes E).$$

В качестве матрицы $P = P^T \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ может быть использована симметричная трехдиагональная матрица второй разностной производной ($P = P_{FD}$) в классе сеточных функций, удовлетворяющих нулевым краевым условиям на сетке (5), а также матрица спектрального дифференцирования Чебышева второго порядка ($P = P_{SP}$), в которой удалены первые и последние строки и столбцы согласно однородным краевым условиям (2).

За основу был взят итерационный алгоритм, реализованный в функции `bicgstab` математического пакета *Matlab*, в которой потребовалось модифицировать процедуру умножения системной матрицы на вектор приближенного решения по формуле (7') и процедуру обработки переобусловливателя. В частности, для обработки переобусловливателя (решения системы алгебраических уравнений с матрицей конечно-разностного оператора Лапласа на сетке (5)) удобно представить соответствующую систему в виде матричной системы Ляпунова

$$\Lambda u = f \Leftrightarrow PU + UP^T = F, \quad (8)$$

где $U, F \in R^{(n-2) \times (n-2)}$ – двумерные массивы значений приближенного решения и правой части системы, полученные путем преобразования размерности $R^N \rightarrow R^{(n-2) \times (n-2)}$. Для решения системы (8) в случае, когда $P = P_{FD}$, использован итерационный метод переменных направлений с оптимальным набором итерационных параметров [8], а в случае, когда $P = P_{SP}$, – прямой алгоритм Бартельса – Стюарта [9].

Принимая во внимание, что $P = P^T$, итерационный метод переменных направлений для системы (8) может быть представлен в виде [8]

$$\begin{aligned} (\omega_{m+1}^{(1)}I - P)U_{m+\frac{1}{2}} &= U_m(\omega_{m+1}^{(1)}I + P^T) + F, \\ U_{m+1}(\omega_{m+1}^{(2)}I - P^T) &= (\omega_{m+1}^{(2)}I + P)U_{m+\frac{1}{2}} + F, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, M, U_0 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В рассмотренном случае оптимальный набор итерационных параметров вычисляется по формулам [8]

$$\omega_m^{(1)} = \omega_m^{(2)} = \Delta\chi_m, \chi_m = \operatorname{dn}\left(\frac{2m-1}{2M}K(\eta'), \eta'\right), \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \eta' = \sqrt{1-\eta^2}, \quad (10)$$

где $\operatorname{dn}(u, \eta)$ – эллиптическая функция Якоби аргумента u и модуля η ; $K(\eta)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; δ и Δ – наименьшее и наибольшее по модулю собственные значения оператора P соответственно. Количество итераций метода переменных направлений (9), (10) для достижения заданной точности ε оценивается выражением [8]

$$M \geq M_0 = \pi^{-2} \ln(4\eta^{-1}) \ln(4\varepsilon^{-1}). \quad (11)$$

Согласно формуле (11) количество итераций для достижения точности $\varepsilon = 10^{-10}$ при количестве узлов сетки $50 \leq n \leq 300$ изменяется в диапазоне $31 \leq M_0 \leq 49$. Тем не менее, как показано в работе [10] на примере численного решения обобщенных матричных систем уравнений Ляпунова, количество внутренних итераций метода переменных направлений может быть многократно уменьшено без ущерба для сходимости внешнего итерационного процесса.

На рис. 2 представлены результаты численного эксперимента, показывающие зависимость количества внешних итераций и удельных вычислительных затрат метода бисопряженных градиентов от количества внутренних итераций метода переменных направлений с переобусловливателем $P = P_{FD}$ при $\alpha = 10$. Как видно из рис. 2, минимизация удельных вычислительных затрат по времени наблюдается в широком диапазоне значений n ($100 \leq n \leq 300$) при количестве внутренних итераций $M = 5$, что многократно ниже оценки (11). Фиксированное количество внутренних итераций метода переменных направлений обеспечивает его оптимальную вычислительную сложность порядка $O(N)$.

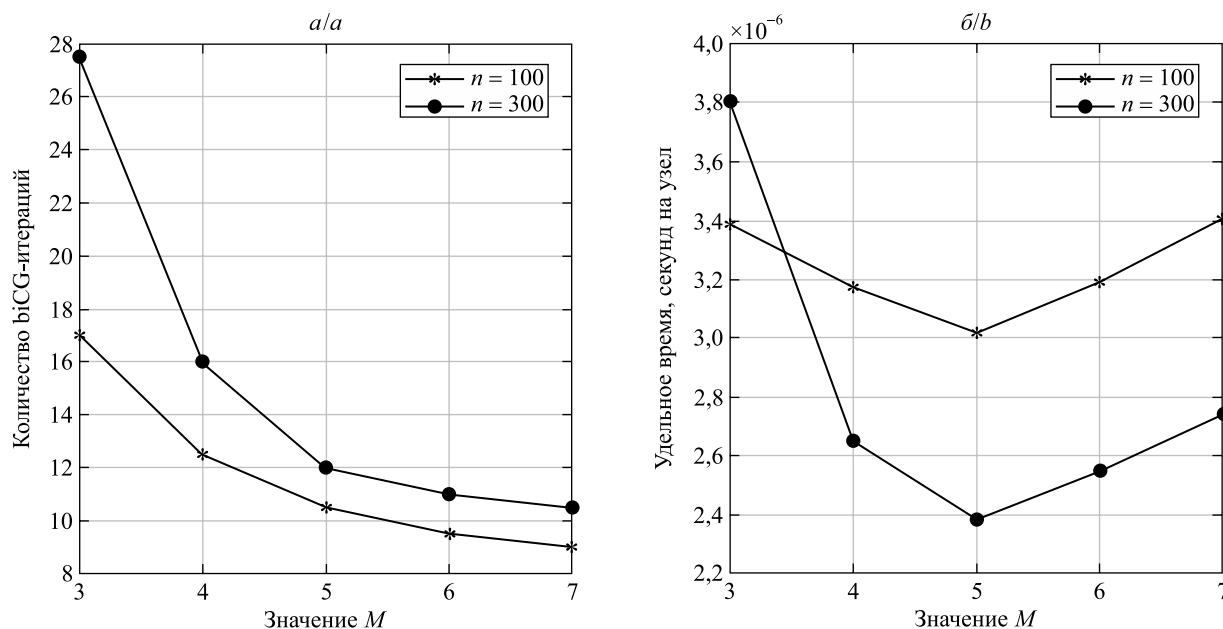


Рис. 2. Зависимость количества внешних итераций метода бисопряженных градиентов (biCG-итераций) (а) и удельных вычислительных затрат алгоритма (б) от количества внутренних итераций (M) метода переменных направлений

Fig. 2. Dependence of the number of external iterations of the bi-conjugate gradient (biCG) method (a) and the specific computation time of the algorithm (b) on the number of internal iterations (M) of the alternative direction implicit (ADI) method

Далее переходим к исследованию эффективности итерационного алгоритма. На рис. 3 представлены результаты, характеризующие зависимость количества biCG-итераций и удельных вычислительных затрат алгоритма от размерности сетки и степени неоднородности коэффициентов при численном решении задачи (1)–(4). Использовано пять внутренних итераций метода переменных направлений с переобусловливателем $P = P_{FD}$, что согласно представленным выше результатам соответствует условию минимизации суммарных вычислительных затрат.

Как видно из рис. 3, а, количество итераций очень медленно растет с увеличением размерности сетки. Такое поведение указывает на близость эффективности использованного переобусловливателя к спектрально оптимальным характеристикам [4]. Кроме того, скорость сходимости итераций слабо реагирует на повышение степени неоднородности коэффициентов задачи.

Зависимость удельных вычислительных затрат от размерности сетки требует более подробных комментариев. Прежде всего отметим, что если удельные вычислительные затраты не зависят от n , то это свидетельствует об оптимальной вычислительной сложности алгоритма (общие вычислительные затраты растут пропорционально числу неизвестных задачи ($N = n^2$)). Асимптотические оценки количества арифметических операций использованного алгоритма, как отмечалось выше, характеризуются величиной

$O(n^3) = O\left(N^{\frac{3}{2}}\right)$, что связано с необходимостью умножения на каждой итерации системной матрицы на

вектор приближенного решения по формулам (7) и (7'). Согласно этим оценкам при отсутствии существенного роста количества итераций с увеличением n удельные вычислительные затраты при достаточно больших значениях n должны приобретать линейную зависимость от n , т. е. субоптимальность вычислительной сложности алгоритма характеризуется величиной $O(N\sqrt{N})$. Однако при $n = 300$, по данным профайлинга (рис. 4, строки № 220 и 304), более 70 % общих вычислительных затрат итерационного метода приходится на обработку переобусловливателя и лишь около 22 % – на наиболее затратную по вычислительной сложности операцию, а именно умножение системной матрицы дискретной модели на вектор приближенного решения (см. рис. 4, строки № 237 и 321).

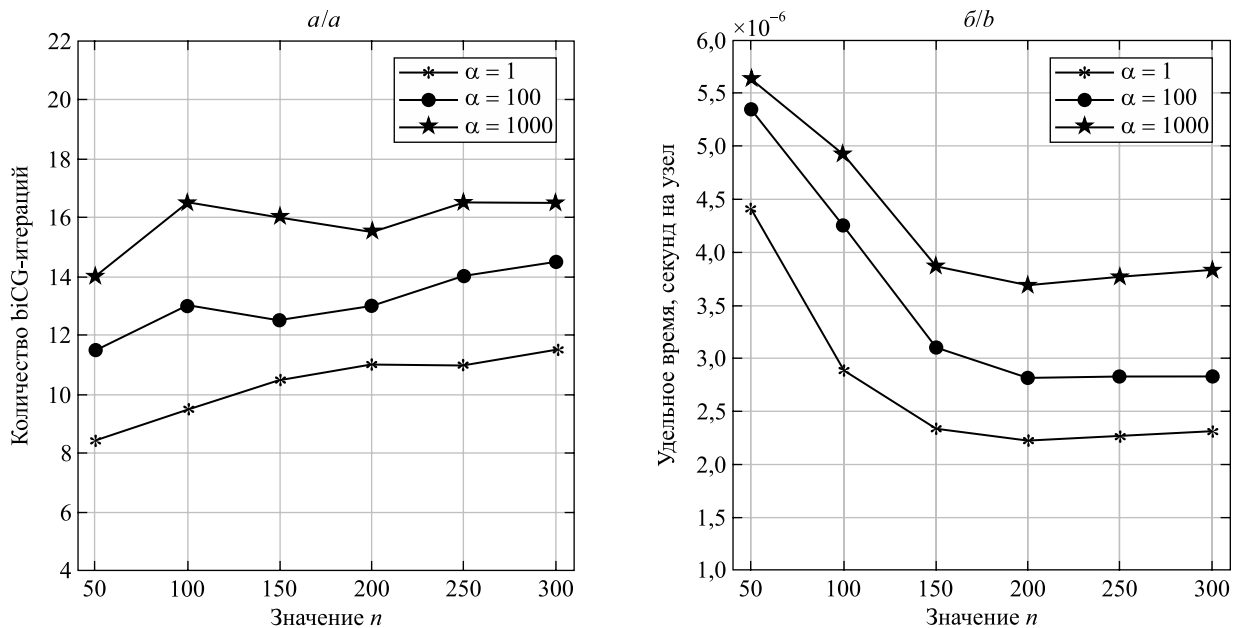


Рис. 3. Зависимость количества biCG-итераций (а) и удельных вычислительных затрат алгоритма (б) от размерности сетки (n) при различных диапазонах изменения коэффициента $\sigma(x, y)$
Fig. 3. Dependence of the number of external iterations of the biCG method (a) and the specific computation time of the algorithm (b) on the grid size (n) for different ranges of variation of the coefficient $\sigma(x, y)$

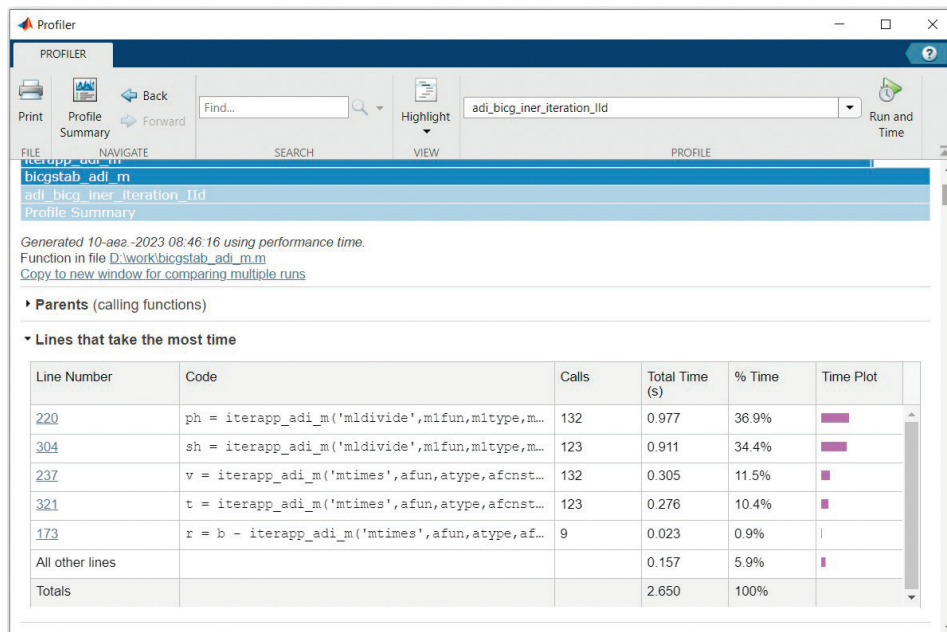


Рис. 4. Данные профайлинга для наиболее затратных строк модифицированной функции `bicgstab`
Fig. 4. Profiling data for the most expensive lines of the modified `bicgstab` function

Таким образом, в рассмотренном диапазоне значений n ($50 \leq n \leq 300$) в алгоритме существенно преобладает доля вычислений с оптимальной вычислительной сложностью, что объясняет отсутствие заметного роста удельных затрат в пределах $150 \leq n \leq 300$. Отрицательный тренд в зависимости удельных вычислительных затрат при размерности сетки $50 \leq n \leq 150$, по-видимому, можно объяснить более эффективным выполнением матричных операций векторизованного алгоритма при увеличении размерности данных, что подтверждается соответствующим повышением степени загрузки процессора с возрастанием n .

Отметим, что использование переобусловливателя $P = P_{SP}$ вместо переобусловливателя $P = P_{FD}$ позволяет снизить количество biCG-итераций, однако суммарные вычислительные затраты при этом возрастают из-за увеличения вычислительной сложности алгоритма метода переменных направлений с $O(N)$ до $O(N\sqrt{N})$. В связи с этим отметим еще одну возможность итерационной реализации спектрального метода Чебышева для рассмотренной задачи (1), (2), а именно использование для обработки переобусловливателя $P = P_{SP}$ прямого алгоритма Бартельса – Стюарта [9], имеющего такую же вычислительную сложность $O(N\sqrt{N})$ и реализованного в функции `lvar` математического пакета *Matlab*.

На рис. 5 представлены результаты, характеризующие эффективность данной модификации алгоритма.

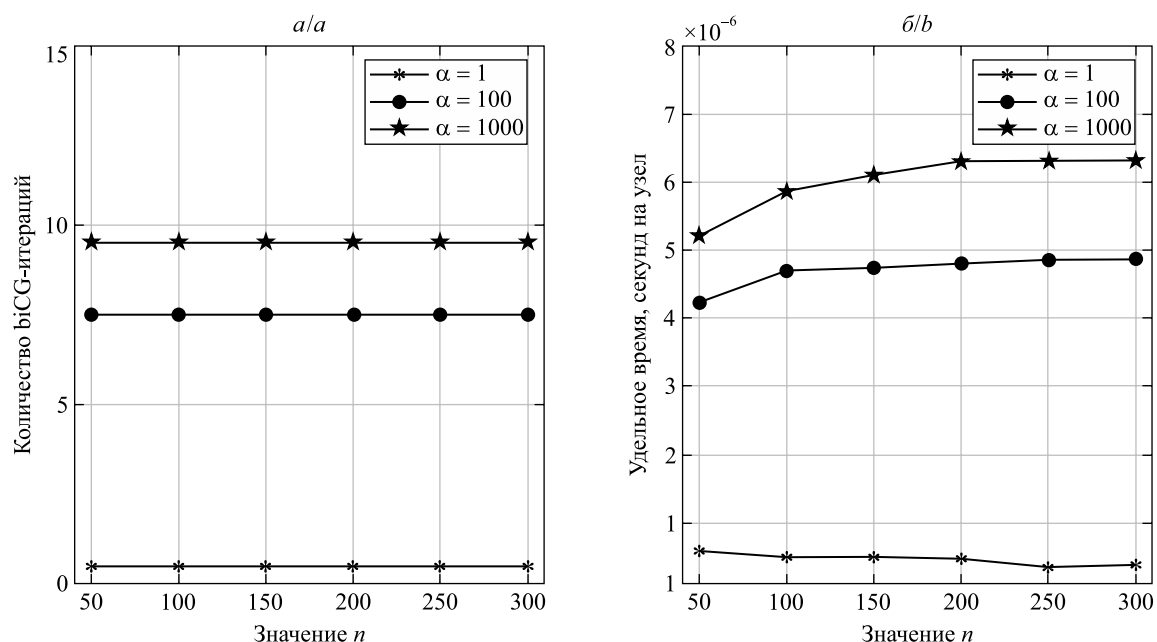


Рис. 5. Зависимость количества biCG-итераций (a) и удельных вычислительных затрат алгоритма (б) от размерности сетки (n) при различных диапазонах изменения коэффициента $\sigma(x, y)$ в случае использования переобусловливателя $P = P_{SP}$ вместо переобусловливателя $P = P_{FD}$ и алгоритма Бартельса – Стюарта вместо метода переменных направлений

Fig. 5. Dependence of the number of external iterations of the biCG method (a) and the specific computation time of the algorithm (b) on the grid size (n) for different ranges of variation of the coefficient $\sigma(x, y)$ in the case of using $P = P_{SP}$ preconditioner instead of $P = P_{FD}$ preconditioner and the Bartels – Stewart algorithm instead of the ADI method

Сравнение результатов, представленных на рис. 3 и 5, позволяет заметить, что использование алгоритма Бартельса – Стюарта вместо метода переменных направлений (исключая случай однородных коэффициентов $\alpha = 1$) в целом увеличивает временные затраты, однако в пределах $50 \leq n \leq 300$ его характеристики близки к таковым алгоритмов оптимальной вычислительной сложности, несмотря на то что асимптотические оценки в обоих случаях показывают субоптимальную вычислительную сложность $O(N\sqrt{N})$.

Заключение

Проанализированы два варианта итерационной реализации спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических задач с неоднородными коэффициентами. Рассмотренные алгоритмы основаны на использовании стабилизированного метода бисопряженных градиентов с комбинированным пере-

обусловливателем в виде диагональной матрицы коэффициентов уравнения и дискретного аналога оператора Лапласа спектрального или конечно-разностного типа. Для обработки второго переобусловливателя уравнение приводится к виду уравнения Ляпунова – Сильвестра с последующим использованием метода переменных направлений, который показал лучшую эффективность для конечно-разностного переобусловливателя, или алгоритма Бартеляса – Стюарта, более предпочтительного для спектрального переобусловливателя. В обоих случаях вычислительная сложность алгоритма в целом имеет асимптотическую оценку $O(N\sqrt{N})$. Эффективность алгоритмов представлена в терминах удельной вычислительной сложности, которая определяется отношением времени счета к количеству узлов сетки N . Данная характеристика позволяет наглядно сопоставить эффективность исследуемого алгоритма с эффективностью алгоритмов оптимальной вычислительной сложности, для которых удельные вычислительные затраты инвариантны относительно количества узлов сетки. Несмотря на отмеченную выше субоптимальность вычислительной сложности представленных алгоритмов, их фактические показатели эффективности во многом сопоставимы с таковыми алгоритмов оптимальной вычислительной сложности в диапазоне размера сетки $2500 \leq N \leq 90\,000$. Кроме того, предлагаемые алгоритмы по удельным временным затратам не уступают разностным аналогам [11], многократно превосходя их в точности при достаточной гладкости входных данных задачи. Чтобы обеспечить возможность сравнения полученных результатов с результатами исследований других авторов, отметим, что все расчеты выполнены с использованием программного обеспечения *Matlab R2020a* на платформе мобильной вычислительной системы с операционной системой Windows 10 Pro, процессором Intel® Core™ i5-10210U (частота 1,60–2,11 ГГц), оперативной памятью DDR3 объемом 8 Гб, SSD-накопителем объемом 250 Гб. Время, необходимое на умножение матриц размера 5000×5000 в использованной системе, составляет приблизительно 1,6 с.

Библиографические ссылки

1. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edition. New York: Dover Publications; 2000. XVI, 594 p.
2. Trefethen LN. *Spectral methods in MATLAB*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2000. XVII, 165 p. (Dongarra JJ, Demmel JW, Gannon D, Grosse E, Moré JJ, editors. Software, environments, and tools).
3. Orszag SA. Spectral methods for problems in complex geometries. In: Parter SV, editor. *Numerical methods for partial differential equations. Proceedings of an advanced seminar; 1978 October 23–25; Madison, USA*. New York: Academic Press; 1979. p. 273–305 (Publication of the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin – Madison; No. 42). DOI: 10.1016/B978-0-12-546050-7.50014-9.
4. D'yakonov EG. *Optimization in solving elliptic problems*. McCormick S, editor. Boca Raton: CRC Press; 2018. XXVIII, 561 p. (CRC revivals).
5. Fortunato D, Townsend A. Fast Poisson solvers for spectral methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2020;40(3):1994–2018. DOI: 10.1093/imanum/drz034.
6. Jbilou K. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra and its Applications*. 2010; 432(10):2473–2485. DOI: 10.1016/j.laa.2009.12.025.
7. van der Vorst HA. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992;13(2):631–644. DOI: 10.1137/0913035.
8. Самарский АА, Николаев ЕС. *Методы решения сеточных уравнений*. Москва: Наука; 1978. 592 с.
9. Bartels RH, Stewart GW. Algorithm 432 [C2]: solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]. *Communications of the ACM*. 1972;15(9):820–826. DOI: 10.1145/361573.361582.
10. Damm T. Direct methods and ADI-preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2008;15(9):853–871. DOI: 10.1002/nla.603.
11. Волков ВМ, Прокопина ЕВ. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:69–76. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-69-76.

References

1. Boyd JP. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. 2nd edition. New York: Dover Publications; 2000. XVI, 594 p.
2. Trefethen LN. *Spectral methods in MATLAB*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2000. XVII, 165 p. (Dongarra JJ, Demmel JW, Gannon D, Grosse E, Moré JJ, editors. Software, environments, and tools).
3. Orszag SA. Spectral methods for problems in complex geometries. In: Parter SV, editor. *Numerical methods for partial differential equations. Proceedings of an advanced seminar; 1978 October 23–25; Madison, USA*. New York: Academic Press; 1979. p. 273–305 (Publication of the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin – Madison; No. 42). DOI: 10.1016/B978-0-12-546050-7.50014-9.
4. D'yakonov EG. *Optimization in solving elliptic problems*. McCormick S, editor. Boca Raton: CRC Press; 2018. XXVIII, 561 p. (CRC revivals).
5. Fortunato D, Townsend A. Fast Poisson solvers for spectral methods. *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2020;40(3):1994–2018. DOI: 10.1093/imanum/drz034.

6. Jbilou K. ADI preconditioned Krylov methods for large Lyapunov matrix equations. *Linear Algebra and its Applications*. 2010; 432(10):2473–2485. DOI: 10.1016/j.laa.2009.12.025.
7. van der Vorst HA. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992;13(2):631–644. DOI: 10.1137/0913035.
8. Samarskii AA, Nikolaev ES. *Metody resheniya setochnykh uravnenii* [Methods for solving grid equations]. Moscow: Nauka; 1978. 592 p. Russian.
9. Bartels RH, Stewart GW. Algorithm 432 [C2]: solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]. *Communications of the ACM*. 1972;15(9):820–826. DOI: 10.1145/361573.361582.
10. Damm T. Direct methods and ADI-preconditioned Krylov subspace methods for generalized Lyapunov equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2008;15(9):853–871. DOI: 10.1002/nla.603.
11. Volkov VM, Prakonina AU. Iterative realization of finite difference schemes in the fictitious domain method for elliptic problems with mixed derivatives. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2019;1:69–76. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-1-69-76.

Получена 29.08.2023 / исправлена 30.10.2023 / принята 02.11.2023.
Received 29.08.2023 / revised 30.10.2023 / accepted 02.11.2023.