БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

КУЗЬМИНА
Елена Викторовна

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – Дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2023

Научная работа выполнена в **УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»**.

Научный руководитель – **Антоневич Анатолий Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Леваков Анатолий Афанасьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета;

Борухов Валентин Терентьевич,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа ГНУ «Институт математики НАН Беларуси».

Оппонирующая организация – **Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет».**

Защита состоится «27» декабря 2023 г. в 10:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря (017) 209-57-09.
Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «23» ноября 2023 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук доцент Т.С. Мардвилко

ВВЕДЕНИЕ

При построении математических моделей различных процессов, происходящих в физических системах, обычно считается, что состояние системы описывается некоторой функцией и строится уравнение (обычно дифференциальное), решение которого задает искомое состояние. При этом коэффициентами уравнения являются функции, описывающие состояния среды, в которой происходит рассматриваемый процесс. В ряде приложений среда имеет более сложную структуру, ее состояния задаются обобщенными функциями (распределениями Шварца) и возникают уравнения с обобщенными коэффициентами. Однако обобщенная функция не может быть подставлена в рассматриваемое уравнение, так как произведения обобщенных функций, входящие в такие уравнения, не определены. Поэтому для уравнений с обобщенными коэффициентами не определено понятие обобщенного решения. Такие уравнения не являются корректными математическими моделями рассматриваемых процессов и требуется построение более точных моделей. В связи с этим основной вопрос заключается в том, чтобы выяснить, какая дополнительная информация позволяет однозначно определить обобщенное решение, т.е. найти состояние системы. Аналогично, обобщенная функция не может быть подставлена в нелинейное уравнение, для таких уравнений также не определено понятие обобщенного решения.

Таким образом, общая проблема заключается во введении понятия обобщенного решения и связана с приданием смысла произведению обобщенных функций. Одной из первых работ, в которых был придан строгий математический смысл понятию решения для уравнений с дельта-образными коэффициентами, была статья Ф.А. Березина и Л.Д. Фаддеева[1]. Работы многих авторов, посвященные различным вариантам решения этой проблемы, составили новое направление, которое только в XXI веке было включено в математическую классификацию под названием «Generalized functions for nonlinear analysis». Среди работ, посвященных исследованию уравнений с обобщенными коэффициентами, можно выделить фундаментальную монографию[2], в которой описана история вопроса и приведена обширная библиография.

Распространенные подходы к введению понятия обобщенного решения основываются на задании аппроксимаций обобщенных коэффициентов семействами обычных функций. В большинстве предшествующих исследований рассматривались уравнения, в которых коэффициент является δ-функцией или производной от функции ограниченной вариации. Оказалось, что обоб-

[1]Березин, Ф.А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф.А. Березин, Л.Д. Фаддеев // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.

[2]Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 568 с.

щенные решения существуют и являются регулярными обобщенными функциями, то есть задаются с помощью обычных локально интегрируемых функций. К этому направлению относятся работы[3,4,5,6,7,8,9] и многие другие.

Единственный, насколько известно, результат, относящийся к уравнениям, в которых коэффициент имеет более сложную структуру, получен в[10], где на конкретных примерах было показано, что утверждение основной теоремы классической теории дифференциальных уравнений о существовании решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в общем случае не выполняется, а в случае существования такие решения оказались сингулярными обобщенными функциями.

Появление решений, имеющих неинтегрируемые особенности, типично в аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений и в теории линейных уравнений, коэффициенты которых имеют особенности. В диссертации рассмотрены два конкретных вида таких уравнений: линейные уравнения первого порядка с сингулярными коэффициентами и нелинейные уравнения из иерархии Риккати. Целью диссертационной работы является получение условий существования обобщенных решений и построение таких решений в явном виде для рассматриваемых уравнений.

Таким образом, рассматриваемые в диссертации задачи естественно вытекают из логики развития теории сингулярных решений дифференциальных уравнений и являются актуальными. Использованный подход может быть применен для решения аналогичных задач, возникающих в приложениях при моделировании процессов, происходящих в средах со сложной структурой.

---

[3]Завалищин, С.Т. Импульсные процессы. Модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 256 с.

[4]Лазакович, Н.В. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский, А.К. Хмызов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 5–9.

[5]Антоневич, А.Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А.Б. Антоневич, Т.А. Романчук. – Саарбрюккен : LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 148 с.

[6]Костенко, А.С. Об одномерном операторе Шредингера с δ-взаимодействиями / А.С. Костенко, М.М. Маламуд // Функц. анализ и его прил. – 2010. – Т. 44, вып. 2. – С. 87–91.

[7]Костенко, А.С. Матричный оператор Шредингера с δ-взаимодействиями / А.С. Костенко, М.М. Маламуд, Д.Д. Натягайло // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100, вып. 1. – С. 59–77.

[8]Савчук, А.М. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 11. – С. 129–166.

[9]Шафаревич, А.И. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1 / А.И. Шафаревич, О.А. Щегорцова // Труды МИАН. – 2020. – Т. 310. – С. 322–331.

[10]Антоневич, А.Б. Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики. – 2019. – Вып. 3. – С. 23–36.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования по теме диссертации проводились в соответствии с заданиями научных программ в рамках научно-исследовательской работы «Актуальные проблемы математики и ее приложений» (№ 29112032018030 в реестре НИОК(Т)Р УО «Брестский государственный технический университет»).

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Целью диссертационной работы является получение условий существования обобщенных решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений и построение таких решений.

Для достижения поставленной цели решались следующие *задачи*:

1. Найти условия существования обобщенного решения задачи Коши линейных дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие функции, имеющей особенность в одной точке, при аналитической аппроксимации коэффициента.

2. Найти условия существования обобщенного решения задачи Коши линейных дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие заданной мероморфной функции, при аналитической аппроксимации коэффициента.

3. Ввести понятие обобщенного решения нелинейного дифференциального уравнения иерархии Риккати и построить обобщенные решения первого и второго уравнений иерархии.

Объектом исследования являются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с коэффициентами, имеющими особенности, и нелинейные уравнения иерархии Риккати. *Предметом исследования* является построение аппроксимирующих решений и анализ их сходимости при аналитической аппроксимации коэффициента.

Выбор объекта исследования обусловлен как его богатым математическим содержанием, так и возможными приложениями.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. При аналитической аппроксимации коэффициента найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие функции, имеющей особенность в одной точке, и построены обобщенные решения таких уравнений.

2. Определены условия разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие мероморфным функциям.

3. Введено понятие обобщенного решения для дифференциальных уравнений иерархии Риккати, получены условия их существования и такие решения построены для первого и второго уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Критерий существования и построение обобщенных решений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенными коэффициентами, имеющими особенность в одной точке, при аналитической аппроксимации коэффициента.

2. Критерий разрешимости в пространстве распределений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие мероморфным функциям, при аналитической аппроксимации коэффициента.

3. Построение обобщенных решений первого и второго дифференциальных уравнений иерархии Риккати.

Личный вклад соискателя ученой степени

В диссертационную работу не включены результаты, которые были получены другими соавторами или с другими соавторами. Материалы совместных публикаций использованы соискателем в объеме авторского вклада.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на ряде международных и республиканских конференций: IX и XIII Международной научно-практической интернет-конференции «Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам» (Мозырь, 21–24 марта 2017 г., 25–26 марта 2021 г.); XX и XXIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 20–22 марта 2017 г., 23–25 марта 2020 г.); Республиканской научно-практической конференции «Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты» (Брест, 27–28 апреля 2017 г., 23–24 апреля 2021 г.); X и XII Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов «Современные проблемы математики и вычислительной техники» (Брест, 23–24 ноября 2017 г., 18–19 ноября 2021 г.); Республиканской научно-практической конференции «Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике» (Брест, 23–24 апреля 2020 г.); XXIII Республиканской научно-практической конференции молодых ученых (Брест, 14 мая 2021 г.); Международной математической конференции «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова (Минск, 1–4 июня 2021 г.); Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 22–25 ноября 2021 г.); XX и XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2022, Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г., Еругинские чтения – 2023, Могилев, 23–27 мая 2023 г.).

Результаты докладывались на научных семинарах кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина (Брест, 2019–2022 гг.), научном семинаре БГУ (Минск, 2022 г.).

Отдельные результаты научных исследований внедрены в учебный процесс БрГТУ (акты о внедрении № 130 и 131 от 17.06.2021).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 25 научных работах, из которых: 7 статей в научных изданиях, включенных в Перечень изданий, и в иностранных научных изданиях (общим объемом 5 авторских листов), 1 статья в журнале «Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка», 12 статей в сборниках материалов научных конференций, 5 тезисов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 125 страниц, в том числе два приложения занимают 17 страниц. Список использованных источников содержит 97 наименований, включая 25 собственных публикаций соискателя ученой степени (на 10 страницах).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** обоснована целесообразность введения и построения обобщенных решений дифференциальных уравнений. Приведены основные понятия теории обобщенных функций и подготовительные утверждения, обзор предшествующих результатов и некоторых результатов по аналитической теории дифференциальных уравнений.

При анализе уравнений

$$U' + QU = 0, \tag{1}$$

где Q – обобщенная функция, уточнение постановки задачи заключается в выборе аппроксимации коэффициента Q, т.е. задании семейства ограниченных (обычно гладких) функций $q_\varepsilon(x)$, которые при стремлении малого параметра ε к нулю сходятся к Q в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций. Такой выбор позволяет рассмотреть семейство вспомогательных аппроксимирующих уравнений

$$u'_\varepsilon(x) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0, \tag{2}$$

коэффициенты которых не имеют особенностей, а их решения определены на всей прямой.

Определение 1. *Распределение U будем называть обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) с условием $u(x_0) = C$ при заданном способе аппроксимации коэффициента, если решения $u_\varepsilon(x)$ уравнений (2), удовлетворяющие условию Коши $u_\varepsilon(x_0) = C$, сходятся к U в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$[11].*

При таком определении возникает вопрос об условиях существования обобщенного решения задачи Коши. Такие условия неизвестны даже для простейших на вид дифференциальных уравнений (1). Сложность этого вопроса определяется тем, что невозможно описать все аппроксимации всех обобщенных функций Q, а при разных аппроксимациях возникают семейства вспомогательных уравнений (2) с качественно разным поведением решений. Из сказанного следует, что в явном вида ответ может быть получен только для конкретных классов коэффициентов Q и конкретных их аппроксимаций.

Поэтому в главах 2 и 3 исследованы уравнения (1), в которых коэффициентами Q являются обобщенные функции, соответствующие обычным функциям $q(x)$, особенностями которых являются полюсы, и использованы так называемые аналитические аппроксимации.

Здесь термин «обобщенная функция Q *соответствует* обычной функции $q(x)$» означает, что для функционала Q на пространстве Шварца (основных функций) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ выполнено равенство $\langle Q, \varphi\rangle = \int q(x)\varphi(x)dx$ для тех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, для которых интеграл в правой части существует.

Аналитическое представление[12] обобщенной функции Q на прямой задается парой $(q^+(z),\ q^-(z))$, где $q^+(z)$ – функция, аналитическая (не имеющая особенностей) в верхней полуплоскости, $q^-(z)$ – функция, аналитическая в нижней полуплоскости, такой, что

$$Q = \lim_{\varepsilon\to 0}[q^+(x+i\varepsilon) - q^-(x-i\varepsilon)],$$

[11] Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

[12] Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М. : Мир, 1968. – 276 с.

где предел понимается в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций. Семейство функций $q_\varepsilon(x) = q^+(x+i\varepsilon) - q^-(x-i\varepsilon)$ называется *аналитической аппроксимацией* Q.

Аналогично возникает вопрос о введении понятия обобщенного решения для нелинейных уравнений.

Во **второй главе** рассмотрены решения в пространстве обобщенных функций семейства линейных дифференциальных уравнений первого порядка, в которых коэффициентами являются обобщенные функции, соответствующие обычной функции $q(x) = \frac{s}{x^\mu}$, где $s, \mu \in \mathbb{Z}$, имеющей особенность в одной точке.

В **разделе 2.1** общий подход к определению понятия обобщенного решения конкретизирован для линейного дифференциального уравнения первого порядка вида (1), в котором коэффициент Q соответствует гладкой при $x \neq 0$ обычной функции $q(x)$.

Если коэффициент $q(x)$ является интегрируемой функцией, то формула

$$u(x) = C \cdot e^{-G(x)+G(x_0)}, \tag{3}$$

$G(x)$ – первообразная для $q(x)$, задает решение задачи Коши для уравнения

$$u'(x) + q(x)u(x) = 0 \tag{4}$$

с условием $u(x_0) = C,\ x_0 < 0,$ определенное на всей прямой.

Однако если коэффициент $q(x)$ имеет неинтегрируемую особенность в точке 0, то формула (3) задает однозначно определенное решение задачи Коши для такого уравнения только на отрицательной полупрямой.

Согласно общему подходу, первый шаг уточнения постановки задачи заключается в выборе обобщенной функции Q, соответствующей $q(x)$, после чего получаем уравнение (1) с обобщенным коэффициентом. Поскольку все преобразования, с помощью которых получена формула (3), не определены для обобщенных функций, эта формула неприменима к уравнениям с обобщенными коэффициентами.

Для обобщенной функции Q существует первообразная $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и, в зависимости от свойств G, уравнения вида (1) разбиваются на несколько классов. Если G является сингулярной обобщенной функцией, то формула (3) не имеет смысла, так как экспонента от такой обобщенной функции не определена. Если первообразная G является локально интегрируемой функцией, то формула (3) задает однозначно определенную на всей прямой обычную функцию u, которую будем называть *формальным решением задачи Коши* с условием $u(x_0) = C$. Поскольку формальное решение совпадает на отрицательной полупрямой с решением, заданным формулой (3), получаем, что выбор обобщенной функции Q позволяет однозначно продолжить решение через особую точку, что невозможно в классической теории дифференциальных уравнений на прямой. При этом, если формальное решение u является локально интегрируемой функцией, то оно задает (однозначно определенную) регулярную обобщенную функцию U.

Наиболее сложной оказывается ситуация, когда формальное решение определено, но не является локально интегрируемой функцией и ему соответствует некоторое семейство сингулярных обобщенных функций. Для коэффициентов вида $q(x) = \frac{s}{x^\mu}$ такая ситуация имеет место только при $\mu = 1$, ввиду чего далее в **разделе 2.2** рассмотрено уравнение

$$u'(x) + \frac{s}{x}u(x) = 0, \ s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{5}$$

которое мы назовем *базовым,* т.к. специфические особенности задачи об обобщенных решениях проявляются при анализе такого уравнения.

Множество классических решений уравнения (5)

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x^s}, & x < 0; \\ \frac{C_2}{x^s}, & x > 0, \end{cases}$$

зависит от двух произвольных постоянных. Поэтому из начального условия $u(-1) = (-1)^s$ однозначно определяется только $C_1 = 1$, и для решения задачи Коши не определено однозначное продолжение через особенность на положительную полуось. Наиболее естественное продолжение решения может быть построено в помощью выхода в комплексную плоскость и рассмотрения сопутствующего уравнения на комплексной плоскости

$$u'(z) + \frac{s}{z}u(z) = 0. \tag{6}$$

Решение задачи Коши для (6) есть функция $u(z) = \frac{1}{z^s}$. При целых s эта функция является однозначной и задает однозначное продолжение решения через особенность. Именно поэтому мы рассматриваем уравнение (5) только для целых значений s.

Функция $\frac{1}{x}$ не является локально интегрируемой, и ей соответствует семейство обобщенных функций $Q_M = P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta$, где M — произвольная постоянная, δ — дельта-функция Дирака, $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$, а $P\left(\frac{1}{x}\right)$ — распределение заданное с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши: $\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = v.p. \int \frac{1}{x}\varphi(x)dx$.

Поэтому первый шаг уточнения постановки задачи заключается в задании числа M, после чего получаем уравнение с обобщенным коэффициентом

$$U'(x) + sQ_M U(x) = 0. \tag{7}$$

Для этого уравнения (в результате выбора M) однозначно определено формальное решение задачи Коши с условием $u(-1) = (-1)^s$:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^s}, & x < 0; \\ \frac{(-1)^s \cdot e^{-sM}}{x^s}, & x > 0. \end{cases} \tag{8}$$

При $s > 0$ формальное решение имеет степенную особенность и ему соответствует семейство обобщенных функций, зависящее от s произвольных постоянных. Исходное уравнение (7) не содержит информации о том, какие из этих обобщенных функций следует считать его обобщенными решениями, поэтому второй шаг уточнения постановки задачи заключается в задании аппроксимации коэффициента sQ_M. Мы рассматриваем аналитические аппроксимации, это семейство рациональных функций

$$q_\varepsilon(x) = \lambda\frac{s}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{s}{x-i\varepsilon}, \tag{9}$$

где $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{M}{2\pi}i,\ M = i\pi(1-2\lambda)$.

Теорема 1. [1] *Решения задачи Коши с условием* $u(-1) = (-1)^s$ *для аппроксимирующих уравнений* (2) *при аппроксимациях* (9) *представляются в виде*

$$u_\varepsilon(x) = \widetilde{C}_\varepsilon\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{s-\lambda s}}\frac{1}{(x+i\varepsilon)^{\lambda s}}, \tag{10}$$

где $\widetilde{C}_\varepsilon = (-1)^s(-1-i\varepsilon)^{s-\lambda s}(-1+i\varepsilon)^{\lambda s}$, *и где при нецелом* λs *в правой части рассматривается ветвь многозначной функции, однозначно определяемая начальным условием.*

При $x \neq 0$ *семейство* $u_\varepsilon(x)$ *точечно сходится к формальному решению* (8), *причем вне любой окрестности нуля сходимость равномерная.*

При анализе поведения аппроксимирующих решений имеем два случая.

Если $s < 0$, то при любом M формальное решение (8) является локально ограниченной функцией и при $\varepsilon \to 0$ семейство u_ε сходится к (8) в пространстве обобщенных функций.

Если $s > 0$, то поведение семейств (10) более сложное и основным результатом главы 2 являются условия сходимости этого семейства в пространстве распределений при $s > 0$.

Теорема 2. [1] *Пусть* $s \in \mathbb{N}$ *и аналитическая аппроксимация коэффициента* $sQ_M = sP\left(\frac{1}{x}\right) + sM\delta$ *задана формулой* (9). *Обобщенное решение задачи Коши для уравнения* (7) *существует тогда и только тогда, когда* $M = i\pi\left(1 - \frac{2m}{s}\right)$, *где* m *– целое число, такое, что* $m \leq 0$ *или* $m \geq s$.

При $m \geq s$ *обобщенным решением является распределение*

$$\frac{1}{(x+i0)^s} = P\left(\frac{1}{x^s}\right) + \frac{(-1)^s}{(s-1)!}i\pi\delta^{(s-1)},$$

а при $m \le 0$ – *распределение*

$$\frac{1}{(x-i0)^s} = P\left(\frac{1}{x^s}\right) - \frac{(-1)^s}{(s-1)!} i\pi\delta^{(s-1)}.$$

Из теоремы 2 следует, что при $s > 0$ для существования обобщенного решения необходимо, чтобы число M имело специальный вид: $M = i\pi\left(1-\frac{2m}{s}\right)$, где m – целое, причем это необходимое условие выполнено тогда и только тогда, когда формальное решение (8) совпадает с аналитическим решением сопутствующего уравнения (6).

В случае $s=1$, рассмотренном в статье А.Б. Антоневича и Т.Г. Шаговой, это условие оказалось и достаточным. Новым является то, что при $s>1$ это условие не является достаточным и теорема 2 содержит дополнительные условия на m, обеспечивающие существование обобщенного решения. При $s=1$ эти условия выполнены автоматически.

В **главе 3** рассмотрены уравнения вида (4), в которых коэффициент является мероморфной функцией в окрестности D вещественной прямой, т.е. представляется в виде $q(z) = \frac{v(z)}{w(z)}$, где $v(z)$, $w(z)$ – голоморфные в D функции, не имеющие общих нулей. Как отмечено выше, существование обобщенных решений связано с существованием однозначных аналитических решений на вещественной оси сопутствующего уравнения

$$\frac{du(z)}{dz} + q(z)u(z) = 0, \tag{11}$$

которое рассматривается в **разделе 3.1**.

В **разделе 3.2** получено представление решения в виде, удобном для дальнейшего исследования.

Теорема 3. [3] *Решение задачи Коши для уравнения* (11) *с условием* $u(x_0) = C$ *является мероморфной функцией в окрестности вещественной прямой тогда и только тогда, когда на каждом конечном промежутке* $(-N;\ N)$ *вещественной оси коэффициент* $q(x)$ *представляется в виде*

$$q(x) = \sum_{|a_k|<N} \frac{s_k}{x-a_k} + b_N(x), \tag{12}$$

где s_k – *целые числа,* $a_k \ne N$, $b_N(z)$ – *аналитическая функция в открытом множестве на плоскости, содержащем интервал* $(-N;\ N)$.

Мероморфное решение уравнения (11) *на промежутке* $(-N;\ N)$ *задается формулой*

$$u_{mer}(x) = CB_N(x) \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0-a_k}{x-a_k}\right)^{s_k},\ B_N(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} b_N(t)dt}. \tag{13}$$

Представление (12) в виде конечной суммы использовано потому, что аналогичное представление рассматриваемого коэффициента на всей прямой

$$q(x) = \sum_k \frac{s_k}{x - a_k} + b(x)$$

невозможно, так как такой ряд может оказаться расходящимся.

Обобщенные функции, соответствующие функции (12), описываются следующим образом. Обозначим через $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ подпространство, состоящее из φ, у которых носитель принадлежит $(-N;\ N)$. Функции (12) соответствует семейство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ вида

$$Q_N = \sum_{|a_k|<N} s_k \left[P\left(\frac{1}{x - a_k}\right) + M_k \delta_{a_k} \right] + b_N(x), \tag{14}$$

где M_k — произвольные комплексные числа. При любых заданных M_k получаем функционал Q, определенный на всем пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \cup \mathcal{D}_N(\mathbb{R})$.

При построенном коэффициенте Q формальное решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = u_{mer}(x) \frac{S(x)}{S(x_0)}, \tag{15}$$

где $S(x) = \prod\limits_{-N<a_k<x} (-1)^{s_k} e^{-s_k M_k}$ – кусочно-постоянная функция со скачками в тех точках a_k, где $e^{-s_k M_k} \neq (-1)^{s_k}$.

В **разделе 3.3** найдены решения аппроксимирующих уравнений.

На интервале $(-N;\ N)$ аппроксимирующее семейство для распределения (14), порожденное аналитическим представлением, можно задать формулой

$$q_{\varepsilon_N}(x) = \sum_{|a_k|<N} \frac{\lambda_k s_k}{x + i\varepsilon - a_k} + \sum_{|a_k|<N} \frac{(1-\lambda_k) s_k}{x - i\varepsilon - a_k} + b_N(x),\ \lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{M_k}{2\pi} i. \tag{16}$$

Аналогично теореме 1 получаем, что решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений с условием $u_\varepsilon(x_0) = C$ представляются в виде

$$\begin{gathered} u_{\varepsilon_N}(x) = C B_N(x) \times \\ \times \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k} \right)^{s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k} \cdot \frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon} \right)^{\lambda_k s_k} \end{gathered} \tag{17}$$

и при $x \neq a_k$ и $\varepsilon \to 0$ точечно сходятся на $(-N;\ N)$ к формальному решению (15).

В **разделе 3.4** найдены условия существования обобщенных решений уравнения вида (4) с мероморфным коэффициентом. Семейство $u_{\varepsilon_N}(x)$

представлено в виде произведения семейств, сходимость которых исследована в главе 2 при анализе базового уравнения. Сложности при анализе сходимости произведений связаны с тем, что в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ предел произведения может не существовать даже в случае, когда один из двух сомножителей равномерно сходится к гладкой функции. Достаточные условия, при которых предел произведения равен произведению пределов, получены в лемме.

Лемма 1. [3; 7] *Если семейство функций $v_\varepsilon(x)$ сходится к обобщенной функции V в смысле теории распределений и для каждого ограниченного множества существует число ℓ такое, что выполняется оценка*

$$|v_\varepsilon(x)| \leq \frac{const}{\varepsilon^\ell}, \tag{18}$$

а семейство гладких функций $f_\varepsilon(x)$ аналитически зависит от ε и, следовательно, при $\varepsilon \to 0$ сходится к гладкой функции $f(x)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[f_\varepsilon(x)v_\varepsilon(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) = f \cdot V.$$

Из представления (17), используя лемму 1 и результаты главы 2, получаем основной результат.

Теорема 4. [3] *Решения задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ для аппроксимирующих уравнений (2) при аппроксимации (16) коэффициента (14) на интервале $(-N;\ N)$ имеют предел в пространстве распределений тогда и только тогда, когда для тех значений k, для которых $s_k > 0$, число M_k представляется в виде*

$$M_k = i\pi\left(1 - \frac{2m_k}{s_k}\right),$$

где m_k – целое, такое, что $m_k \leq s_k$ или $m_k \geq 0$.

При этом решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений (2) на более широком интервале $(-N-1;\ N+1)$ имеют на $(-N;\ N)$ такой же предел, тем самым определено обобщенное решение задачи Коши на всей прямой.

В **главе 4** исследованы обобщенные решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, классические решения которых имеют особенности, а именно, рассмотрены уравнения из иерархии, порожденной уравнением Риккати. Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0,\ n = 1, 2, 3, ...,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующие по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w,\ z \in \mathbb{C},\ \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{19}$$

При $n = 1$ имеем уравнение Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0. \tag{20}$$

При $n = 2$ получаем второе уравнение Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z) w'(z) = 0. \tag{21}$$

Если решение задачи Коши для заданного уравнения имеет полюсы на вещественной прямой, то ему соответствует семейство обобщенных функций на прямой и требуется выяснить, какие из этих обобщенных функций и в каком смысле можно считать обобщенными решениями исходного уравнения. Поэтому сначала показано, что аналитические решения уравнений (20) и (21) имеют в качестве особенностей только полюсы, т.е. эти уравнения обладают свойством Пенлеве, для них вводится понятие обобщенного решения с помощью аппроксимации начальных условий и получено описание всех обобщенных решений при указанных аппроксимациях.

Раздел 4.1 посвящен исследованию уравнений иерархии Риккати методом резонансов.

В **разделе 4.2** рассмотрено первое уравнение иерархии Риккати (20). На прямой это уравнение

$$u'(x) + \gamma u^2(x) = 0, \tag{22}$$

у которого решение задачи Коши с начальным условием $u(x_0) = C$, $x_0,\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$, уходит на бесконечность в точке $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C}$ и не имеет однозначно определенного продолжения через особенность.

Для сопутствующего уравнения Риккати (20) на комплексной плоскости решение задачи Коши с условием $w\left(z_0\right) = C \neq 0$ является рациональной функцией $w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}$, где $a = z_0 - \frac{1}{\gamma C}$, однозначно определенной при $z \neq a$. В частности, при вещественных $z_0 = x_0$ и C по этой формуле на всей прямой однозначно определена функция, имеющая особенность в точке $a = x_0 - \frac{1}{\gamma C}$, которую будем называть *формальным решением задачи Коши* уравнения (22).

Формальному решению соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций $\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} M \delta_a$, где M – произвольная постоянная.

Для введения понятия обобщенного решения рассмотрим решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (20) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$, где $C_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $C_\varepsilon \to C$ при $\varepsilon \to 0$; $w_\varepsilon(x)$ не имеют особенностей на вещественной прямой.

Определение 2. *Аппроксимацией начального условия будем называть семейство чисел* $C_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *таких, что* $C_\varepsilon \to C$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Распределение* W *будем называть обобщенным решением задачи Коши для уравнения* (22) *с условием* $u(x_0) = C$ *при заданном способе аппроксимации начального условия, если решения* $w_\varepsilon(x)$ *задачи Коши для уравнения* (20) *с условиями* $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$ *сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к* W *в смысле сходимости в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Теорема 5. [5] *Пусть* $w_\varepsilon(x)$ *есть решения задачи Коши для уравнения* (20), *удовлетворяющие начальным условиям* $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$, *где* $C_\varepsilon \to C$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Семейство* $w_\varepsilon(x)$ *сходится в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *только в двух случаях:*

1) *если* $\mathrm{Im} C_\varepsilon < 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^- = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) - i\pi \frac{1}{\gamma}\delta_a;$$

2) *если* $\mathrm{Im} C_\varepsilon > 0$ *для достаточно малых* ε, *то обобщенным решением является распределение*

$$W^+ = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + i\pi \frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

Раздел 4.3 посвящен построению обобщенных решений второго уравнения иерархии Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z) w'(z) = 0, \ \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{23}$$

Аналитические решения задачи Коши для этого уравнения описаны в следующей ниже лемме, из которой следует, что уравнение (23) обладает свойством Пенлеве и все его решения являются рациональными функциями.

Лемма 2. [6] *Решение задачи Коши для уравнения* (23) *с условиями* $w(z_0) = C_1$, $w'(z_0) = C_2$, *где* $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, *причем* C_1 *и* C_2 *одновременно не равны нулю, является рациональной функцией и имеет следующий вид:*

1) *если* $C_2 \neq -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}\right], \tag{24}$$

где

$$a = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}, \ b = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

а знаком $\sqrt{\ }$ *обозначено одно из значений корня квадратного, т.е. число* q, *такое, что* $q^2 = -2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2$;

2) *если* $C_2 = -\gamma C_1^2$, *то* $w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}$, *где* $a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1}$;

3) *если* $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, *то* $w(z) = \frac{2}{\gamma(z-a)}$, *где* $a = z_0 - \frac{2}{\gamma C_1}$.

Рассмотрим второе уравнение Риккати (23) на прямой, т.е. уравнение вида

$$u''(x) + \gamma^2 u^3(x) + 3\gamma u(x) u'(x) = 0, \tag{25}$$

и задачу Коши для этого уравнения с начальными условиями в точке x_0 на прямой и вещественными C_1, C_2.

Определение 3. *Пусть* $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $C_1(\varepsilon) \to C_1$, $C_2(\varepsilon) \to C_2$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Если решения* $w_\varepsilon(x)$ *задачи Коши для уравнения* (23) *с условиями* $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$ *не имеют особенностей на вещественной оси и сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к* W *в смысле сходимости в пространстве* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *то распределение* W *будем называть обобщенным решением задачи Коши для уравнения* (25) *с условиями* $u(x_0) = C_1$, $u'(x_0) = C_2$ *при заданном способе аппроксимации начальных условий.*

Теорема 6. [6] *Количество обобщенных решений уравнения* (25) *зависит от соотношений между начальными значениями* C_1 *и* C_2, *а их вид зависит от знаков величин* $\mathrm{Im}C_1(\varepsilon)$ *и* $\mathrm{Im}C_2(\varepsilon)$. *При этом возможны четыре случая.*

1. *Если* $C_1^2 < -\frac{2}{\gamma}C_2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, *то существуют четыре обобщенных решения уравнения* (25)

$$W^{\pm,\pm} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-b}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_b,$$

где

$$a = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},\ b = x_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}.$$

2. *Если* $C_2 = -\gamma C_1^2$, *то существуют два обобщенных решения*

$$W^{\pm} = \frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a, \text{ где } a = x_0 - \frac{1}{\gamma C_1}.$$

3. *Если* $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, *то существуют три обобщенных решения*

$$W^{\pm} = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{2}{\gamma}\delta_a,\ W = \frac{2}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a}\right), \text{ где } a = x_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

4. *Если* $C_1^2 > -\frac{2}{\gamma}C_2$, *то формальное решение уравнения* (25) *является гладкой функцией и является единственным обобщенным решением.*

В приложении приведены примеры сходимости аппроксимирующих решений для уравнений (7) при других способах аппроксимации, из которых следует, что условия существования и вид обобщенных решений зависят от способа аппроксимации и что в общей постановке получение условий существования обобщенных решений является открытой проблемой даже для простых на вид уравнений (1) с конкретными обобщенными коэффициентами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Найдены все случаи существования обобщенных решений базовых дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие функции, имеющей полюс первого порядка в одной точке, построены обобщенные решения таких уравнений [1; 12; 13; 14; 16; 23].

2. Определены условия разрешимости в пространстве обобщенных функций семейства дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие заданной мероморфной функции [2; 3; 4; 7; 15; 17; 19; 25].

3. Построены обобщенные решения первого и второго дифференциальных уравнений иерархии Риккати [5; 6; 8; 9; 10; 11; 18; 20; 21; 22; 24].

Принципиально новым в работе является построение решений, являющихся сингулярными обобщенными функциями, в отличие от предшествующих работ на родственную тематику, в которых рассматривались решения, являющихся регулярными обобщенными функциями. Качественное отличие заключается в том, что для рассматриваемых линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами сингулярные обобщенные решения существуют только для некоторого дискретного множества обобщенных коэффициентов и что обобщенными решениями нелинейных уравнений могут быть только некоторые из обобщенных функций, соответствующих классическому решению с особенностями.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования могут быть развиты в применении к другим классам дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях, и использованы при моделировании процессов, происходящих в средах со сложной структурой.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе на спецкурсах по дифференциальным уравнениям и функциональному анализу.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с п. 19 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий

1. Антоневич, А.Б. Решение дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–65.

2. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 54–61.

3. Антоневич, А.Б. Классические, аналитические, формальные и обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с мероморфным коэффициентом / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина // Труды Института математики. – 2021. – Т. 29, № 1–2. – С. 17–40.

4. Antonevich, A.B. On Generalized Solutions of Some Differential Equations with Singular Coefficients / A.B. Antonevich, E.V. Kuzmina // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar. Series A: Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. – 2022. – Vol. 14, № 1. – P. 1–11.

5. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения уравнения Риккати / Е.В. Кузьмина // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 2. – С. 144–154.

6. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения второго уравнения иерархии Риккати / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 68–75.

7. Antonevich, A.B. On generalized solutions of linear differential equations of the first order / A.B. Antonevich, E.V. Kuzmina // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 266, № 1. – P. 26–41.

Статьи в других научных изданиях

8. Грицук, Е.В. Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве / Е.В. Грицук, Е.В. Кузьмина // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 64–72.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

9. Грицук, Е.В. Структура уравнений обобщенной иерархии уравнения Риккати / Е.В. Кузьмина, Е.В. Грицук // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам : материалы IX Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 21–24 марта 2017 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Мозыр. гос. пед. ун-т им. И.П. Шамякина ; редкол.: И.Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь, 2017. – С. 128–130.

10. Грицук, Е.В. Исследование решений уравнений третьего и четвертого порядков обобщенной иерархии Риккати в окрестности подвижного полюса / Е.В. Грицук, Е.В. Кузьмина // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 27–28 апреля 2017 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2017. – С. 46–48.

11. Кузьмина, Е.В. Рекуррентное соотношение на резонансный многочлен уравнений обобщенной иерархии уравнения Риккати / Е.В. Кузьмина // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сб. материалов X Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 23–24 ноября 2017 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Брест. гос. технич. ун-т ; редкол.: В.А. Головко (гл. ред.) [и др.]. – Брест, 2017. – С. 76–78.

12. Кузьмина, Е.В. Поведение решений аппроксимирующих уравнений одного дифференциального уравнения с обобщенным коэффициентом / Е.В. Кузьмина // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апреля 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. А.И. Басика. – Брест, 2020. – С. 80–83.

13. Кузьмина, Е.В. О сходимости в пространстве обобщенных функций решений аппроксимирующих уравнений / Е.В. Кузьмина // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам : материалы XIII Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 25–26 марта 2021 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Мозыр. гос. пед. ун-т им. И.П. Шамякина ; редкол.: И.Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь, 2021. – С. 219–221.

14. Кузьмина, Е.В. К вопросу об обобщенных решениях дифференциального уравнения с мероморфным коэффициентом / Е.В. Кузьмина // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апреля 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 80–82.

15. Кузьмина, Е.В. Решения дифференциального уравнения с мероморфным коэффициентом в пространстве распределений / Е.В. Кузьмина // XXIII Респ. науч.-практич. конф. молодых ученых : сб. материалов, Брест, 14 мая 2021 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. А.Е. Будько. – Брест, 2021. – С. 43–46.

16. Антоневич, А.Б. Обобщенные решения одной системы Фукса / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина // «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова : материалы Междунар. матем. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2021. – С. 52–54.

17. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения дифференциального уравнения с мероморфным коэффициентом / Е.В. Кузьмина // «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова : материалы Междунар. матем. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Бел. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2021. – С. 63–65.

18. Кузьмина, Е.В. Об обобщенных решениях второго уравнения иерархии Риккати / Е.В. Кузьмина // XX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2022) : материалы конф., Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г. : в 2 ч. / Мин. обр. Респ. Бел., Ин-т математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т, Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2022. – Ч. 1. – С. 11–13.

19. Антоневич, А.Б. Об обобщенных решениях дифференциальных уравнений / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина, Е.Г. Шагова // XX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2022) : материалы конф., Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г. : в 2 ч. / Мин. обр. Респ. Бел., Ин-т математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т, Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2022. – Ч. 2. – С. 43–45.

20. Антоневич, А.Б. Обобщенные решениях уравнения Риккати при аппроксимации системами уравнений / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина // XXI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023) : материалы конф., Могилев, 23–27 мая 2023 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т, Межгос. образоват. учр-е ВО «Белорусско-Российский ун-т» ; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Могилев, 2023. – Ч. 1. – С. 5–7.

Тезисы

21. Грицук, Е.В. Резонансный многочлен уравнений обобщенной иерархии уравнения Риккати [Электронный ресурс] / Е.В. Кузьмина, Е.В. Грицук // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XX Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 20–22 марта 2017 г. : в 2 ч. / Мин. обр. Респ. Бел., Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2017. – Ч. 1. – С. 17–18. – 1 электрон. опт. диск (CD ROM).

22. Грицук, Е.В. Исследование решений уравнений третьего и четвертого порядков обобщенной иерархии Риккати в окрестности подвижного полюса / Е.В. Грицук, Е.В. Кузьмина // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. тезисов докладов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 27–28 апреля 2017 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2017. – С. 15.

23. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка / Е.В. Кузьмина // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXIII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2020 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Гомель. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: С.П. Жогаль (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2020. – С. 10–11.

24. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения дифференциального уравнения второго порядка / Е.В. Кузьмина // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сб. материалов XII Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 18–19 ноября 2021 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Брест. гос. технич. ун-т ; редкол.: В.А. Головко (гл. ред.) [и др.]. – Брест, 2021. – С. 113–114.

25. Кузьмина, Е.В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений и систем с коэффициентами, имеющими особенность / Е.В. Кузьмина // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 ноября 2021 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т ; сост. В.В. Лепин. – Минск, 2021. – Ч. 1. – С. 24–25.

РЕЗЮМЕ

Кузьмина Елена Викторовна

Построение обобщенных решений некоторых дифференциальных уравнений с помощью аналитической аппроксимации

Ключевые слова: обобщенная функция, дифференциальное уравнение с обобщенным коэффициентом, аналитическое представление распределения, произведение обобщенных функций, способ аппроксимации, обобщенное решение нелинейного уравнения, свойство Пенлеве.

Цель работы: получение условий существования обобщенных решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений и построение таких решений.

Методы исследования: теория обобщенных функций, теория аналитических функций.

Полученные результаты и их новизна.

1. Найдены условия существования обобщенных решений дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются распределения из однопараметрического семейства распределений, соответствующих функции, имеющей полюс в одной точке. Такие условия получены впервые, они показывают, что обобщенные решения существуют только при специальных значениях параметра.

2. Получены условия существования обобщенных решений дифференциальных уравнений, коэффициентами которых являются распределения, соответствующие заданной мероморфной функции. Уравнения с такими коэффициентами ранее не исследовались.

3. Впервые построены сингулярные обобщенные решения нелинейных дифференциальных уравнений из иерархии Риккати.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты и использованный подход могут быть применены при построении сингулярных решений дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе на спецкурсах по функциональному анализу и смежным дисциплинам.

Область применения: теория сингулярных решений дифференциальных уравнений.

РЭЗЮМЭ

Кузьміна Алена Віктараўна

Пабудова абагульненых рашэнняў некаторых дыферэнцыяльных раўнанняў з дапамогай аналітычнай апраксімацыі

Ключавыя словы: абагульненая функцыя, дыферэнцыяльнае раўнанне з абагульненым каэфіцыентам, аналітычнае прадстаўленне размеркавання, здабытак абагульненых функцый, спосаб апраксімацыі, абагульненае рашэнне нелінейнага раўнання, уласцівасць Пенлеве.

Мэта працы: атрыманне ўмоў існавання абагульненых рашэнняў некаторых класаў звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў і пабудова такіх рашэнняў.

Метады даследавання: тэорыя абагульненых функцый, тэорыя аналітычных функцый.

Атрыманыя вынікі і іх навізна.

1. Знойдзены ўмовы існавання абагульненых рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў, каэфіцыентамі якіх з'яўляюцца размеркаванні з аднапараметрычнага сямейства размеркаванняў, адпаведныя функцыі, якая мае полюс у адным пункце. Такія ўмовы атрыманы ўпершыню, яны паказваюць, што абагульненыя рашэнні існуюць толькі пры спецыяльных значэннях параметра.

2. Атрыманы ўмовы існавання абагульненых рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў, каэфіцыентамі якіх з'яўляюцца размеркаванні, якія адказваюць зададзенай мераморфнай функцыі. Раўнанні з такімі коэффіцыентамі раней не даследаваліся.

3. Упершыню пабудаваны сінгулярныя абагульненыя рашэнні нелінейных дыферэнцыяльных раўнанняў з іерархіі Рыкаці.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі і выкарыстаны падыход могуць быць ужытыя пры пабудове сінгулярных рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў, якія ўзнікаюць у прыкладаннях. Вынікі дысертацыі могуць быць выкарыстаны ў навучальным працэсе на спецкурсах па функцыянальнаму аналізу і сумежных дысцыплінах.

Галіна прымянення: тэорыя сінгулярных рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў.

SUMMARY

Kuzmina Elena Viktorovna

Construction of generalized solutions of some differential equations using analytical approximation

Key words: generalized function, differential equation with a generalized coefficient, analytical representation of a distribution, product of generalized functions, approximation method, generalized solution of a nonlinear equation, Painleve property.

Purpose of the work: obtaining conditions for the existence of generalized solutions of some classes of ordinary differential equations and the construction of such solutions.

Research methods: theory of generalized functions, theory of analytic functions.

Obtained results and their novelty.

1. Conditions are found for the existence of generalized solutions of differential equations whose coefficients are distributions from a one-parameter family of distributions corresponding to a function that has a pole at one point. Such conditions were obtained for the first time; they show that generalized solutions exist only for special values parameter.

2. Conditions for the existence of generalized solutions of differential equations whose coefficients are distributions corresponding to a given meromorphic function are determined. Equations with such coefficients have not been studied previously.

3. For the first time, singular generalized solutions of nonlinear differential equations from the Riccati hierarchy have been constructed.

Recommendations for use. The results obtained and the approach used can be applied in constructing singular solutions of differential equations that arise in applications. The results of the dissertation can be used in the educational process at special courses in functional analysis and related disciplines.

Application field: theory of singular solutions of differential equations.

Подписано в печать 17.11.2023. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Цифровая печать. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 65 экз. Заказ 391.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.