

Электродинамика плазмонных мод металлических пленок

Е. А. Чудаков¹⁾, А. Б. Сотский¹⁾, Л. И. Сотская²⁾

¹⁾ Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Могилев, Беларусь,
e-mail: kenni_mark@bk.ru, ab_sotsky@mail.ru

²⁾ Белорусско – Российский университет, Могилев, Беларусь,
e-mail: li_sotskaya@tut.by

Представлен метод интегральных уравнений для расчета плазмонных мод металлических пленок, основанный на теории аномального скин-эффекта. Исследованы постоянные распространения и поля плазмонных мод золотых пленок различной толщины на кварцевой подложке при различных вероятностях зеркального отражения электронов на границах пленки. Результаты сопоставлены с данными классической теории нормального скин-эффекта.

Ключевые слова: плазмонная мода; аномальный скин-эффект, метод интегральных уравнений.

Electrodynamics of plasmon modes of metal films

E. A. Chudakov¹⁾, A. B. Sotsky¹⁾, L. I. Sotskaya²⁾

¹⁾ Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev, Belarus, e-mail: kenni_mark@bk.ru,
ab_sotsky@mail.ru

²⁾ Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus, e-mail: li_sotskaya@tut.by

A method of integral equations for calculating plasmon modes of metal films, based on the theory of anomalous skin effect, is presented. The propagation constants and fields of plasmon modes of gold films of various thicknesses on a quartz substrate are studied for different probabilities of specular reflection of electrons at the film boundaries. The results are compared with the data of the classical theory of normal skin effect.

Keywords: plasmonic mode; anomalous skin effect, method of integral equations.

Введение

При контроле параметров газовых сред и растворов широко применяются оптические сенсоры, использующие плазмонные моды, направляемые наноразмерными металлическими пленками. Расчет таких мод обычно проводится в приближении нормального скин-эффекта, в котором металл рассматривается как среда с комплексной диэлектрической проницаемостью (приближение Друде – Зинера). Однако такой подход оправдан, если длина свободного пробега электрона проводимости много меньше толщины скин-слоя. В то же время толщина металлических пленок, используемых в сенсорах, обычно меньше толщины скин-слоя. В таких условиях для корректного электродинамического расчета плазмонных мод необходимо учитывать нелокальную связь плотности тока проводимости с напряженностью электрического поля, что возможно в рамках полуклассической теории аномального скин-эффекта [1]. Эта теория предполагает совместное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля и уравнения Больцмана для функции плотности

электронов в μ -пространстве координат и скоростей. В случае нормального падения плоской волны на полугораниченный металл названная система может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению для напряженности электрического поля плоской волны, которое допускает аналитическое решение методом Винера – Хопфа [1]. Но при анализе плазменных мод теория аномального скин-эффекта сильно усложняется, и до сих пор она практически не разработана. В настоящем сообщении сделан шаг в сторону устранения данного пробела. В основу рассмотрения положена идея сведения дифференциальных уравнений Максвелла и Больцмана к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно компонент электрического поля, допускающей численное решение методом квадратур [2]. Но в [2] исследовано отражение от металлической пленки на диэлектрической подложке световых волн s - и p -поляризации применительно к задаче многоугольной эллипсометрии, а волноводная задача не рассматривалась. Кроме того, соответствующая теория была разработана только для случая диффузного рассеяния электронов на границах пленки (вероятности зеркального отражения электрона $p_i = 0$, где $i = 1, 2$ – номера границ пленки). В то же время, при возбуждении плазменных мод p_i могут заметно отличаться от нуля [3]. Ниже представлен метод интегральных уравнений, свободный от указанных ограничений. На его основе исследованы характеристики плазменных мод золотых пленок различной толщины на кварцевой подложке.

1. Интегральные уравнения теории аномального скин-эффекта

Рассмотрим электромагнитную волну p -поляризации, распространяющуюся вдоль металлической пленки, контактирующей с диэлектрическими средами (структура и сопутствующая система координат представлены на рис. 1, а). Зависимость поля от времени t и координаты z описывается множителем $\exp(i\omega t - ik_0 \beta z)$, где β – безразмерная постоянная распространения плазменной моды, $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$ – волновое число вакуума. Далее этот множитель будет опускаться. Методом вариации произвольных постоянных Лагранжа система уравнений Максвелла – Больцмана для волны в металлической пленке может быть строго сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно компонент напряженности электрического поля. Введем обозначение [2] $k_y = \sqrt{\epsilon_m - \beta^2}$, где $\epsilon_m = \epsilon + \Delta\epsilon$ – относительная диэлектрическая проницаемость металла, ϵ – диэлектрическая проницаемость ионного остова металла,

$$\Delta\epsilon = \frac{2iK\epsilon_m}{k_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \epsilon_m} d\theta, \quad (1)$$

– вклад в ϵ_m электронов проводимости, $K = -2m^2 e^2 v_0^2 (h^3 \omega \epsilon_0 \epsilon_m)^{-1}$,

$$\alpha = (i\omega\tau + 1)(\omega\tau v_0 c^{-1} \cos \theta)^{-1}, \quad (2)$$

m и e – масса и заряд электрона, v_0 – скорость электрона на поверхности Ферми, τ – время релаксации, h – постоянная Планка, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость

вакуума. Заметим, что при $\alpha^2 \gg \varepsilon_m$ выражение (1) переходит в классическую формулу Друде [1]. Тогда интегральные уравнения могут быть записаны в форме

$$E_y(y) = E_y^{(n)}(y) + E_y(y)\Delta\varepsilon\varepsilon_m^{-1} + \Gamma_1(y) - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta M_1 \{ \sin\theta \cos\varphi \times \\ \times \int_{-d}^0 \text{sign}(y-y') \exp(-\alpha k_0 |y-y'|) E_z(y') dy' + \cos\theta \int_{-d}^0 \exp(-\alpha k_0 |y-y'|) E_y(y') dy' \}, \quad (3)$$

$$E_z(y) = E_z^{(n)}(y) + \Gamma_2(y) + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta M_2 \{ \sin\theta \cos\varphi \times \\ \times \int_{-d}^0 \exp(-\alpha k_0 |y-y'|) E_z dy' + \cos\theta \int_{-d}^0 \text{sign}(y-y') \exp(-\alpha k_0 |y-y'|) E_y dy' \}, \quad (4)$$

$$\Gamma_j(y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta M_j (1 - \bar{p}_1 p_2)^{-1} \{ \sin\theta \cos\varphi [\bar{p}_1 (p_2 \exp(\alpha k_0 y) + (-1)^j \exp(-\alpha k_0 y)) \times \\ \times \int_{-d}^0 \exp(-\alpha k_0 y') E_z(y') dy' + p_2 (\exp(\alpha k_0 y) + (-1)^j \bar{p}_1 \exp(-\alpha k_0 y)) \int_{-d}^0 \exp(\alpha k_0 y') E_z(y') dy'] + \\ + \cos\theta [-\bar{p}_1 (\exp(-\alpha k_0 y) + (-1)^j p_2 \exp(\alpha k_0 y)) \int_{-d}^0 \exp(-\alpha k_0 y') E_y(y') dy' + \\ + p_2 (\exp(\alpha k_0 y) + (-1)^j \bar{p}_1 \exp(-\alpha k_0 y)) \int_{-d}^0 \exp(\alpha k_0 y') E_y(y') dy'] \},$$

$$M_1 = iK \sin\theta (\alpha^2 + \varepsilon_m + i\alpha\beta \sin\theta \cos\varphi / \cos\theta) (\alpha^2 + k_y^2)^{-1},$$

$$M_2 = -K \sin\theta (ik_y^2 \sin\theta \cos\varphi / \cos\theta - \alpha\beta) (\alpha^2 + k_y^2)^{-1},$$

где $\bar{p}_1 = \exp(-2\alpha k_0 d) p_1$, а стоячие волны

$E_y^{(n)}(y) = \beta k_y^{-1} [a \exp(ik_y k_0 y) - b \exp(-ik_y k_0 y)]$, $E_z^{(n)}(y) = a \exp(ik_y k_0 y) + b \exp(-ik_y k_0 y)$ (a и b произвольные постоянные) описывают распределение компонент электрического поля в приближении нормального скин-эффекта.

При выполнении (3), (4) магнитное поле в пленке может быть рассчитано по формуле $H_x = -\beta(\omega\mu_0)^{-1} H'_x$, где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума,

$$H'_x(y) = \varepsilon_m \beta^{-2} E_y^{(n)}(y) + \Gamma_3(y) - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta M_3 \{ \sin\theta \cos\varphi \times \\ \times \int_{-d}^0 \text{sign}(y-y') \exp(-\alpha k_0 |y-y'|) E_z(y') dy' + \cos\theta \int_{-d}^0 \exp(-\alpha k_0 |y-y'|) E_y(y') dy' \}, \quad (5)$$

$$M_3 = i\varepsilon_m K \sin\theta [1 + i\alpha \sin\theta \cos\varphi (\beta \cos\theta)^{-1}] (\alpha^2 + k_y^2)^{-1}.$$

В силу линейности уравнений (3) – (5) их решение можно представить в виде

$$E_{y,z}(y) = aE_{y,z}^{(1)}(y) + bE_{y,z}^{(2)}(y), \quad H'_x(y) = aH_x'^{(1)}(y) + bH_x''^{(2)}(y),$$

где $E_y^{(1)}(y)$, $E_z^{(1)}(y)$ – решение системы (3), (4) при $a = 1$, $b = 0$, $H_x^{(1)}(y)$ – результат подстановки этого решения в (5). Функции $E_y^{(2)}(y)$, $E_z^{(2)}(y)$, $H_x^{(2)}(y)$ имеют аналогичный смысл, но относятся к $a = 0$, $b = 1$. Для численного расчета функций $E_{y,z}^{(1),(2)}(y)$ может быть использован метод квадратур, сводящий (3), (4) к алгебраической системе за счет линейной интерполяции данных функций [2].

Волноводная задача для плазмонных мод формулируется из требования непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах раздела сред при условии представления компонент поля в окружающих металлическую пленку средах в виде экспонент. В результате

$$H_x^{(1)}(0) + H_x^{(2)}(0)(ba^{-1}) - c_2^{-1}[E_z^{(1)}(0) + E_z^{(2)}(0)(ba^{-1})] = 0, \quad (6)$$

$$ba^{-1} = [E_z^{(1)}(-d) - c_1 H_x^{(1)}(-d)][c_1 H_x^{(2)}(-d) - E_z^{(2)}(-d)]^{-1}, \quad (7)$$

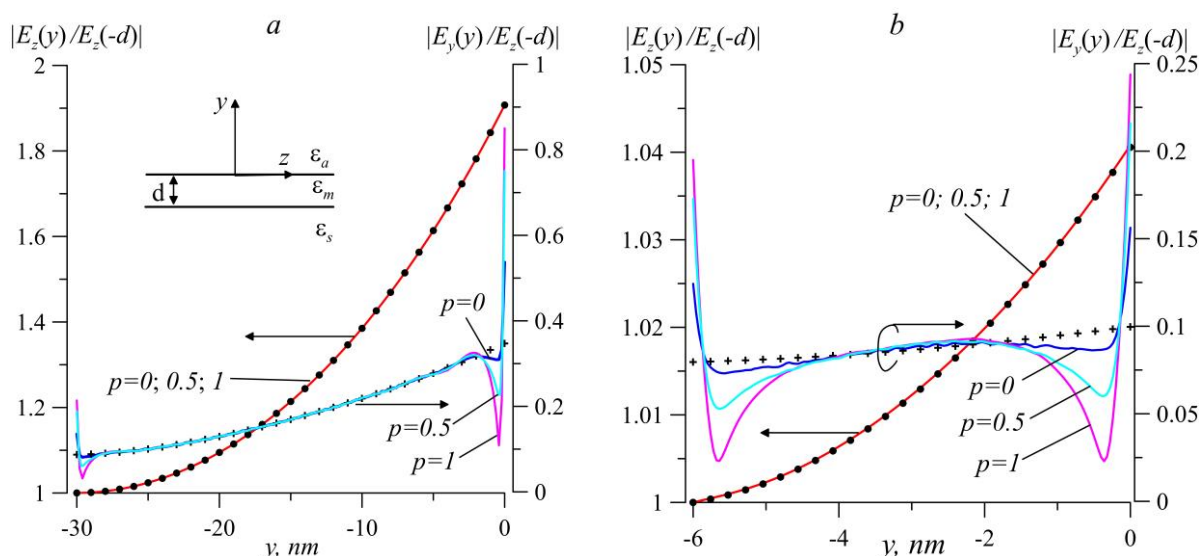
где $c_1 = \beta \varepsilon_s^{-1} \sqrt{\varepsilon_s - \beta^2}$, $c_2 = \beta \varepsilon_a^{-1} \sqrt{\varepsilon_a - \beta^2}$, ε_s и ε_a – диэлектрические проницаемости окружающих пленку сред (рисунок). Выражение (6) является дисперсионным уравнением относительно возможных значений β . Его численное решение может быть получено методом Ньютона. Выражение (7) дает возможность рассчитать нормированные распределения $E_z(y)E_z^{-1}(-d)$, $E_y(y)E_z^{-1}(-d)$ (см. ниже).

2. Характеристики плазмонных мод

Расчеты выполнены для золотых пленок на кварцевой подложке при $\lambda = 800 \text{ nm}$, $\varepsilon_s = 1.453^2$, $\varepsilon_m = (0.152 - i4.908)^2$, $\varepsilon_a = 1.0003^2$, $\tau = 27.1 \cdot 10^{-15} \text{ s}$, $v_0 = 0.00465 \text{ c}$, $p_1 = p_2 = p$. Таблица иллюстрирует внутреннюю сходимость решения при разбиении отрезка $[-d, 0]$ на n равных интервалов интерполяции. Незвестными являются значения функций $E_{y,z}^{(1),(2)}(y)$ в узлах интерполяции. Через β_0 обозначен результат ускорения сходимости для β по схеме Ричардсона [2], β_n – приближение нормального скин-эффекта.

Внутренняя сходимость метода квадратур при вычислении постоянной распространения плазмонной моды золотой пленки толщиной 30nm.

p	n	β	β_0	β_n
0	50	1.025706-i0.009099	-	1.025733-i0.009067
	100	1.025705-i0.009095	1.025705-i0.009094	
	150	1.025705-i0.009095	1.025705-i0.009093	
	200	1.025705-i0.009095	1.025705-i0.009093	
0.5	50	1.025658-i0.009102	-	
	100	1.025667-i0.009092	1.025667-i0.009090	
	150	1.025669-i0.009091	1.025670-i0.009090	
	200	1.025669-i0.009090	1.025670-i0.009090	
1	50	1.025626-i0.009052	-	
	100	1.025645-i0.009059	1.025650-i0.009061	
	150	1.025649-i0.009060	1.025651-i0.009061	
	200	1.025650-i0.009060	1.025651-i0.009061	



Распределения компонент электрического поля плазмонных мод в золотых пленках толщиной $d = 30$ nm (a) и $d = 6$ nm (b). Сплошные кривые – решение интегральных уравнений, дискретные значки – приближение нормального скин-эффекта. При $d = 6$ nm $\beta_n = 0.980062 - i0.089504$, $\beta = 0.979974 - i0.089543$ ($p = 0$), $\beta = 0.979900 - i0.089459$ ($p = 0.5$), $\beta = 0.979890 - i0.089407$ ($p = 1$)

Расчет полей плазмонных мод золотых пленок иллюстрирует рисунок.

Согласно представленным данным, характер рассеяния электронов на границах пленки слабо влияет на компоненты поля, параллельные данным границам (на рисунке распределения $|E_z(y)|$, найденные при различных p из интегральных уравнений и в приближении нормального скин-эффекта визуально неотличимы). Это объясняется большим модулем коэффициента α вида (2), из-за чего ядра уравнений (4), (5) малы. По этой же причине решения строгого дисперсионного уравнения (6) близки к β_n . Основное влияние аномальный скин-эффект оказывает на распределения компоненты электрического поля, нормальной границам пленки. Но как видно из рисунка, эти распределения существенно отличаются от результатов приближения нормального скин-эффекта только в непосредственной окрестности данных границ. Природа этой особенности обсуждалась в [2].

Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований РБ «1.15 Фотоника и электроника для инноваций» и гранта МО РБ № государственной регистрации 20230528.

Библиографические ссылки

1. Соколов А. В. Оптические свойства металлов. М. : ГИФМЛ, 1961.
2. Сотский А. Б. Эллипсометрия металлических пленок в условиях аномального скин-эффекта / А. Б. Сотский, Е. А. Чудаков, Л. И. Сотская // Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129, № 7. С. 889–898.
3. Tillin M. D., Sambles J. R. Plasmons on Ag and the Anomalous Skin Effect / // Journal of Modern Optics. 1991. Vol. 38, No 4. P. 731–741.