

# Генерация псевдослучайных чисел с $1/f$ спектральной плотностью мощности с помощью линейной суперпозиции методов формирования фрактальных изображений

Е. П. Микитчук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: [m.helenay@yandex.by](mailto:m.helenay@yandex.by)

В работе предлагается метод генерации псевдослучайных чисел с  $1/f$  спектральной плотностью мощности с помощью линейной суперпозиции методов формирования фрактальных изображений: случайного смещения центральных точек и масштабированного броуновского движения. Приводятся результаты моделирования последовательности случайных чисел, спектральная плотность которой во всем частотном диапазоне моделирования на трех декадах частоты обратно пропорциональна частоте.

**Ключевые слова:** метод масштабированного броуновского движения; метод случайного смещения центральных точек; фрактальные изображения; фликкер-шум.

## Generation of pseudorandom sequence of $1/f$ power spectrum density numbers based on linear superposition of fractal images formation

A. P. Mikitchuk

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: [m.helenay@yandex.by](mailto:m.helenay@yandex.by)

In this paper, we propose a method for generating pseudorandom numbers with  $1/f$  spectral power density using a linear superposition of methods for forming fractal images: random displacement of central points and scaled Brownian motion. The results of modeling a sequence of random numbers are presented, the spectral density of which is inversely proportional to the frequency in the entire frequency range of modeling for three decades of frequency.

**Keywords:** scaled Brownian motion; random midpoint displacement; fractal images; flicker noise.

### Введение

Фундаментальный фликкер-шум вблизи постоянной частоты преобразуется по частоте вверх и формирует особый тип собственного шума: шум, спектральное распределение энергии которого спадает от рабочей частоты радио-, СВЧ- и оптоэлектронного устройства обратно пропорционально отстройке [1]. Для учета и моделирования полного набора источников шума, а также механизмов их преобразования необходимы реализации алгоритмов генерации потоков псевдослучайных чисел со спектральной плотностью  $1/f^\alpha$ . Однако, с математической и вычислительной точки зрения задача построения таких программных генераторов является весьма сложной из-за того, что функция распределения для таких псевдослучайных чисел представляет собой расходящуюся интегральную функцию. На сегодняшний день известно несколько подходов к построению таких программных генераторов, причем традиционные подходы на основе фильтрации обеспечивают генерацию потоков случайных чисел, спектральная плотность мощности которых только на ограниченном интервале частот приближенно характеризуется спектральной плотностью  $1/f^\alpha$ . Весьма

перспективными методами являются фрактальные, в которых показатель степени спада спектральной плотности мощности определяются вариацией фрактальной размерности (характеризуется показателем экспоненты Хёрста) [2, 3]. Для построения двумерных случайных фракталов с 1970-х годов известны методы случайного смещения центральных точек и масштабированного броуновского движения [2, 3]. Эти же методы обобщены для генерации потоков псевдослучайных чисел со спектральной плотностью  $1/f^\alpha$ , однако дают несостоятельную оценку спектральной плотности мощности на низких частотах [3].

В данной работе предлагается метод генерации псевдослучайных чисел с  $1/f$  спектральной плотностью мощности с помощью линейной суперпозиции методов формирования фрактальных изображений: случайного смещения центральных точек и масштабированного броуновского движения.

## 1. Методы формирования фрактальных изображений

Спектральная плотность мощности координат самоподобных фрактальных структур обладает  $1/f^\alpha$  зависимостью, где  $f$  – отстройка от постоянной частоты,  $\alpha \approx 1$  [2, 3]. Методы формирования фрактальных изображений можно разделить на две большие группы: основанные на добавлении узлов внутри и вне некоторой поверхности в пространстве. К первой группе относится метод случайного смещения центральных точек, а ко второй – метод масштабированного броуновского движения. В наиболее простом случае иллюстрацию построения фрактального изображения можно показать в одномерном случае, причем все закономерности сохраняются и для многомерных фрактальных изображений. Более того, проекции построенных таким образом фрактальных изображений на единственную ось, а также их сечения в двумерном пространстве также обладают  $1/f^\alpha$  спектральной плотностью мощности. По этой причине для генерации псевдослучайных чисел с  $1/f$  спектральной плотностью мощности применимо современное аппаратное обеспечение, в частности неспециализированные вычисления на графических процессорах типа Cuda или OpenGL.

На рис. 1 иллюстрируются принципы построения одномерных фрактальных изображений: метод случайного смещения центральных точек фрактала и метод масштабированного броуновского движения. Суть метода случайного смещения центральных точек сводится к использованию случайных уточнений положения центральных точек некоторой поверхности (в иллюстрируемом случае – одномерной кривой).

1) Устанавливаются конечные точки с координатами  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ .

2) На каждом текущем уровне уточнения  $i$  интервал между двумя точками  $j$  и  $j + 1$  с координатами  $(x_j, y_j)$  и  $(x_{j+1}, y_{j+1})$  разделяется наполовину  $x_{mid} = (x_j + x_{j+1})/2$  и  $y_{mid} = (y_j + y_{j+1})/2$ .

3) Координаты центров  $y_{mid}$  на каждом текущем уровне уточнения  $i$  случайно смещаются с нормальным законом распределения на величину  $h^{(i)}$ , причем среднеквадратичное отклонение определяется из фрактальной размерности, следовательно, и экспоненты Хёрста и степени  $\alpha$  следующим образом:

$$\sigma_i = 2^{-(\alpha-1)i/4} \sigma_0 \quad (1)$$

4) Последовательно разбивать все отрезки и повторять их случайное смещение в соответствии с вышеописанными пунктами 2 – 3.

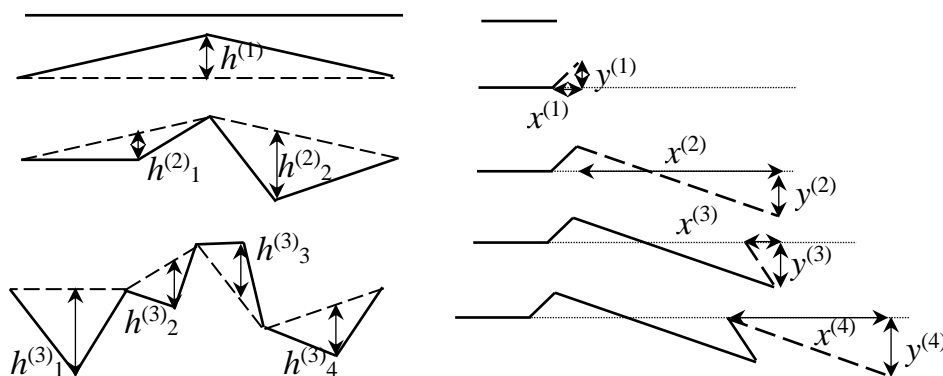


Рис. 1. Принципы построения одномерных фрактальных изображений: слева – метод случайного смещения центральных точек фрактала, справа – метод масштабированного броуновского движения

При масштабированном броуновском движении среднеквадратичное смещение некоторой частицы зависит от времени не линейно, а по степенному закону, то есть частица может перемещаться на большие расстояния за короткие промежутки времени, а затем на малые расстояния за длительные промежутки времени [2]. Такое движение также характеризуется фрактальной размерностью, и, как следствие, параметром Хёрста  $H$ , который показывает степень отклонения от линейности. При использовании метода масштабированного броуновского движения производится наращивание фрактала. 1. Формируется сетка случайных координат  $x^{(i)}$ , последовательные значения которых отличаются друг от друга на случайную стандартную нормальную величину. 2. Координаты  $y^{(i)}$  для нелинейной диффузии, которая имитируется при масштабированном броуновском движении, рассчитываются как:

$$y^{(i)} = \begin{cases} \{x^{(i)}\}^{-\alpha/4}, & x^{(i)} > 0 \\ 0, & x^{(i)} = 0 \\ -\{x^{(i)}\}^{-\alpha/4}, & x^{(i)} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Оба метода формирования фрактальных изображений аналогично реализуются и для многомерных изображений, сечения и проекции которых, как отмечалось выше, также обладают  $1/f^\alpha$  спектральной плотностью мощности.

## 2. Суперпозиция методов формирования фрактальных изображений

На рис. 2 приведена спектральная плотность мощности массива случайных чисел, сгенерированного с помощью: метода случайного смещения центральных точек фрактала, метода масштабированного броуновского движения, а также их линейной суперпозиции в сравнении с идеальным случаем. Видно, что использование метода случайного смещения центральных точек формируется реализация случайных

чисел, спектральная плотность мощности которой близка к  $1/f$ , только в двух последних из трех реализованных декад частоты. При исследовании реализации ансамбля случайных чисел, полученных с помощью масштабированного броуновского движения, спектральная плотность мощности которой близка к  $1/f$  на первой из трех реализованных декад частоты, а затем спадает пропорционально  $1/f^2$ . Таким образом, оказывается возможно подобрать линейную суперпозицию из двух независимых ансамблей случайных чисел, сгенерированных различными методами, с  $1/f$  спектральной плотностью мощности.

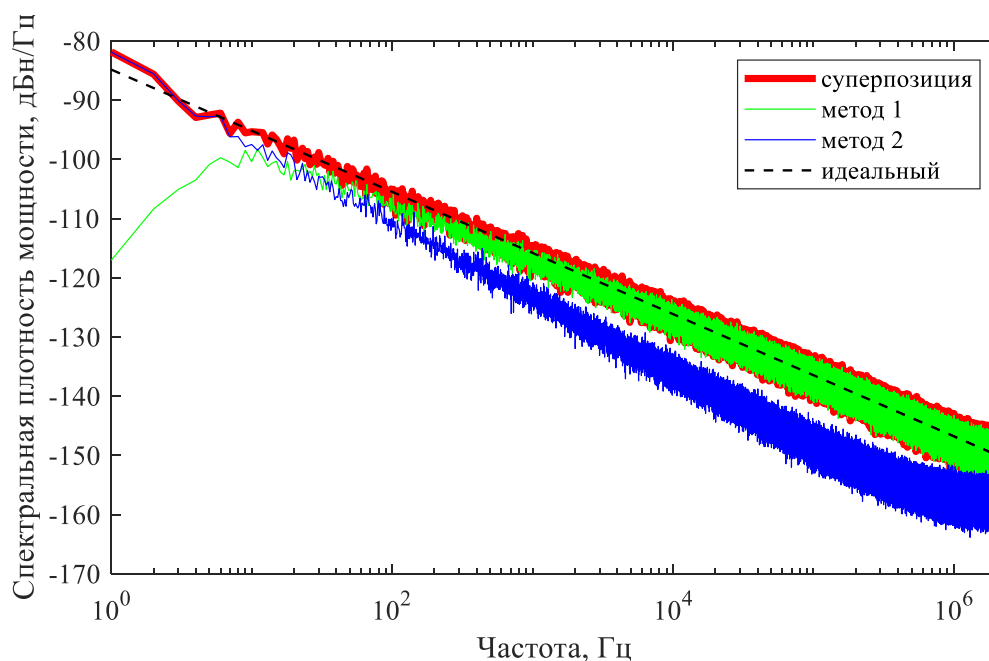


Рис. 2. Спектральная плотность мощности массива случайных чисел, сгенерированного с помощью: 1 – метод случайного смещения центральных точек фрактала, 2 – метод масштабированного броуновского движения

## Заключение

В работе показано, что возможно подобрать линейную суперпозицию из двух независимых ансамблей случайных чисел, сгенерированных различными методами, с  $1/f$  спектральной плотностью мощности. При этом для генерации псевдослучайных чисел с  $1/f$  спектральной плотностью мощности применимо современное аппаратное обеспечение для генерации фрактальных изображений, в частности, неспециализированные вычисления на графических процессорах.

## Библиографические ссылки

1. Rubiola E. Phase noise and frequency stability in oscillators. New York, USA: Cambridge Univ. Press, 2008.
2. Plaszczynski S. Generating long streams of  $1/f$  noise // Fluctuation and noise letters. 2007. Vol. 7, iss. 1. P. R1–R13.
3. Shuo Huang; Xiang-Xin Li. Improved random midpoint-displacement method for natural terrain simulation // 2010 Third International Conference on Information and Computing, Wuxi (China), 4–6 June 2010 / ISSN 2160-7443, IEEE, 2011. P. 255–258.