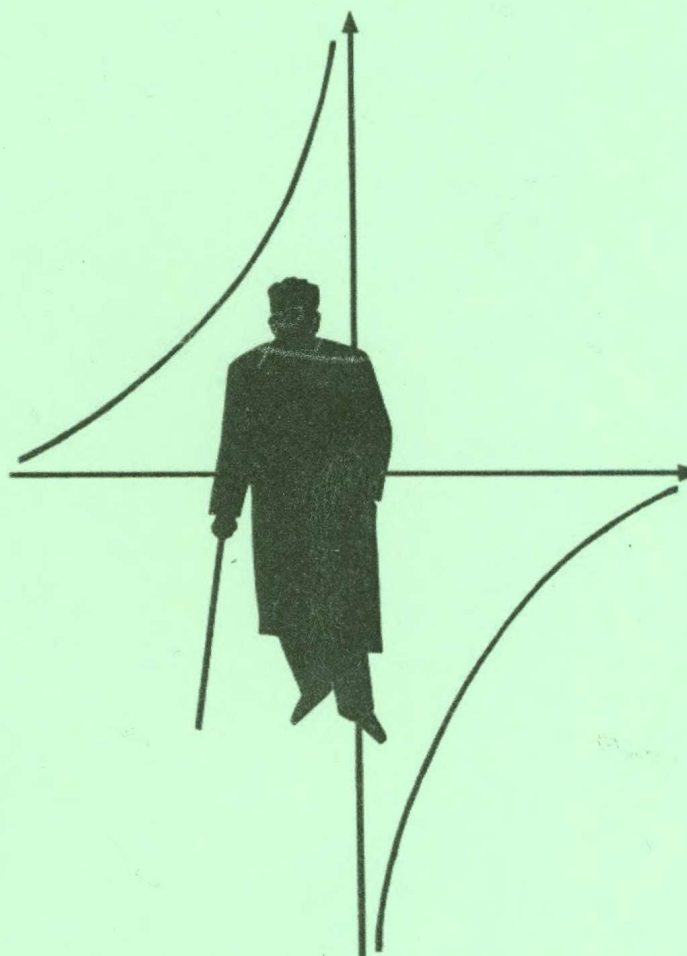
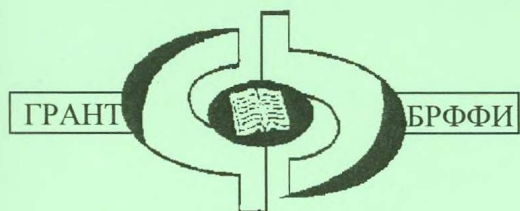




**XXI Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям
(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2023)**

Материалы конференции

Часть 1

Могилев 2023

К МЕТОДАМ КОРРЕКТИРОВКИ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Л.А Пилипчук

Обратная задача оптимизации с нормой l_p состоит в том, чтобы определить вектор стоимости $\tilde{c}$ такой, что выбранный вектор x_0 является оптимальным решением $P(\tilde{c}) = \min\{\tilde{c}x : x \in Z\}$. Другими словами, необходимо заменить вектор стоимости c на вектор $\tilde{c}$ так, чтобы x_0 являлся оптимальным решением относительно возмущенного вектора стоимости $\tilde{c}$, а стоимость возмущения при этом была бы минимальна.

Рассмотрим линейную задачу сетевой оптимизации однородного потока в обобщенной сети с вложенной сетевой структурой ограничений и преобразованием дуговых потоков

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in I^*} c_i x_i \longrightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = x_i, i \in I^*, \quad \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \mu_{ji}x_{ji} = a_i, i \in I \setminus I^*, \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^p x_i = \alpha_p, p = \overline{1, l}, \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, (i, j) \in U, \quad b_{*i} \leq x_i \leq b_i^*, i \in I^*, \quad (4)$$

где $G = (I, U)$ – связный конечный ориентированный граф, I^* – множество узлов с неизвестным внешним потоком $x_i, i \in I^*, x = (x_{ij}, (i, j) \in U; x_i, i \in I^*)$ – вектор дуговых и внешних потоков графа G , $c_{ij}, c_i, \mu_{ij}, a_i, \lambda_{ij}^p, \lambda_i^p, \alpha_p, d_{ij}, b_{*i}, b_i^*$ – известные параметры задачи (1) – (4), $I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}, I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$. Параметры линейной целевой функции (1) являются неточными данными.

Вектор $x = (x_{ij}, (i, j) \in U; x_i, i \in I^*)$ – допустимое решение экстремальной задачи (1) – (4) (выполняются ограничения (2) – (4)), $x \in Z$.

Математическая модель двойственной задачи к (1) – (4) имеет вид:

$$\sum_{i \in I \setminus I^*} a_i y_i + \sum_{p=1}^l \alpha_p r_p + \sum_{i \in I^*} b_{*i} w_i - \sum_{i \in I^*} b_i^* t_i - \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} v_{ij} \longrightarrow \max, \quad (5)$$

$$y_i - \mu_{ij} y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} \leq c_{ij}, \quad v_{ij} \geq 0, (i, j) \in U, \quad (6)$$

$$-y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_i^p r_p + w_i - t_i = c_i, \quad w_i \geq 0, t_i \geq 0, I^*, \quad (7)$$

вектор $\lambda = (y, r, w, t, v)$ – допустимое решение двойственной задачи (выполняются ограничения (6) – (7)), $\lambda \in \Lambda$ состоит из векторов $y = (y_i, i \in I), r = (r_p, p = \overline{1, l}), w = (w_i, i \in I^*), t = (t_i, i \in I^*), v = (v_{ij}, (i, j) \in U)$.

Теорема 1. Пусть $x^0 = (x_{ij}^0, (i, j) \in U; x_i^0, i \in I^*)$ – некоторое известное допустимое решение задачи (1) – (4), $x^0 \in Z$ и $\lambda = (y, r, w, t, v)$ – допустимое решение

двойственной задачи (5) – (7), $\lambda \in \Lambda$. Если для некоторого допустимого решения $\lambda = (y, r, w, t, v)$, $\lambda \in \Lambda$ двойственной задачи (5) – (7) выполняются условия: $(y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} - c_{ij})x_{ij}^0 = 0, (i, j) \in U$; $(d_{ij} - x_{ij}^0)v_{ij} = 0, (i, j) \in U$; $(x_i^0 - b_{*i})w_i = 0, i \in I^*$; $(b_i^* - x_i^0)t_i = 0, i \in I^*$, то известное допустимое решение x^0 является оптимальным решением задачи (1) – (4).

Пусть известно одно из допустимых решений x^0 задачи (1) – (4), $x^0 \in Z$. Требуется минимально изменить коэффициенты целевой функции (1), чтобы выбранное допустимое решение x^0 стало оптимальным. Для корректировки параметров линейной целевой функции (1) применим принципы обратной оптимизации [1] – [2]. Обозначим через γ_{ij} , β_{ij} соответственно увеличение и уменьшение параметра c_{ij} , $(i, j) \in U$ и γ_i , β_i соответственно увеличение и уменьшение параметра c_i , $i \in I^*$ целевой функции (1). При этом, γ_{ij} и β_{ij} не могут одновременно принимать положительные значения: $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $\gamma_{ij}\beta_{ij} = 0$, $(i, j) \in U$. Кроме этого, положим $\tilde{c}_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, при этом, γ_i и β_i одновременно не могут принимать положительные значения: $\tilde{c}_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $i \in I^*$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i\beta_i = 0$, $i \in I^*$.

Найти такие коэффициенты $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}, (i, j) \in U; \tilde{c}_i, i \in I^*)$ для которых известное допустимое решение $x^0 \in Z$ является оптимальным решением экстремальной задачи с целевой функцией: $f(x^0) = \sum_{(i,j) \in U} \tilde{c}_{ij}x_{ij}^0 + \sum_{i \in I^*} \tilde{c}_ix_i^0 \rightarrow \min$, и ограничениями (2) – (4).

Построим математическую модель процесса корректировки параметров линейной целевой функции (1). Мера близости векторов c и $\tilde{c}$ оценивается с помощью нормы $l_p, p = 1$, что позволяет оставаться в рамках линейного программирования. Общая корректировка параметров целевой функции является минимальной в соответствии с нормой l_1 :

$$l_1 = \sum_{(i,j) \in U} |\tilde{c}_{ij} - c_{ij}| + \sum_{i \in I^*} |\tilde{c}_i - c_i| = \sum_{(i,j) \in U} |\gamma_{ij} - \beta_{ij}| + \sum_{i \in I^*} |\gamma_i - \beta_i| = \sum_{(i,j) \in U} (\gamma_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i \in I^*} (\gamma_i + \beta_i).$$

В зависимости от численных значений допустимого решения x^0 задачи (1) – (4) на основании теоремы 1 сформируем множества: $B_1 = \{(i, j) \in U : x_{ij}^0 = 0\}$, $B_2 = \{(i, j) \in U : x_{ij}^0 = d_{ij}\}$, $B_3 = \{(i, j) \in U : 0 < x_{ij}^0 < d_{ij}\}$, $R_1 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_{*i}\}$, $R_2 = \{i \in I^* : x_i^0 = b_i^*\}$, $R_3 = \{i \in I^* : b_{*i} < x_i^0 < b_i^*\}$.

Обратная задача для определения минимальных изменений $\gamma = (\gamma_{ij}, (i, j) \in U; \gamma_i, i \in I^*)$, $\beta = (\beta_{ij}, (i, j) \in U; \beta_i, i \in I^*)$ параметров стоимости с линейной целевой функции (1) и нахождения возмущенного вектора $\tilde{c}$ такого, что x_0 является оптимальным решением и стоимость возмущения при этом минимальна, имеет вид:

$$q(\gamma, \beta) = l_1 = \sum_{(i,j) \in U} (\gamma_{ij} + \beta_{ij}) + \sum_{i \in I^*} (\gamma_i + \beta_i) \rightarrow \min,$$

$y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p \leq c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in B_1$; $y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p - v_{ij} = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $v_{ij} \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $(i, j) \in B_2$; $y_i - \mu_{ij}y_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p = c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij}$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in B_3$; $y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p + w_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $w_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_1$; $y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p - t_i = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $t_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_2$; $-y_i + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p = c_i + \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i \in R_3$.

Выбранное допустимое решение $x^0 \in Z$ задачи (1) – (4) является оптимальным решением экстремальной задачи сетевой оптимизации с целевой функцией

$$\sum_{(i,j) \in U} (c_{ij} + \gamma_{ij} - \beta_{ij})x_{ij} + \sum_{i \in I^*} (c_i + \gamma_i - \beta_i)x_i \longrightarrow \min$$

и ограничениями (2) – (4).

Литература

1. Ahuja R.K., Orlin J.B. *Inverse Optimization* // Operations Research. 2001. Vol. 49. No. 5. P. 771 – 783.
2. Pilipchuk L. A., Pilipchuk A. S. *Modeling parameters of the lower and upper bounds and parameters of the objective function for generalized network flow programming problems* // American Institute of Physics, AIP Conf. Proc.. 2015. Vol. 1690. 060007. doi: 10.1063/1.4936745, – 10 p.