

ЛУЧИСТАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТЕЛАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В.А. Кот

*Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси,
ул. П. Бровки 15, Минск 220072, Беларусь, valery.kot@hmti.ac.by*

Рассмотрено уравнение радиационной гидродинамики, когда внутренняя энергия и непрозрачность имеют степенные зависимости от плотности и температуры. Получены высокоточные автомодельные решения при степенном и экспоненциальном законах изменении во времени температуры поверхности. Предложен новый подход к приближенному решению задачи, когда для непрозрачности по Росселанду K имеем $K = K(T_0)(T/T_0)^{-n}$, где n – показатель степени, задающий характер поглощения телом излучения. Метод основан на преобразовании исходного уравнения $\partial T / \partial t = \chi \partial T^{n+4} / \partial x^2$, где $\chi = 16\sigma T_0^3 / (3(n+4)K(T_0)\rho^2 C_v)$. При степенном законе уравнение преобразуется в следующее: $d^2 \theta^{n+4} / d\eta^2 + (1+k(n+3))\eta d\theta / d\eta - 2k\theta = 0$, где $T = T_0(t/t_0)^k \theta(\eta)$, $\eta = x / \sqrt{2\chi T_0^n t^{(n+3)k}}$. Решение задачи представлено в виде $\theta = (1+a\zeta)(1-\zeta)^{\frac{1}{n+3}}$, где $\zeta = \eta/\eta_0$. Ошибка аналитического решения по сравнению с численным составляет сотые доли процента.

Ключевые слова: лучистая теплопроводность; радиационное излучение; фронт проникновения.

RADIATIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF BODIES WITH TIME-VARIABLE SURFACE TEMPERATURE

V.A. Kot

*A.V. Luikov Institute of Heat and Mass Transfer, National Academy of Sciences of Belarus,
15 P. Brovka Str., 220072 Minsk, Belarus, valery.kot@hmti.ac.by*

The equation for the radiative flow dynamics of a solid body, the dependences of whose internal energy and opacity on its density and temperature are defined by power functions, was considered. The high-accuracy self-similar solutions have been obtained for the radiation wave generated in the body by the laser radiation in the cases where the surface temperature of the body changes by the power or exponential laws. A new approach to the approximate solution of the equation for the radiative thermal conductivity of a body with a Rosseland opacity K_R characterized by the power dependence on the temperature $K_R = K_R(T_0)(T/T_0)^{-n}$, where n is the component determining the character of absorption of radiation by the body, has been proposed. The method developed is based on the transformation of the initial equation for the radiative thermal conductivity of a body $\partial T / \partial t = \chi \partial T^{n+4} / \partial x^2$, where $\chi = 16\sigma T_0^3 / [3(n+4)K(T_0)\rho^2 C_v]$ is the coefficient characterizing the heat flow in the body. In particular, in the case where the surface temperature of the body changes by the power law, this equation is transformed into the differential equation $d^2 \theta^{n+4} / d\eta^2 + (1+k(n+3))\eta d\theta / d\eta - 2k\theta = 0$, where $T = T_0(t/t_0)^k \theta(\eta)$, $\eta = x / \sqrt{2\chi T_0^n t^{(n+3)k}}$. The solution of the problem was sought for in the form of the polynomial $\theta = (1+a\zeta)(1-\zeta)^{\frac{1}{n+3}}$, где $\zeta = \eta/\eta_0$. The coefficient a was determined with the use of the relation $dV(1)/d\zeta = -(n+3)(n+4)^{-1}(1+k(n+3))\eta_0^2$, and then the integral relation $2(1+k(n+4))\int_0^1 \theta \zeta d\zeta = \eta_0^{-2}$ was used. The solutions of the problem with high approximation accuracies have been obtained. The errors of the calculations performed for the two variants of the law of change in the surface temperature of the body, as compared to those of the numerical solutions, comprised hundredths of a percent.

Keywords: radiative thermal conductivity; radiative emission; penetration front.

Введение

Радиационные тепловые волны играют важную роль в физике плазмы и, в частности, в термоядерном синтезе с инерционным удержанием (ICF). В экспериментах с непрямым возбуждением ICF лазерные лучи освещают внутреннюю стенку резонатора с высоким Z , который предназначен для преобразования энергии лазера в рентгеновское излучение. Классическим примером нелинейной диффузии излучения является волна Маршака, впервые рассмотренная в 1958 году [1]. Решения подобного типа представляют несомненный интерес для ICF [2]. Тепловая волна, будучи автомодельной, рассматривается в приближении диффузии в материал с постоянной удельной теплоемкостью и со средней непрозрачностью по Росселанду, как степенной функции от температуры. Гидродинамическое движение не учитывается. Достаточно подробное обсуждение данной проблемы дано Михаласом [3]. Автомодельные решения получены в работах [4-6], когда в пределе твердую стенку можно считать бесконечно плотной [7]; при этом найдено разумное согласие с экспериментальными результатами [8]. Хаммер и Розен [5] предложили решения, основанные на разложении по малому параметру $\varepsilon = \beta/(4+\alpha)$, когда внутренняя энергия изменяется как T^β , а непрозрачность по Росселанду K_R – как $T^{-\alpha}$. Смит [9] получил автомодельные решения без учета нагретой поверхности с наложением далее граничного условия.

Постановка и решение задачи

Пусть при $t > 0$ на поверхность пластины ($x = 0$) падает излучение, в результате чего температура поверхности изменяется по степенному либо экспоненциальному законам:

$$T(0, t) = T_0 (t/t_0)^k, \quad (1)$$

$$T(0, t) = T_0 \exp(2kt/t_0). \quad (2)$$

Примем постоянными плотность материала ρ и удельную теплоемкость c_v . Задача состоит в расчете высокоэнергетической сверхзвуковой волны, проникающей в тело с одновременным определением положения подвижного фронта.

Для теплового потока F в любой локальной точке имеем [10]

$$F = -\frac{16\sigma T^3}{3k_R(T_0)\rho} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (3)$$

Представим непрозрачность по Росселанду функцией $k_R = k_R(T_0)(T/T_0)^{-n}$. В частности, показатель степени $n = 0$ описывает рассеяние электронов, а $n = 3$ – случаи связанно-свободного либо свободно-свободного поглощения [10]. Подстановка формулы для непрозрачности в (3) дает выражение для теплового потока

$$F = -\frac{16\sigma}{3(n+4)T_0^n k_R(T_0)\rho} \frac{\partial T^{n+4}}{\partial x}. \quad (4)$$

Отсюда получаем уравнение лучистой теплопроводности (диффузии излучения)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{16\sigma}{3(n+4)T_0^n k_R(T_0)\rho} \right) \frac{\partial T^{n+4}}{\partial x} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T^{n+4}}{\partial x^2}, \quad (x > 0), \end{aligned}$$

где параметр χ описывает лучистую теплопроводность и задается выражением

$$\chi = \frac{16\sigma T_0^3}{3(n+4)k_R(T_0)\rho^2 c_v}. \quad (5)$$

Для решения поставленной задачи запишем искомую функции при степенном законе (1) в виде

$$T(x, t) = T_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^k \theta(\eta) \quad (6)$$

где безразмерный автомодельный параметр η задается соотношением:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{2\chi T_0^n t^{(n+3)k}}}. \quad (7)$$

Для экспоненциального закона изменения температуры поверхности, согласно (2), получаем:

$$T(x, t) = T_0 e^{2kt} \theta(\eta), \quad (8)$$

$$\eta = x e^{2(n+3)kt}. \quad (9)$$

Подстановка (6)-(9) в исходное дифференциальное уравнение дает, соответственно, дифференциальные уравнения для одной независимой переменной:

$$\frac{d^2 \theta^{n+4}}{d\eta^2} + (1+k(n+3))\eta \frac{d\theta}{d\eta} - 2k\theta = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \theta^{n+4}}{d\eta^2} + (n+3)\eta \frac{d\theta}{d\eta} - 2\theta = 0. \quad (11)$$

Умножим дифференциальные уравнения (10) и (11) на η и проинтегрируем по частям по области $\eta = [0, \eta_0]$. Для параметра $\eta = \eta_0$ имеем $V(\eta_0) = 0$. В итоге приходим к следующим интегральным соотношениям, соответственно для степенного и экспоненциального законов изменения температуры поверхности:

$$\int_0^1 \theta(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{1}{2(1+k(n+4))\eta_0^2}, \quad (12)$$

$$\int_0^1 \theta(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{1}{2(4+n)\eta_0^2}, \quad \zeta = \frac{\eta}{\eta_0}. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $V = \theta^{n+3}$. Для нее уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{1+k(n+3)}{n+4} \eta \frac{dV}{d\eta} + \frac{1}{n+3} \left(\frac{dV}{d\eta} \right)^2 + V \frac{d^2 V}{d\eta^2} - 2k \frac{n+3}{n+4} V = 0. \quad (14)$$

Уравнение (11) в этом случае преобразуется следующим образом:

$$\frac{n+3}{n+4} \eta \frac{dV}{d\eta} + \frac{1}{3+n} \left(\frac{dV}{d\eta} \right)^2 + V \frac{d^2 V}{d\eta^2} - 2 \frac{n+3}{n+4} V = 0. \quad (15)$$

Применив уравнение (12) для точки $\eta = \eta_0$ ($\zeta = 1$), получаем граничное соотношение

$$\frac{dV(1)}{d\zeta} = - \frac{n+3}{n+4} (1+k(n+3)) \eta_0^2. \quad (16)$$

Точно таким образом поступаем для уравнения (13). В итоге получаем

$$\frac{dV(1)}{d\zeta} = - \frac{(n+3)^2}{n+4} \eta_0^2. \quad (17)$$

Последовательно дифференцируя (12) и (13) с последующим их применением в точке $\eta = \eta_0$, мы можем получить сколь угодно много дополнительных граничных соотношений. Однако в данном случае мы ограничимся первым приближением, которое основано на использовании дополнительных граничных соотношений вида (14) и (15).

Искомую функцию опишем в виде простого полинома

$$\theta = (1+a\zeta)(1-\zeta)^{\frac{1}{n+3}}. \quad (18)$$

Из (18) и (16) находим коэффициент

$$a = \left[\frac{(n+3)(1+k(n+3))s^2}{4+n} \right]^{\frac{1}{3+n}} - 1. \quad (19)$$

Применив (18), (19) и (12), приходим к алгебраическому уравнению для η_0

$$\left[\frac{3+n}{4+n} (1+k(n+3)) \eta_0^2 \right]^{\frac{1}{3+n}} + \frac{10+3n}{2(n+3)} \left[1 - \frac{(n+7)(2n+7)}{2(n+3)^2 (1+k(n+4)) \eta_0^2} \right] = 1.$$

Аналогично можно получить уравнение для η_0 при экспоненциальном законе изменения температуры поверхности.

Некоторые результаты расчета на основе (16), (18) и численного решения представлены на рис. 1 и 2. Графики кривых для функций $V(\eta)$ и $\theta(\eta)$, отвечающих аналитическому описанию функции (18) с граничным условием (1), полностью совпадают с численным решением.

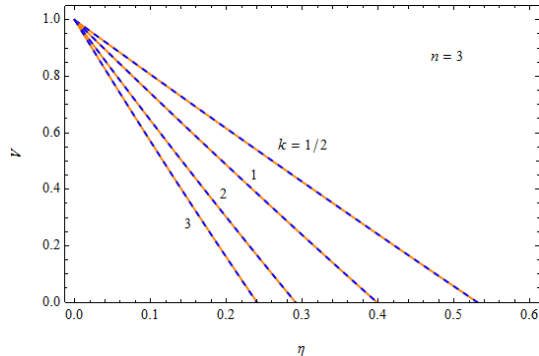


Рис. 1. Графики функции $V(\eta)$ на основе численного (сплошная линия) и аналитического (пунктирная линия) решений

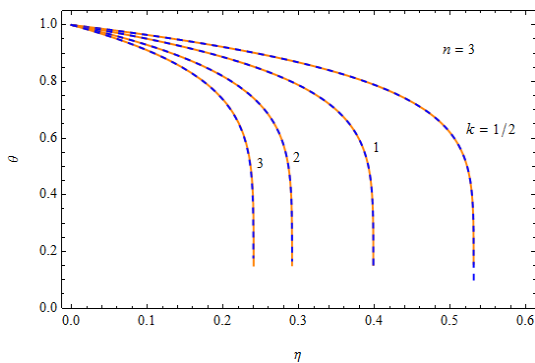


Рис. 2. Графики функции $\theta(\eta)$ на основе численного (сплошная линия) и аналитического (пунктирная линия) решений

Заключение

На основе преобразования модели лучистой теплопроводности получено нелинейное дифференциальное уравнение при изменении температуры поверхности по степенному либо экспоненциальному за-

кону. Получены интегральные и дифференциальные соотношения, позволяющие определить фронт тепловой волны, проникающей в тело. Задача сведена к обыкновенному алгебраическому уравнению относительно параметра η_0 , задающего положение фронта и температурный профиль. Ошибка в определении положения фронта тепловой волны в первом приближении составила сотые доли процента.

Библиографические ссылки

1. Marshak R.E. Effect of Radiation on Shock Wave Behavior. *Physics of Fluids* 1958; 1(1): 24-29.
2. Brun L., Dautray R., Delobbeau F., Patou C., Perrot F., Reisse J.-M., Sitt B., Watteau J.-P. Laser Interaction and Related Plasma Phenomena, edited by H.J. Schwartz and H. Hora Plenum, New York; 1977; 4: 1059-1080. Smith C.C. Solutions of the radiation diffusion equation. *High Energy Density Physics* 2010; 6: 48-56.
3. Mihalas D. Foundation of Radiation Hydrodynamics, New York, Oxford: Oxford University Press; 1984. 718 p.
4. Heaslet M.A., Alksne A. Diffusion from a Fixed Surface with a Concentration-dependent Coefficient // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 1961; 9(4): 584-596.
5. Hammer J.H., Rosen M. D.A. Consistent Approach to Solving the Radiation Diffusion Equation. *Physics of Plasmas* 2003; 10(5): 1829-1845.
6. Sanmartin J.R., Barrero A. Self-similar motion of laser half-space plasmas. *Physics of Fluids* 1978; 21 (11): 1957-1966.
7. Sanz J., Piriz A.R., Tomasel F.G., Self-similar model for tamped ablation driven by thermal radiation *Physics of Fluids* 1992; 4(3): 683-692.
8. Sigel R., Pakula R., Sakabe S., Tsakiris G.D. X-ray generation in a cavity heated by laser light. III. Comparison of the experimental results with theoretical predictions for x-ray confinement. *Physical Review A* 1988; 38(11): 5779-5785.
9. Smith C.C. Solutions of the radiation diffusion equation. *High Energy Density Physics* 2010; 6: 48-10.
10. Castor J.I. Radiation Hydrodynamics. U.S. Department of Energy by University of California: Lawrence Livermore National Laboratory; 2003.