

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_____ О. Ч. Дрохоренко

(подпись)

(И.О.Фамилия)

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12143/уч.

**Дифференциальные уравнения в частных производных
и их приложения**
(название учебной дисциплины)

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:**

1-31 03 04 Информатика

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 04-2021, типового учебного плана G 31-1-029/пр-тип от 30.06.2021, учебных планов: № G 31-1-031/уч. от 30.06.2021, № G 31-1-213/уч от 22.03.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

И. С. Козловская, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Чичурин А. В. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина;

В. И. Корзюк - академик НАН Беларуси, заведующий лабораторией математической физики института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой компьютерных технологий и систем Белорусского государственного университета (протокол № 14 от 23.05.2023 г.)

Научно-методическим советом БГУ¹
(протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Заведующий кафедрой
компьютерных технологий и
систем



В. В. Казаченок

¹ Учебные программы обучения по факультативным дисциплинам могут быть рекомендованы к утверждению Советом факультета или учебно-методической комиссией факультета, или общеуниверситетской кафедрой.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Круг вопросов, относящихся к дифференциальным уравнениям с частными производными и их приложениям, чрезвычайно широк. Возникающие при этом математические задачи содержат много общих элементов и составляют предмет дифференциальных уравнений с частными производными. Метод исследования, характеризующий эту отрасль науки, является математическим по своему существу, и хотя постановка задач для дифференциальных уравнений с частными производными, будучи тесно связанной с изучением физических явлений является важной составляющей общего математического образования. Многие задачи приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. Программа учебной дисциплины ограничена изложением аналитических методов решения задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка на примере классических уравнений теплопроводности, колебаний струны, Лапласа и других уравнений.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» – получение студентами навыков математического моделирования физических процессов с использованием уравнений в частных производных.

Образовательная цель: формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, изучение алгоритмов исследования разрешимости прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины:

1. Освоение методов решения и исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными;
2. Математическое моделирование естественнонаучных процессов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» относится **к модулю** «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения образования.

Содержание учебного материала учебной программы тесно связано с содержанием ряда учебных дисциплин, которые изучались на младших курсах, в том числе «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Основы высшей алгебры», «Математическое моделирование»

Связи с другими учебными дисциплинами: учебная дисциплина «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» тесно связан с такими дисциплинами как: «Функциональный анализ», «Численные методы».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций:

универсальные компетенции:

УК-1 Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации,

УК-2 Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий,

УК-5 Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности

базовые профессиональные компетенции:

БПК-1 Решать математические задачи и строить логические цепочки утверждений.

БПК-2 Применять основы дифференциального и интегрального исчисления, демонстрировать способность применения математического анализа к исследованию алгоритмов

БПК-9 Применять базовые принципы построения математических моделей и выполнять их анализ в типовых задачах организационного управления и естественно-интеллектуальной активности человека, использовать системы искусственного интеллекта на практике,

специализированные компетенции:

СК-2 Решать уравнения в частных производных и выполнять их исследование в различных приложениях, интерпретировать полученные решения при исследовании естественно-научных процессов

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- классификацию и методы приведения к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными;

- методы решения и обоснования корректности задачи Коши для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности;

- постановку и методы решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типа;

- постановку и методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа;

уметь:

- приводить к каноническому виду уравнения второго порядка;

- решать задачу Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;

- решать смешанные задачи для уравнений колебания струны и теплопроводности;

- решать краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона.

владеть:

- методами математического моделирования;

- основными методами исследования Задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными;

- основными методами исследования граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными;

- навыками самообразования и способами использования аппарата дифференциальных уравнений с частными производными для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 6 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» отведено 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

Тема 1.1. Основные понятия об уравнениях с частными производными и системах уравнений. Уравнение характеристик. Классификация уравнений с частными производными второго порядка. Гиперболические, параболические и эллиптические уравнения.

Тема 1.2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными.

Тема 1.3. Общее решение уравнений с частными производными.

Раздел 2. Математическое моделирование

Тема 2.1 Принципы математического моделирования. Дифференциальные модели. Вывод уравнения колебания струны. Постановка краевых задач для волнового уравнения.

Тема 2.2 Вывод уравнения теплопроводности. Постановка краевых задач для тепловых процессов.

Тема 2.3 Стационарные уравнения. Уравнение Пуассона и Лапласа. Краевые задачи Дирихле и Неймана. Корректная постановка краевых задач. Вычислительный эксперимент. Методы информатики, автоматизация научных исследований.

Раздел 3. Гиперболические уравнения

Тема 3.1 Метод характеристик. Формула Даламбера для решения задачи Коши для волнового уравнения. Корректность задачи Коши. Краевая задача Гурса с данными на характеристиках.

Тема 3.2 Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных чисел.

Тема 3.3 Метод разделения переменных для решения начально-краевых (смешанных) задач для уравнений гиперболического типа.

Тема 3.4 Обоснование метода. Теоремы единственности для смешанных задач.

Раздел 4. Параболические уравнения

Тема 4.1 Метод разделения переменных для решения смешанных задач для уравнения параболического типа.

Тема 4.2 Принцип максимума, теоремы единственности и устойчивости.

Тема 4.3 Метод интегральных преобразований.

Тема 4.4 Интеграл Пуассона для решения задачи Коши.

Раздел 5. Эллиптические уравнения

Тема 5.1 Уравнение Лапласа. Гармонические функции, их свойства. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа.

Тема 5.2 Объемный и поверхностный потенциалы.

Тема 5.3 Формулы Грина для гармонических функций. Функция Грина. Принцип максимума для гармонических функций, корректность краевых задач для уравнения Пуассона.

Тема 5.4 Метод разделения переменных для решения задачи Дирихле в круге. Формула Пуассона. Интегральные уравнения для краевых задач.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма кон- троля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение	6			4		2	
1.1	Основные понятия об уравнениях с частными производными и системах уравнений. Уравнение характеристик. Классификация уравнений с частными производными второго порядка. Гиперболические, параболические и эллиптические уравнения.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
1.2	Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными.	2					2	проверка отчета по самостоятельной работе
1.3	Общее решение уравнений с частными производными.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
2	Математическое моделирование	4			4			
2.1	Принципы математического моделирования. Дифференциальные модели. Вывод уравнения колебания струны. Постановка краевых задач для волнового уравнения.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
2.2								

	Вывод уравнения теплопроводности. Постановка краевых задач для тепловых процессов.						
2.3	Стационарные уравнения. Уравнение Пуассона и Лапласа. Краевые задачи Дирихле и Неймана. Корректная постановка краевых задач. Вычислительный эксперимент. Методы информатики, автоматизация научных исследований.	2			2		опрос и проверка отчета по лабораторной работе
3	Гиперболические уравнения	8			6	2	
3.1	Метод характеристик. Формула Даламбера для решения задачи Коши для волнового уравнения. Корректность задачи Коши. Краевая задача Гурса с данными на характеристиках.	2			2		коллоквиум
3.2	Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных чисел.	2			2		опрос и проверка отчета по лабораторной работе
3.3	Метод разделения переменных для решения начально-краевых (смешанных) задач для уравнений гиперболического типа.	2				2	проверка отчета по самостоятельной работе
3.4	Обоснование метода. Теоремы единственности для смешанных задач.	2			2		опрос и проверка отчета по лабораторной работе
4	Параболические уравнения	8			8		
4.1	Метод разделения переменных для решения смешанных задач для уравнения параболического типа.	2			2		опрос и проверка отчета по лабораторной работе
4.2	Принцип максимума, теоремы единственности и устойчивости.	2			2		опрос и проверка отчета по

								лабораторной работе
4.3	Метод интегральных преобразований.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
4.4	Интеграл Пуассона для решения задачи Коши.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5	Эллиптические уравнения	8			8			
5.1	Уравнение Лапласа. Гармонические функции, их свойства. Фундаментальное решение для уравнения Лапласа.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5.2	Объемный и поверхностный потенциалы.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5.3	Формулы Грина для гармонических функций. Функция Грина. Принцип максимума для гармонических функций, корректность краевых задач для уравнения Пуассона.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5.4	Метод разделения переменных для решения задачи Дирихле в круге. Формула Пуассона. Интегральные уравнения для краевых задач.	2			2			Контрольная работа
	Итого	34			30		4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики : учебное пособие для студентов высших учебных заведений по математическим специальностям / В. И. Корзюк. - Изд. 2-е, испр. и доп. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. - 479 с.
2. Козловская, И. С. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 04 «Информатика», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление специальности:1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» / И. С. Козловская ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. - Минск : БГУ, 2021. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) - URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/257012>.
3. Емельянов, В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач : учебное пособие для вузов / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 216 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/156410>.
4. Палин, В. В. Методы математической физики. Лекционный курс : учебное пособие для вузов, для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям / В. В. Палин, Е. В. Радкевич ; МГУ им. М. В. Ломоносова. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2021. - 222 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: Курс лекций. Изд. стереотипное. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. — 248 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2017. – 736 с.
3. Мінюк С.А., Глушчоў А.І., Наркун З.М., Немец У.С. Ураўненні і метады матэматычнай фізікі . – Гродна: Грод. дзярж. ун-т, 2002. – 435 с.
4. Русак В.Н. Математическая физика. – Минск: Изд-во Дизайн ПРО, 2008. – 208 с.
5. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров. – 2-е изд., стер. – М.: МАИК "Наука", 2000.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Текущий контроль осуществляется путем оценки знаний и активности студентов на лабораторных занятиях, контрольных мероприятий в форме контрольной работы, коллоквиума, отчета по лабораторным работам, отчета по самостоятельным работам.

Выполнение заданий является обязательным для всех студентов.

Основным средством диагностики усвоения знаний и овладения необходимыми компетенциями по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» является проверка отчетов по лабораторным работам, выполняемых в рамках часов, отводимых на лабораторные занятия, отчетов по самостоятельным работам, контрольная работа, коллоквиум.

Отметка за лабораторное занятие включает:

- ответ (полнота ответа) – 30 %
- выполнение лабораторной работы – 70 %

Коллоквиум используются для обобщения и систематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума внимание обращается на:

содержание и последовательность изложения теоретического вопроса - 30%

соответствие и полноту раскрытия вопроса - 30 %

грамотный научный подход к решению практической задачи - 40%

Формой текущей аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен **зачет**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- ответы на лабораторных занятиях – 20%
- результаты коллоквиума – 30 %
- отчеты по лабораторным и самостоятельным работам – 20%
- контрольная работа – 30%

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и отметки на зачете с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40%, отметки на зачете – 60 %.

Обучающийся допускается к текущей аттестации по учебной дисциплине при условии получения положительной (4 и выше) отметки текущей успеваемости по дисциплине.

Пропуск 25 % и более занятий по учебной дисциплине (в том числе и по уважительной причине) ведет к тому, что обучающийся не допускается к текущей аттестации.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.2. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными. (2 ч)

Приведение к каноническому виду уравнений гиперболического типа с помощью Wolfram Mathematica;

Приведение к каноническому виду уравнений параболического типа с помощью Wolfram Mathematica;

Приведение к каноническому виду уравнений эллиптического типа с помощью Wolfram Mathematica.

Форма контроля – отчет по самостоятельной работе.

Тема 3.3 Метод разделения переменных для решения начально-краевых (смешанных) задач для уравнений гиперболического типа. (2 ч)

Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для однородного волнового уравнения с помощью Wolfram Mathematica;

Решение методом разделения переменных второй смешанной задачи для однородного волнового уравнения с помощью Wolfram Mathematica;

Решение методом разделения переменных третьей смешанной задачи для однородного волнового уравнения с помощью Wolfram Mathematica;

Решение методом разделения переменных смешанных задач для неоднородного волнового уравнения с помощью Wolfram Mathematica.

Форма контроля – отчет по самостоятельной работе.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» следует использовать современные информационные технологии, разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, презентации лекций, методические указания к лабораторным занятиям, электронные версии домашних заданий, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в том числе вопросы для подготовки к зачету, задания, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Общее представление ДУ с ЧП
2. ДУ с ЧП первого порядка
3. Квазилинейные неоднородные ДУ с ЧП первого порядка
4. Системы ДУ с ЧП
5. Замена независимых переменных в уравнениях второго порядка с двумя независимыми переменными
6. Приведение к каноническому виду ДУ второго порядка с двумя независимыми переменными
7. Классификация ДУ второго порядка с независимыми переменными
8. Приведение к каноническому виду ДУ второго порядка с независимыми переменными
9. Исключение младших производных в уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами
10. Корректная постановка задачи Коши

11. Общее решение ДУ второго порядка с двумя независимыми переменными
12. Задача Коши для волнового уравнения. Формула д'Аламбера
13. Корректность задачи Коши для волнового уравнения
14. Пример некорректно поставленной задачи по Адамару
15. Метод Дюамеля
16. Физическая и геометрическая интерпретация формулы д'Аламбера
17. Полуограниченная прямая. Метод продолжений
18. Метод Римана
19. Уравнение колебания в пространстве
20. Метод усреднения
21. Метод спуска
22. Метод последовательных приближений для решения задачи Гурса
23. Задача Коши для уравнения теплопроводности
24. Метод интегральных преобразований для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности
25. Принцип максимума и минимума для уравнения теплопроводности
26. Корректная постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности
27. Постановка смешанных задач для волнового уравнения
28. Постановка смешанных задач для уравнения теплопроводности
29. Задача Штурма-Лиувилля
30. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля
31. Сведение смешанных задач с неоднородными граничными условиями к задачам с однородными граничными условиями
32. Решение методом разделения переменных смешанных задач для неоднородного уравнения с однородными граничными условиями
33. Решение методом разделения переменных первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности
34. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа
35. Формула Грина

Другая значимая информация

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА

Вариант 1.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить задачу Гурса

$$u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \quad y > e^{-x}, x > 0$$

$$u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=e^{-x}} = 1 + x^2.$$

Вариант 2.

1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$$

$$u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0$$

Вариант 3.

1. Системы дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2) u_y = 0.$$

Вариант 4.

1. Метод Римана для решения обобщенной задачи Коши для гиперболического уравнения.

2. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$

$$u|_{t=0} = xy, \quad u_t|_{t=0} = x + y.$$

Вариант 5.

1. Замена независимых переменных в дифференциальных уравнениях второго порядка с двумя независимыми переменными

2. Решить задачу Коши

$$xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0,$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 6.

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2(1 + 2x)u_{xy} + 4x(1 + x)u_{yy} + 2u_y = 0,$$

$$u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2.$$

Вариант 7.

1. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с n независимыми переменными.

2. Решить задачу Гурса

$$yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x, x > 0$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = 4x^4.$$

Вариант 8.

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с n независимыми переменными.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x.$$

Вариант 9.

1. Исключение младших производных в уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

Вариант 10.

1. Корректная постановка задачи Коши.

2. Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x.$$

Вариант 11.

1. Пример некорректно поставленной задачи Коши по Адамару.
2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2) u_y = 0.$$

Вариант 12.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить задачу Коши

$$x u_{xx} + (x + y) u_{xy} + y u_{yy} = 0,$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 13.

1. Метод характеристик решения задачи Коши для волнового уравнения.
2. Решить методом Римана

$$u_{xy} = 1$$

$$u|_{y=-x} = x, \quad u_y|_{y=-x} = 1$$

Вариант 14.

1. Корректность задачи Коши для волнового уравнения.
2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

Вариант 15.

1. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения
2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} - 2u_x + 3u_y - 4u = 0.$$

Вариант 16.

1. Задача Коши для волнового уравнения на полуограниченной прямой.
Метод продолжений
2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2) u_y = 0.$$

Вариант 17.

1. Общие решения дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
2. Решить методом Римана

$$u_{xy} = 0$$

$$u|_{y=-\ln x} = 1, \quad u_y|_{y=-\ln x} = x$$

Вариант 18.

1. Задача Коши для волнового уравнения в пространстве
2. Решить методом Римана

$$u_{xy} = 1$$

$$u|_{y=-x} = x, \quad u_y|_{y=-x} = 1$$

Вариант 19.

1. Метод усреднений
2. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} - 2u_x + 3u_y - 4u = 0.$$

Вариант 20.

1. Метод последовательных приближений для решения задачи Гурса.

2. Решить задачу Коши

$$x u_{xx} + (x + y) u_{xy} + y u_{yy} = 0,$$

$$u|_{y=1/x} = x^3, \quad u_y|_{y=1/x} = 2x^2.$$

Вариант 21.

1. Метод спуска.
2. Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЗАДАЧА 1

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0$$

ЗАДАЧА 2

Найти решение задачи Гурса

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

$$u|_{y=x} = 1 + 3x, \quad u|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1,$$

ЗАДАЧА 3

Найти решение задачи Коши

$$u_{xy} + u_x = 0$$

$$u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1,$$

ЗАДАЧА 4

Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$$

ЗАДАЧА 5

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad u_t(x,0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x$$

ЗАДАЧА 6

Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xy} - e^x u_{yy} = 0,$$

$$u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=-e^x} = 1 + x^2.$$

ЗАДАЧА 7

Привести к каноническому виду

$$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + x u_y = 0.$$

ЗАДАЧА 8

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

ЗАДАЧА 9

Найти решение задачи Коши методом Римана:

$$u_{xy} = 0,$$

$$u|_{y=-\ln x} = 1, \quad u_y|_{y=-\ln x} = x.$$

ЗАДАЧА 10

Привести к каноническому виду

$$4u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_3} + 2u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 11

Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x) u_{yy} + \cos x u_x = 0.$$

ЗАДАЧА 12

Найти решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 1.$$

ЗАДАЧА 13

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_t = u_{xx},$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 1.$$

ЗАДАЧА 14

Найти решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2.$$

ЗАДАЧА 15

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin 2\pi x.$$

ЗАДАЧА 16

Привести к каноническому виду

$$e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} + u_x - u_y = 0.$$

ЗАДАЧА 17

Найти решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos \frac{2\pi}{l} x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

ЗАДАЧА 18

Привести к каноническому виду

$$4u_{x_1 x_1} - 4u_{x_1 x_2} - 2u_{x_2 x_3} + u_{x_2} + u_{x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 19

Найти решение задачи Коши:

$$u_t = u_{xx},$$

$$u|_{t=0} = \cos x.$$

ЗАДАЧА 20

Привести к каноническому виду

$$u_{x_1 x_2} - u_{x_1 x_3} + u_{x_2} - u_{x_3} = 0.$$

ЗАДАЧА 21

Найти решение задачи Коши:

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$$

$$u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

ЗАДАЧА 22

Найти решение задачи Коши:

$$xu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2}u_x = 0, \quad x > 0$$

$$u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

ЗАДАЧА 23

Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad x > 0$$

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1.$$

ЗАДАЧА 24

Привести к каноническому виду:

$$u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0.$$

ЗАДАЧА 25

Найти решение задачи Гурса:

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad x > 0$$

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x, \quad u|_{y=-x} = 1.$$

ЗАДАЧА 26

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

ЗАДАЧА 27

Найти решение задачи Гурса

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

$$u|_{y=x} = 1 + 3x, \quad u|_{y=-\frac{1}{2}x} = 1,$$

ЗАДАЧА 28

Найти решение задачи Коши

$$u_{xy} + u_x = 0$$

$$u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1,$$

ЗАДАЧА 29

Привести к каноническому виду

$$u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0$$

ЗАДАЧА 30

Найти решение следующей смешанной задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x$$

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1.			
2.			

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры

Заведующий кафедрой

Казаченок В. В.

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

Орлович Ю. Л.