

ИЗБРАННЫЕ ТЕМЫ ОЛИМПИАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Мудреченко Н. В., магистр педагогических наук, ГУО «Центр дополнительного образования детей и молодежи “Ранак” г. Минска», образовательный центр «МИФ», Республика Беларусь

Постановка проблемы

Кто, чему и когда (на какой ступени образования) должен научить ребенка, чтобы он стал олимпиадником? Мы все любим ставить вопросы. И нам кажется, что мы всегда точно знаем, кто виноват. И что бы сделал я, если бы...

Учителя средней школы обвиняют учителей начальной, что какие-то важные темы те не донесли, что дети не знают или не осознают в полной мере каких-то «элементарных» вещей и понятий. Вот если бы они знали, тогда я бы мог...

Учителя начальной школы, в свою очередь, всегда найдут контрпример. «У меня был такой замечательный, одаренный ребенок. Пока я с ним занимался и учил “как надо”, у него были места на олимпиадах. А когда он пошел в 5 класс, учить его там стали “неправильно”, и олимпиадника потеряли».

Всем знакомо. А между тем, в этой ситуации и те, и другие правы. И вместе с тем неправы. Потому как в каждом конкретном случае много различных причин и обстоятельств, которые определяются не так однозначно. Давайте попробуем разобраться в этих причинах и обстоятельствах.

Коснемся теории только в том аспекте, который необходим, чтобы эффективно справиться с поставленной задачей. Теория поможет нам ответить и на вопрос: как учить? Мышление человека в своем развитии проходит 3 последовательных стадии. Они все в равной степени нужны, чтобы взрослый человек мог эффективно пользоваться своим умом. Стадии развития мышления:

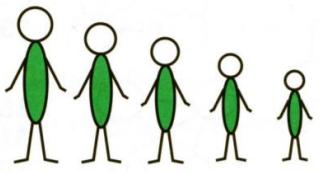
- 1) конкретно-действенное или предметно-действенное мышление (дошкольное детство);
- 2) наглядно-образное мышление (начальная школа);
- 3) абстрактно-логическое мышление (начиная с 5 класса и далее).

Рассмотрим кратко все эти 3 стадии.

1) Конкретно-действенное мышление (дошкольное детство). Мышление ребенка дошкольного возраста конкретно-

действенное. Чтобы увидеть причинно-следственные связи, ему нужно произвести конкретное действие реальным предметом (не картинка – пункт 2 – наглядно-образное мышление; не слово – пункт 3 – абстрактно-логическое мышление), а конкретный осязаемый предмет. Когда он берет палку и бьет ею по луже (причина), его одежда становится мокрой и грязной, а мама кричит (следствие). Т. е. в результате этого простого действия между клетками головного мозга устанавливаются определенные связи, которыми ребенок может впоследствии пользоваться. Ему еще интересно будет несколько раз проверить, всегда ли так происходит, а дальше проверять уже не обязательно, он и так будет знать, что случится. Гораздо легче работать с детьми, у которых развернута сеть этих нейронных связей, т. е. с теми, кому в детстве разрешали бить палкой по луже. Еще лучше – контролировали или направляли этот процесс, помогали ребенку увидеть причину и следствие.

2) наглядно-образное мышление (начальная школа). Ребенок готов к школе, когда мышление его становится наглядно-образным, т. е. его мозг готов к восприятию различных знаковых систем: чтение, письмо, графическое изображение и т. д. Если ребенка просто спросить: «Петя выше Васи, но ниже Коли. Кто из них самый высокий?», то с таким заданием в первых классах самостоятельно ему справиться сложно. Но, если он видит этих мальчиков, хотя бы на картинке, то решает такую задачу без особого труда.

Мальчики выстроились по росту. Оказалось, что Витя выше Димы, но ниже Кости. Саша выше Олега, но он не самый высокий. Ниже Олега два человека.  Кто самый высокий? Кто самый низкий?	Слева предложен пример задания по развитию соответствующих навыков. В 1–2 классах такую тему мы даем, опираясь на методические разработки Е. М. Кац. Более подробно с рабочими материалами можно познакомиться в курсе ЮНИ-центра «Развивающая математика и логика» для 1–2 классов
---	---

(<https://drive.google.com/file/d/10400kcB0v8lQeioeeR1NzM0rHDcJUwgd/view?usp=sharing>).

Чтобы правильно решить задачу, детям нужен наглядный образ этой задачи. В качестве наглядного образа может выступать графическая модель решения задачи, схема, таблица, рисунок. Учителя начальной школы и методисты часто пользуются термином «графический метод решения задач». Если ребенок не может решить задачу, опираясь только на ее словесное описание, это не значит, что он «еще глупый», просто он общается с миром на своем языке, мыслит образами, а не понятиями. И чем больше этих «образов» он проработает, тем богаче на следующей стадии развития мышления у него будет понятийный аппарат.

Если мы в процессе обучения с ребенком младшего школьного возраста будем общаться с позиции абстрактно-логического мышления (пункт 3, мышление взрослого человека), он, скорее всего, нас не поймет, и его обучение будет неэффективным. В качестве метафоры возьмем двух людей, которые разговаривают на разных языках. Из того, что один из них говорит на русском, а второй на китайском, не следует, что кто-то из них лучше или хуже, умнее или глупее. Если ко мне обращаются на иностранном или незнакомом мне языке и спрашивают какую-то простую вещь, я вряд ли отвечу правильно, разве что угадаю. Но если этот же вопрос мне задают на моем родном языке, я без труда пойму и отвечу. То же самое и с решением задач. Если мы будем учитывать возрастные особенности мышления ребенка, то научим его решать многие темы нестандартных олимпиадных задач, сформируем необходимый на следующей ступени обучения понятийный аппарат.

3) Абстрактно-логическое мышление (начиная с 5 класса и далее). Результатом развития мышления в начальной школе должен быть его переход от наглядно-образного к абстрактно-логическому, которое будет развиваться и совершенствоваться всю жизнь. Для решения задачи уже не обязательно рисовать наглядный образ. Образ задачи уже есть в голове. При благоприятном развитии в головном мозге у ребенка будет сформирована богатая нейронная сеть, разнообразные связи между нейронами, клетками головного мозга. Выражаясь проще, необходимый понятийный аппарат. Чтобы приступить к решению задачи, чаще всего уже достаточно только ее словесного описания.

Таким образом, объектом нашего рассмотрения является учащийся начальной школы с наглядно-образным типом мышления. Рассмотрим отдельные темы нестандартной математики и способы их подачи в начальной школе.

Три рыбака и три судака

Среди задач на работу и пропорциональные величины есть такой подвид задач или раздел, который условно можно назвать «Три рыбака и три судака». Задачи этого раздела кажутся совсем простыми. Однако ответ, который приходит в голову первым, чаще всего оказывается неправильным. **Если три рыбака поймали трех судаков за три дня, то сколько рыб поймают шесть рыбаков за шесть дней?** Напрашивается ответ «шесть», но он неверен.

Попробуем разобраться. Рассмотрим решение, которое чаще всего в том или ином виде приводится в методических пособиях. Если три рыбака за три дня поймали трех рыб, то сколько рыб поймают три рыбака за один день?

Если уменьшить время в три раза, то и число пойманных рыб уменьшится втрое, значит, за один день они втроем поймают одну рыбу.

Теперь увеличим только число рыбаков. Сколько судаков поймают шесть рыбаков за один день? В два раза больше, чем трое рыбаков, то есть двух судаков.

Если 6 рыбаков за один день ловят двух судаков, то за 6 дней они поймают в 6 раз больше рыб, а именно 12.

Из практики, дети 3–4 класса такую подачу материала воспринимают с трудом. Так рассуждать готовы только единицы, кто уже ближе к абстрактно-логическому типу мышления. Но если свести ее к графической модели, нарисовать схему, то задача из сложной превращается в понятную практически всем. Перед глазами появляется наглядный образ. Заметим, что во всех задачах данного вида есть 1) тот, кто выполняет работу, 2) время, за которое выполняется работа и 3) результат работы: производительность или скорость выполнения работы.

Если три рыбака поймали трех судаков за три дня, то сколько рыб поймают шесть рыбаков за шесть дней?

Представим решение этой задачи в виде таблицы. Договоримся, что по вертикали мы запишем тех, кто выполняет работу, т. е. трех рыбаков – Р1, Р2 и Р3. По горизонтали – время, за которое выполняется работа, т. е. три дня – Д1, Д2 и Д3. Построим таблицу, содержанием которой будет результат работы или производительность, данная в условии, т. е. 3 судака.

Зная первоначальную производительность (для 3 рыбаков за 3 дня), посмотрим, что будет, если рыбаков будет 6 (т. е. в 2 раза больше). Производительность не изменится, т. е. и следующая

достраиваем вертикаль ёжиками – Ё6, Ё7, Ё8, Ё9 и Ё10. Время, за которое выполнялась работа, было равно 12 дням, а теперь горизонталь таблицы нужно увеличить до 18 дней.

Содержание таблицы – производительность или скорость выполнения работы – менять мы не можем, можем только пропорционально видоизменять в зависимости от того, что требуется в задаче. Количество дней увеличится на 6. Было 12, станет 18. На рисунке мы видим, что 12 дней – это 2 раза по 6. Значит, производительность, равную 18 яблокам, мы можем разбить, не меняя первоначальных условий, на 9 яблок в первые 6 дней и 9 яблок во вторые 6 дней.

Тогда, построив таблицу до нужных значений, мы легко узнаем, сколько яблок соберут 10 ёжиков за 18 дней. А именно: $9 \cdot 6 = 54$ яблока.

В дальнейшем подобный наглядный образ дети будут строить в уме и сразу определять сколько 5 ёжиков собирают яблок за 6 дней, и легко узнавать, сколько яблок они соберут за 18 дней, как в этой задаче. Т. е. можно ждать, пока мышление ребенка станет абстрактно-логическим, а можно начать решать такие задачи с опорой на наглядный образ уже во 2–3 классах.

С рабочими материалами по данной теме для 2–4 классов можно познакомиться по ссылке:

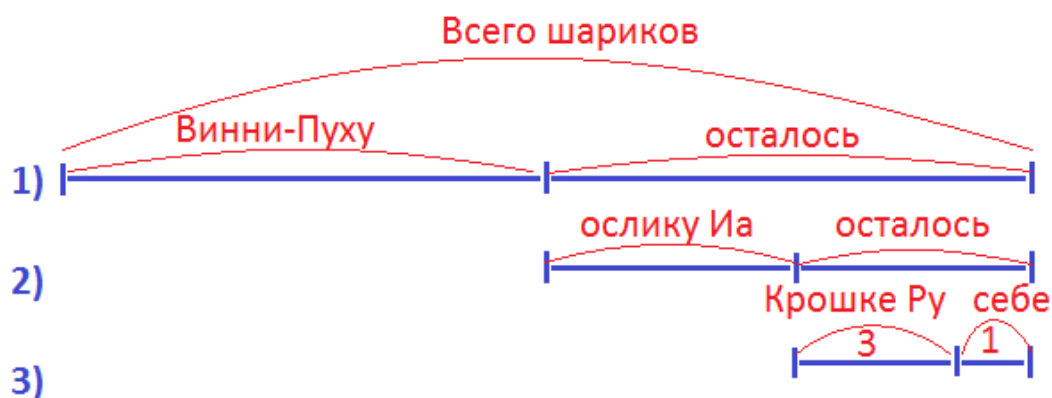
<https://drive.google.com/file/d/17vTSGyErO6HDFtm2FQqsDzI-7tSlRL7y/view?usp=sharing>.

Задачи, решаемые ходом с конца

В 3–4 классах и старше такие задачи удобнее решать, «раскручивая» условие от конца к началу. Решим задачу: **Сколько воздушных шариков было у Пятачка, если половину он подарил Винни-Пуху, половину от того, что осталось, подарил ослику Иа, потом еще три подарил Крошке Ру и всего лишь один оставил себе?** Вначале рассмотрим решение, которое чаще всего встретишь в методических пособиях. В конце у Пятачка остался всего один шарик. Значит, перед тем как Пятачок подарил три шарика Крошке Ру, у Пятачка было четыре шарика ($1 + 3 = 4$). До того как Пятачок подарил половину шариков ослику Иа, у Пятачка их было вдвое больше, то есть восемь ($4 \cdot 2 = 8$). А в самом начале у Пятачка было шариков еще в 2 раза больше, потому что половину из них он подарил Винни-Пуху ($8 \cdot 2 = 16$). Т. е. с самого начала у Пятачка было 16 шариков. Такую задачу, действительно, можно решать ходом с конца просто путем логических рассуждений, но еще понятнее и легче она станет, если мы

дополним ее графической моделью. Такая модель помогает детям не запутаться в условиях, не пропустить отдельные шаги в решении, если задача усложняется.

Изобразим первоначальное количество шариков в виде отрезка, а дальше, пошагово, будем отображать на этом отрезке операции, описанные в условии задачи. Делим отрезок, равный количеству шариков, на две одинаковые части. Одну отдаем Винни-Пуху, вторая остается.

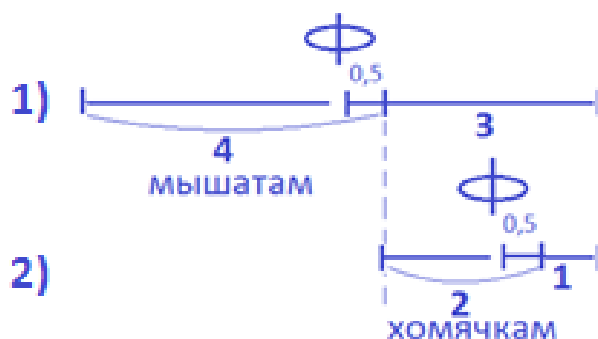


Остаток каждый раз мы отображаем на отдельном отрезке, чтобы сохранить последовательность действий. Далее остаток, который стоит в пункте 2, мы опять делим на две одинаковые части. Одну из них отдаем ослику Иа, вторую сносим в пункт 3. Последний остаток (в пункте 3) выражается конкретными числовыми значениями, по которым, двигаясь ходом с конца, легко восстановить длину первоначального отрезка.

1) $1 + 3 = 4$; 2) $4 \cdot 2 = 8$; 3) $8 \cdot 2 = 16$ шариков было первоначально.

Рассмотрим задачу с «нецелыми» значениями, для решения которой также подходит описанный выше метод.

Купил заяц на базаре несколько морковок и пошел домой. Вдруг увидел заяц голодных мышат и отдал им половину своей моркови да еще полморковки. Идет дальше, встретил голодных хомячков и им отдал половину того, что осталось, и еще полморковки. И осталась у зайца 1 морковка.



Сколько морковок купил заяц? **7 морковок**

Сколько отдал мышатам и хомячкам? **Мышатам – 4 шт., хомячкам – 2 шт.**

В предложенной схеме уже внесены все числовые значения, которые мы нашли. Как и в предыдущей задаче, действовали мы по следующему алгоритму: 1) Все количество моркови (мы еще не знаем, чему оно равно) изображаем в виде отрезка; Делим этот отрезок на две одинаковые части; Мышатам отдаем одну часть и полморковки от второй части; Сносим остаток; 2) Делим этот остаток на две одинаковые части; Хомячкам отдаем одну часть и полморковки от второй части. У зайца остается 1 морковка, что отображено на рисунке в пункте 2. Далее по картинке (наглядному образу) решаем задачу ходом с конца.

1) Рассмотрим пункт 2. Если к 1 морковке прибавить половину морковки, это будет половина второго отрезка. Тогда весь второй отрезок равен 3. (Две половины морковки можно сразу соединить в целую, если нас еще «пугают» дроби, и получить $1 + 1 + 1 = 3$; либо $1,5 + 1,5 = 3$);

2) Рассмотрим пункт 1. Если к 3 морковкам прибавить половину морковки, это будет половина всей моркови, которую купил заяц. Тогда всего заяц купил $3,5 + 3,5 = 7$ морковок. Или, если мы не умеем осуществлять операции с дробями, $3 + 1 + 3 = 7$, где обе половины морковки мы сразу «объединили» в целую. Повторимся. Можно ждать, пока ребенок подрастет, мышление его станет абстрактно-логическим и по программе он пройдет «Дроби», а можно уже в начальной школе решать такие задачи с опорой на наглядный образ и расширять его понятийный аппарат.

С рабочими материалами по данной теме для 2–4 классов можно познакомиться по ссылке:

<https://drive.google.com/file/d/1-kQ64LlYu5xea1KP7E4bRrOmHf2A80h/view?usp=sharing>.

Головы и ноги

Эта тема, которую дети, как правило, решают с удовольствием. Уже сама постановка вопроса вызывает у них интерес. В 1–2 классах, решая такие задачи на небольших числовых значениях, мы пользуемся графическим изображением задачи. Подробные художественные изображения животных не нужны, достаточно вместо курицы нарисовать кружочек с двумя ногами, вместо овцы – кружочек с четырьмя ногами. Разберем такую задачу.

На ферме живут куры и овцы, всего у них 5 голов и 14 ног. Сколько живет на ферме кур и сколько овец? 1) Нарисуем 5 голов.	
2) Предположим, что все эти головы куриные. Тогда надо к каждой голове пририсовать по 2 ноги. Получается $5 \cdot 2 = 10$ ног. Но нам нужно, чтобы было 14 ног.	
3) Чтобы поменять курицу на овцу, нужно курице пририсовать еще 2 ноги. Для осознания это важный момент! Когда мы меняем курицу на овцу, добавляются не 4 ноги, а 2, так как количество голов мы не меняем.	

Чтобы ног стало 14, еще по 2 ноги нужно пририсовать двум курицам. Итого имеем 3 курицы и 2 овцы.

Детям постарше, в 3–4 классе, можно объяснить и более «взрослый» алгоритм решения этих задач. Мы знаем, что каждая замена курицы на овцу добавляет по 2 ноги к общей сумме. Возьмем общее число голов и узнаем, сколько было бы ног, если бы на ферме жили одни только куры: $5 \cdot 2 = 10$ ног. По условию общее число ног – 14, отнимем 10 и получим, что 4 «лишние» ноги принадлежат овечкам. Разделим 4 на 2 и получим ответ – количество овец.

Кроме того, став постарше, дети замечают, что предложенный алгоритм можно использовать для решения задач, где нет прямой отсылки к головам и ногам. Разберем такую задачу. **Мама купила детям 9 игрушек: несколько машинок по 10 рублей и несколько банок с раствором для мыльных пузырей по 7 рублей. Сколько машинок купила мама, если на всю покупку она потратила 78 рублей?**

Переведем задачу, на язык «голов и ног». Количество покупок – это количество голов, их 9. Кружки рисовать не будем. Но при необходимости, дети могут это сделать. Далее предполагаем, что все наши 9 покупок мы (или мама) приобрели по наименьшей цене, т. е. все 9 покупок – это мыльные пузыри по 7 рублей. Тогда на всю покупку будет затрачено $9 \cdot 7 = 63$ рубля. Но, по условию, на всю покупку мама потратила 78 рублей, а не 63. Тогда, меняя 1 банку мыльных пузырей на машинку, дополнительно нужно заплатить $10 - 7 = 3$ рубля. Чтобы компенсировать разницу в $78 - 63 = 15$ рублей, такую замену нужно произвести $15 : 3 = 5$ раз. Т. е. машинок будет 5, а мыльных пузырей $9 - 5 = 4$ банки.

Еще позже можно предложить детям «поисследовать», что будет, если стоимость или количество ног мы будем брать не по меньшей величине, а по большей. И как тогда будет выглядеть алгоритм решения.

Тема «Головы и ноги» для 1–2 класса:

https://drive.google.com/file/d/14o3zGXJMC1px37yIJdfnPy-abGa-LW_/view?usp=sharing.

Тема Головы и ноги для 3–4 класса:

<https://drive.google.com/file/d/18T65sBtOTANMLBNIF1h8b-s0UBVC8xGI/view?usp=sharing>.

Какой вывод мы можем сделать? Практически любую тему олимпиадной математики, которая будет иметь свое продолжение в 5–6 классах, мы можем дать ребенку уже в 3–4 классах, т. е. в начальной школе. Но способ подачи материала и методы решения будут разными. Зависеть они будут от особенностей мышления ребенка в 3–4 и 5–6 классах. Благодаря такой работе в начальной школе, в головном мозге ребенка будут заложены необходимые нейронные связи и мыслительные автоматизмы, которые помогут ему автоматически выявлять многие причинно-следственные связи при решении задач в 5–6 классах и в более старшем возрасте.

Если с ребенком специально не занимались решением таких задач в 3–4 классах, у него может быть еще не сформирован необходимый понятийный аппарат. И тогда он тоже может быть не готов к переходу на абстрактно-логический способ подачи материала и к использованию в решении задач более обобщенных алгебраических методов. Многие дети испытывают сложности, когда в объяснении материала используются переменные, а не конкретные числовые значения, когда в решении задач оперировать приходится не целыми значениями, а нужно проделать ряд действий и операций с дробями и т. д.

Если наглядно-образное мышление не получило должного развития в начальной школе, ребенок не сможет эффективно перейти к использованию абстрактно-логического мышления из-за бедности понятийного аппарата. Тогда и учителю 5–6 классов не лишним будет использование наглядных образов при объяснении решения задач. Не зря этот период, переход от 3–4 к 5–6 классам, считается переломным в становлении математического мышления учащихся. Когда необходимое количество образов накоплено, действует известный закон развития: переход количественных изменений в качественные. И тогда мы видим рост «профессионализма». Школьник уверенно пользуется

математическими инструментами, которые предлагаются в средней школе.

Список использованных источников

1. Божович, Л. И. Личность и ее формирование в детском возрасте / Л. И. Божович. – М. : Педагогика, 1968. – 321 с.
2. Калинина, А. Б. Математика в твоих руках: начальная школа / А. Б. Калинина, Е. М. Кац, А. М. Тилипман. – 3-е изд., испр. – М. : ВАКО, 2013. – 384 с.
3. Мельников, О. И. Развивающая математика. 3–4 классы : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / О. И. Мельников, Н. В. Костюкович, С. А. Копылова. – Минск : Аверсэв, 2013. – 204 с.
4. Рогов, Е. И. Настольная книга практического психолога / Е. И. Рогов : в 2 кн. – М. : ВЛАДОС-ПРЕСС, 2008. – Кн.1.: Система работы психолога с детьми разного возраста. – 383 с.

МИНСКИЙ ГОРОДСКОЙ ТУРНИР «ЮНЫЙ МАТЕМАТИК» СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 3 – 4-Х КЛАССОВ КАК СРЕДСТВО ДОСТИЖЕНИЯ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ НА I СТУПЕНИ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

*Назаренко О. В., ГУО «Минский городской
институт развития образования»,
Республика Беларусь;
Пуховская С. Г., ГУО «Минский городской
институт развития образования»,
Республика Беларусь*

Минский городской турнир «Юный математик» среди учащихся 3–4-х классов в этом году проводился 11-й раз. И сегодня он пользуется популярностью среди учащихся, педагогов и родительской общественности. Каким образом турнир стал тем средством, которое позволяет совершенствовать математическое образование в начальной школе города Минска, в первую очередь, а также это тот мостик, который соединяет ступени математического образования в современной школе.

Десять лет назад в столице работа с одаренными и высокомотивированными учащимися проводилась только с учащимися 2 и 3 ступени общего среднего образования. Для младших школьников также организовывали разовые предметные