Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/499053710. – Дата доступа: 01.06.2023.

5. Тумашева, О. В. Методические затруднения учителей математики в современной школе / О. В. Тумашева, М. Б. Шашкина // Научно-педагогическое обозрение (Pedagogical Review). – 2022. – Вып. 6 (46). – С. 28–38.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АСПЕКТЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВЫСОКОМОТИВИРОВАННЫХ И ОДАРЕННЫХ ОБУЧАЕМЫХ

Басик А. И., *кандидат физико-математических наук, доцент, УО «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», Республика Беларусь;*

Ковалевич Н. И., *кандидат педагогических наук, ГУО «Брестский областной институт развития образования», Республика Беларусь*

Параметр (от греч. parametron – отмеривающий) в математике – величина, числовые значения которой позволяют выделить определенный элемент из множества элементов того же рода [1].

Решение задачи с параметром представляет собой исследовательский подход к ситуации с необходимостью решения ряда задач того же рода, выделенных из исходной в зависимости от конкретных значений параметра.

Включение задач с параметрами в образовательный процесс формирует важные основополагающие качества предметных знаний: обобщенность, осознанность, глубину, прочность и др.

Среди выполняемых в образовательной практике проектов выделяют, например, исследовательские. Эти проекты требуют обоснования актуальности, наличия четко обозначенных целей, выбора действенных методов, предполагают следование логике, по структуре приближенной к подлинному научному исследованию или совпадающей с ним [2, с. 71].

Определенные сложности возникают при определении объекта и предмета исследования. Наш опыт показывает, что содержательно богатым в обозначенном аспекте является материал, связанный с решением функциональных уравнений. Безусловно, достойны исследования эти «вечные невидимки» школьного курса математики – функциональные уравнения. Упомянутое фундаментальное математическое понятие (сложное в силу высокого уровня абстрактности) странным образом обречено на весьма широкое использование в школьном курсе математики (арифметическая и геометрическая прогрессии, четность, нечетность, периодичность функции и др.; основные элементарные функции могут быть введены как решения специальных функциональных уравнений) при отсутствии там его имени, его определения, раскрытия его объема [3]. Содержательно расширяется исследовательский спектр возможностью рассмотрения функциональных уравнений с параметрами.

Отправными точками исследования могут выступить глубоко проанализированные материалы, представленные в различных видах в общедоступной сети Internet.

В качестве примера рассмотрим задачу отыскания строго возрастающей функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющей при всех $x\in\mathbf{R}$ функциональному уравнению

$$f^{-1}(x)+f(x)=ax, \qquad (1)$$

где $a\in\mathbf{R}$ – параметр, f^{-1} – функция, обратная функции f.

При $a=2$ решение этого уравнения известно [4]. Ниже приводим рассуждения, содержащие этот случай.

Заметим, что при $a\le 0$ не существует строго возрастающей функции f, удовлетворяющей равенству (1). Действительно, в противном случае, левая часть (1) – строго возрастающая функция, а функция ax является невозрастающей. Таким образом, считаем, что $a>0$.

Пусть строго возрастающая на числовой прямой $\mathbf{R}$ функция f удовлетворяет уравнению (1). Заметим, что тогда обратная функция f^{-1} также является строго возрастающей на $\mathbf{R}$ и удовлетворяет (1). Обозначим

$$f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}(x).$$

Очевидно, что при каждом $n\in\mathbf{N}$ функция f_n является строго возрастающей.

Из (1) следует, что при всех $x\in\mathbf{R}$ выполняется равенство

$$f^{-1}(f(x))+f(f(x))=af(x),$$

откуда следует, что

$$f_2(x)=af(x)-x. \qquad (2)$$

Покажем методом математической индукции, что при каждом натуральном n найдутся действительные числа a_n и b_n такие, что при всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство:

$$f_n(x) = a_n f(x) - b_n x. \qquad (3)$$

Т. к. $f_1(x) = f(x)$, то $a_1 = 1$ и $b_1 = 0$, а из формулы (2) следует, что $a_2 = a$ и $b_2 = 1$. Предположим, что при всех $k = 1, \ldots, n$ справедливо сформулированное утверждение. Тогда из (1) следует, что

$$f^{-1}(f_n(x)) + f(f_n(x)) = af_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_{n+1}(x) = af_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Согласно предположению индукции, будем иметь

$$f_{n+1}(x) = a(a_n f(x) - b_n x) - (a_{n-1} f(x) - b_{n-1} x) =$$
$$= (a \cdot a_n - a_{n-1}) f(x) - (a \cdot b_n - b_{n-1}) x.$$

Обозначив $a_{n+1} = a \cdot a_n - a_{n-1}$ и $b_{n+1} = a \cdot b_n - b_{n-1}$, получим

$$f_{n+1}(x) = a_{n+1} f(x) - b_{n+1} x,$$

что и завершает доказательство сформулированного утверждения.

Таким образом, последовательности a_n и b_n удовлетворяют однородному разностному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами (см., например, [3, с. 4])

$$x_{n+1} - a \cdot x_n + x_{n-1} = 0 \qquad (4)$$

и следующим начальным условиям

$$a_1 = 1,\ a_2 = a,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1. \qquad (5)$$

Квадратное уравнение

$$\lambda^2 - a \cdot \lambda + 1 = 0 \qquad (6)$$

является характеристическим уравнением для (4). Дискриминант уравнения (6) равен $a^2 - 4$.

Рассмотрим случай $0 < a < 2$. Тогда (6) имеет два комплексно-сопряженных корня

$$\lambda_1 = \frac{a - i\sqrt{4 - a^2}}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a + i\sqrt{4 - a^2}}{2}, \qquad (7)$$

и, следовательно, общее решение (4) имеет вид

$$x_n = C_1 \lambda_1^{n-1} + C_2 \lambda_2^{n-1},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Для последовательности a_n постоянные C_1 и C_2 найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ C_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{cases}$$

Тогда

$$a_n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$b_n = \frac{\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Обозначив $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{a} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и учитывая, что

$$\lambda_2 - \lambda_1 = i\sqrt{4-a^2}\,,\quad \lambda_1 = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi),\quad \lambda_2 = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

с помощью формулы Муавра получим

$$a_n = \frac{2\sin n\varphi}{\sqrt{4-a^2}}, \qquad b_n = \frac{2\sin(n-1)\varphi}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Тогда равенство (3) примет вид

$$f_n(x) = \frac{2(f(x)\sin n\varphi - x\sin(n-1)\varphi)}{\sqrt{4-a^2}}. \tag{8}$$

Положим $N = \left[\dfrac{\pi}{\varphi}\right] \in \mathbf{N}$ ($[x]$– целая часть числа x), тогда выполняются неравенства

$$\sin N\varphi \ge 0 \quad \text{и} \quad \sin(N+1)\varphi < 0,$$

и, как следует из формулы (8), функция $f_{N+1}(x)$ является убывающей. Полученное противоречие означает, что при $a \in (0;2)$ уравнение (1) не имеет решений в классе строго возрастающих на действительной прямой функций.

Случай $a = 2$. В этом случае уравнение (6) имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2. Тогда общее решение разностного уравнения (4) имеет вид

$$x_n = C_1 + C_2 n,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Учитывая начальные условия (5), найдем

$$a_n = n \quad \text{и} \quad b_n = n-1,$$

т. е. формула (3) примет вид

$$f_n(x) = nf(x) - (n-1)x. \tag{9}$$

Поскольку при каждом $n \in \mathbf{N}$ функция f_n является строго возрастающей, то неравенство $x < y$ равносильно неравенству

$$f_n(x) < f_n(y) \;\Leftrightarrow\; nf(x) - (n-1)x < nf(y) - (n-1)y \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; f(x) - x\left(1 - \frac{1}{n}\right) < f(y) - y\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ получим

$$f(x) - x \le f(y) - y. \tag{10}$$

В силу симметрии уравнения (1) относительно f и f^{-1}, при $x < y$ также выполняется неравенство

$$f^{-1}(x) - x \le f^{-1}(y) - y.$$

Заменив в полученном неравенстве x на $f(x)$, а y на $f(y)$ (при этом $f(x) < f(y)$) получим

$$x - f(x) \le y - f(y). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что при $x < y$ выполняется равенство

$$f(x) = x - y + f(y). \tag{12}$$

Если $x > y$, то $f(y) = y - x + f(x)$, и мы вновь приходим к (12). При $x = y$ равенство (12) также верно. Таким образом, при всех $x, y \in \mathbf{R}$ выполняется (12). Положив в формуле (12) $y = 0$, получим $f(x) = x + f(0)$.

Равенства

$$f^{-1}(x) + f(x) = (x - c) + (x + c) = 2x$$

показывают, что функция $f(x) = x + c$ при любом $c \in \mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению (1) при $a = 2$.

Научно-познавательный интерес представляет случай $a > 2$, что заслуживает, на наш взгляд, внимания одаренных и высокомотивированных обучаемых.

Список использованных источников

1. Что такое параметр? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https//diclist.ru/slovar/enciklopedicheskiy/p/parametr.html. – Дата доступа: 01.06.2023.

2. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования : учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат [и др.] ; под ред. Е. С. Полат. – М. : Академия, 2000. – 272 с.

3. Басик, А. И. Готовимся к олимпиаде: числовые последовательности, функциональные уравнения / А. И. Басик, Н. И. Ковалевич. – Брест : Издательство БрГТУ, 2019. – 142 с.

4. A fun functional equation with an inverse twist [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https//youtube.com/watch?v=9K7OzA 00Gk0. – Дата доступа: 01.06.2023.

ONLINE-ЗАНЯТИЯ «ЮНИ-ЦЕНТРА-XXI»: РОЛЬ ШКОЛЬНОГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Березнёва О. Н., *учитель математики квалификационной категории «учитель-методист», ГУО «Средняя школа № 12 г. Новополоцка», Витебская область, Республика Беларусь;*
Данченко Е. В., *ГУО «Средняя школа № 12 г. Новополоцка», Витебская область, Республика Беларусь*

В современной системе общего среднего образования для учащихся обеспечена возможность не только учиться, но и совершенствовать свои интеллектуальные и творческие способности. Проявить свои способности и таланты обучающиеся могут, участвуя в олимпиадах и турнирах разного уровня. Однако при поддержке высшей школы подготовка к различным предметным соревнованиям проходит более эффективно.

В нашей школе поддержка одаренных учащихся осуществляется через сотрудничество с научно-исследовательским и методическим центром преподавателей и учащихся факультета прикладной математики и информатики БГУ. С 2021/2022 учебного года ребята нашей школы, заинтересованные в изучении математики на повышенном и углубленном уровнях, качественной подготовке к олимпиадам, обучаются на онлайн-занятиях «ЮНИ-Центра-XXI».

Изначально мы рассматривали две формы организации работы учащихся: индивидуальную (ребенок самостоятельно занимается дома) и групповую (все учащиеся одной параллели занимаются в школе с участием школьного учителя математики). В дальнейшем оказалось, что вторая форма работы более эффективна. Поскольку при индивидуальной форме ребенок, обучаясь у незнакомого преподавателя, испытывает некоторый психологический дискомфорт и не всегда достаточно смел, чтобы попросить объяснить еще раз то, что ему было непонятным. Бывает, что материал труден для восприятия. И как следствие теряется интерес к таким занятиям. При индивидуальных занятиях требуется от ребенка более высокий уровень самоорганизации и самодисциплины. А при групповых занятиях