

В качестве домашнего задания предлагается учащимся:

- 1) составить кроссворд, чайнворд;
- 2) создать тематический сборник задач;

3) «Особые» задачи (высокомотивированные учащиеся получают право на выполнение особого задания). Выполняется оно в специальной тетради. Включает в себя творческие задания повышенной сложности.

Приемы, применяемые автором на уроках математики, повышают активность учащихся, способствуют развитию познавательного интереса, а также формируют исследовательские умения. Системность в использовании данных приемов содействует формированию умений анализировать, делать выводы, планировать самостоятельную деятельность, находить рациональные способы решения одной и той же задачи. Положительный результат развития исследовательских умений на уроках математики – это результативное участие в турнирах юных математиков, олимпиадном движении, научно-исследовательской деятельности.

ПРИМЕНЕНИЕ НАГЛЯДНЫХ СХЕМ ПРИ ПОИСКЕ ЭФФЕКТИВНОГО СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

*Арбузов А. С., УО «Гродненский
государственный университет имени Янки
Купалы», Республика Беларусь*

Традиционно тригонометрия является одним из сложных разделов школьного курса математики (см., например, [1, 2]). В частности, учащимся трудно дается запоминание большого, в сравнении с другими темами, объема формул. Также трудности возникают при выборе способа решения и при определении последовательности действий для решения конкретной задачи на вычисление значения тригонометрического выражения, преобразование тригонометрического выражения, решение тригонометрического уравнения.

Рассмотрим возможности повышения осознанности действий учащихся, логического осмысления связей различных тригонометрических функций и выражений, эффективности поиска оптимального способа решения и структурирования решения задачи путем использования наглядных схем решения задачи.

Рассмотрим одно из заданий, предлагавшихся на централизованном тестировании по математике [3].

Задача 1. Найдите значение выражения $8 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$, если $\sin 2\alpha = \frac{23}{32}$, $2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$.

При интуитивном поиске решения часть учащихся находит хотя бы один способ решения задачи относительно быстро и без существенных затруднений, несмотря на то что задание предлагалось под номером В8 из 12 заданий части В теста. Однако зачастую найденный без анализа задачи способ оказывается трудоемким и требующим значительного времени и повышенного усердия, внимательности и сосредоточенности, а нередко и глубоких знаний по тригонометрии в процессе его реализации.

Зададимся вместе с учащимися вопросами:

- 1) Что известно в задаче?
- 2) Что требуется найти?
- 3) Как связаны искомая и данная величины (функции, выражения)?

При ответе на первый вопрос понимаем, что известно значение выражения $\sin 2\alpha$. Полезно обратить внимание на словесное описание этого выражения: «синус удвоенного угла α ». Такая формулировка уже подведет учащихся к нужным для решения задачи формулам.

Также отмечаем, что задание содержит дополнительную (зачастую, хотя и не всегда, необходимую для решения) информацию: $2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$. Можем прочесть его как принадлежность угла 2α второй координатной четверти. Однако важно понимать, что такое прочтение хотя и облегчает понимание задачи и поиск ее решения, не является точным, условие задачи дает конкретные границы промежутка, в котором содержится значение угла 2α . Т. е. из условия следует принадлежность угла второй четверти, но не наоборот: при $2\beta \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi \right)$ угол 2β также лежит во второй координатной четверти.

На практике часть заданий по тригонометрии допускает, и порой весьма эффективные, способы решения, не использующие сведения об ограничениях на значения углов. Однако для целей поиска верного решения и его реализации *каждой произвольной* предложенной учащимся задачи следует считать анализ и использование таких ограничений *обязательными*. В случае, когда учащимися построен способ решения задачи без использования этих ограничений, необходимо прежде всего повысить бдительность и внимательно проверить правильность применяемых

в решении формул, их преобразований и вычислений. И только после этого можно констатировать, что удалось отыскать эффективный способ решения задачи, для которого указанные в условии задачи сведения являются избыточными. Часто этот способ является наиболее эффективным и быстрым в реализации.

Таким образом, наиболее сильным учащимся, в полной мере овладевшим учебным материалом по разделу «Тригонометрия», разумно стремиться к отысканию таких способов решения (при их наличии). Однако с полным пониманием того, что все элементы условия задачи являются необходимыми, пока не доказано обратное.

При ответе на второй вопрос учащиеся понимают, что искомым является выражение $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$. Множитель 8, очевидно, меняет значение этого выражения, и о нем ни в коем случае нельзя забыть. Однако для поиска решения задачи и его реализации этот множитель не играет роли. Как только найдено значение выражения $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, без затруднений и затрат времени может быть непосредственно вычислено и значение выражения $8 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, и наоборот.

Обратим внимание, что в условно сложных заданиях подобные операции (умножение на константу, прибавление константы и т. п.) могут не только приводить ответ к нужной форме, например, целому значению, но и, что важно, в определенной степени подсказывать учащимся способ решения и необходимые для использования при решении формулы.

Следовательно, наиболее успешными учащимися в первую очередь должен быть задан вопрос «для чего это действие может быть использовано?». И только если ответ не найден или не очевиден, делается вывод о необходимости поиска значения основной части искомого выражения и проведения его дополнительных преобразований на заключительном этапе решения задачи.

После четкого определения данных и искомых величин и дополнительной информации о них следует приступать к основному и наиболее трудоемкому этапу решения – поиску связи «дано» и «найти».

В наиболее простых заданиях по тригонометрии этот поиск заключается в ответе на вопрос «в какой известной формуле участвуют *обе* эти величины и *только* они?». Дальнейшее решение в таком случае заключается в аккуратном применении формулы и проведении преобразований с учетом дополнительных ограничений из условия задачи.

Сложнее и интереснее ситуация становится, если ответ на предыдущий вопрос: «Такой формулы нет (она нам не известна)». Именно так обстоят дела с рассматриваемым примером.

Тогда учащимся следует выстроить цепочку известных формул, связывающих данные и искомые величины, последовательное применение которых позволит решить задачу. Непосредственно следующим может быть вопрос «а есть ли такое выражение, которое одновременно участвует в известных формулах и с искомой, и с данной величинами?». Желательно при этом, чтобы иных тригонометрических выражений найденные формулы не содержали. Если такой поиск результативен, то задача далее решается за два этапа последовательным применением найденных формул с учетом дополнительных ограничений из условия задачи.

В случае если и предыдущий вопрос не имеет известного учащимся ответа, требуется найти формулы, возможно, содержащие и иные тригонометрические выражения.

Таким образом, поиск решения подразумевает знание учащимися большого объема формул и умение их понимать и использовать в конкретных задачах. При этом само отыскание таких цепочек условным полным перебором известных формул является если и реализуемым, то избыточно сложным.

Для структурирования поиска решения и выбора наиболее эффективного способа применим наглядную схему, в которой укажем стрелками, по значению какого выражения может быть найдено следующее. Рядом со стрелками удобно сразу указать либо конкретную формулу, либо ее обозначение, очевидное для учащихся (название, номер в справочнике и т. д.) (Рисунок 1).

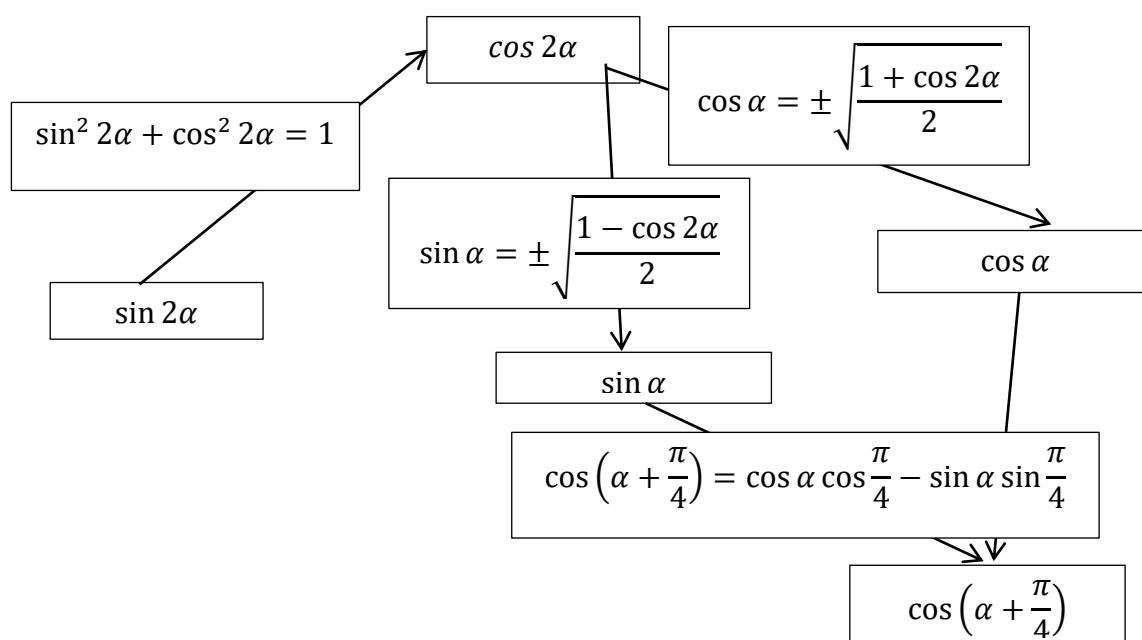


Рисунок 1 – Первый способ решения

При построении такой схемы с, на первый взгляд, логичным и понятным способом реализации учащиеся понимают: потребуется трижды извлекать корень, каждый раз устанавливая знак функции. А это достаточно трудоемкие действия. Заметим также, что потребуются дополнительные рассуждения и вычисления, ведь необходимо найти в том числе знаки выражений $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, а в условии задачи даны ограничения для угла 2α .

После построения по крайней мере одной схемы решения задачи следует проанализировать ее, определить, все ли этапы действительно осуществимы и насколько сложны, что можно улучшить в способе решения.

В данном случае полезно понять, что решение подразумевает два этапа: уменьшение угла в два раза и добавление угла, выраженного через π .

Возможно ли поменять последовательность этих этапов решения задачи? Рассмотрим рисунок 2.

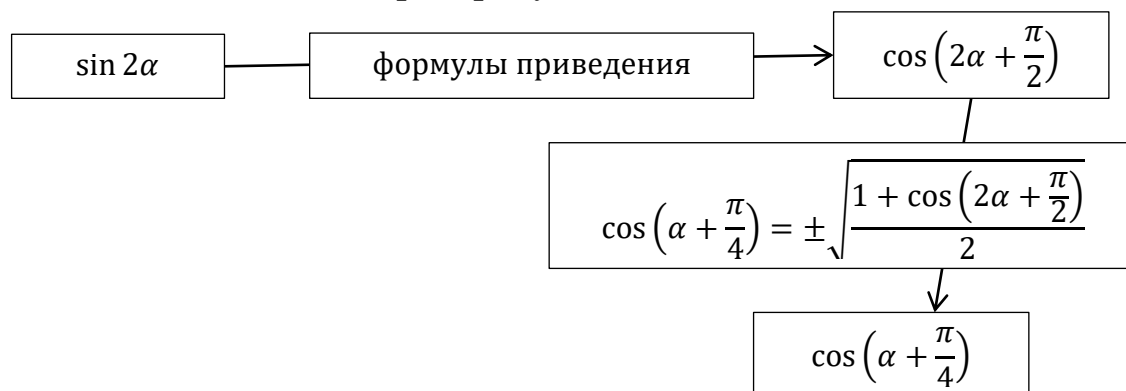


Рисунок 2 – Второй вариант решения

Очевидно, затраты времени и усилий на анализ схемы решения задачи и поиск других способов решения окупили себя: во-первых, количество этапов решения уменьшилось с четырех до двух, во-вторых, сами этапы реализуются существенно легче и быстрее.

Для наглядности приведем краткие выкладки решения задачи двумя указанными способами.

Способ 1

Поскольку $2\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, то $\cos 2\alpha < 0$. С учетом этого последовательно находим:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha &= 1; \\
 \cos^2 2\alpha &= 1 - \sin^2 2\alpha; \\
 |\cos 2\alpha| &= \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}; \\
 -\cos 2\alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{23}{32}\right)^2} = -\frac{1}{32}\sqrt{32^2 - 23^2} = \\ &= -\frac{1}{32}\sqrt{(32 - 23)(32 + 23)} = -\frac{1}{32}\sqrt{9 * 55} = -\frac{3\sqrt{55}}{32}.\end{aligned}$$

Так как $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, то $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и угол α лежит в первой координатной четверти. Поэтому $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$.

Тогда

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3\sqrt{55}}{32}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{32 + 3\sqrt{55}}{64}} \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{32 + 3\sqrt{55}} = \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}(64 + 2 * 3\sqrt{55})} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}\left((\sqrt{55})^2 + 3^2 + 2 * 3 * \sqrt{55}\right)} = \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{55})^2} = \frac{|3 + \sqrt{55}|}{8\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{55}}{8\sqrt{2}}; \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3\sqrt{55}}{32}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{32 - 3\sqrt{55}}{64}} \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{32 - 3\sqrt{55}} = \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}(64 - 2 * 3\sqrt{55})} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}\left((\sqrt{55})^2 + 3^2 - 2 * 3 * \sqrt{55}\right)} = \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{55})^2} = \frac{|3 - \sqrt{55}|}{8\sqrt{2}} = \frac{-3 + \sqrt{55}}{8\sqrt{2}}; \\ 8 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= 8 \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - 8 \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= 8 * \frac{-3 + \sqrt{55}}{8\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 * \frac{3 + \sqrt{55}}{8\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{(-3 + \sqrt{55}) - (3 + \sqrt{55})}{2} = \frac{-6}{2} = -3.\end{aligned}$$

Ответ: -3 .

Способ 2

Из условия задачи следует, что:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi; \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; \\ \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Значит, угол $\alpha + \frac{\pi}{4}$ лежит во второй координатной четверти.

Поэтому

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) < 0;$$

$$\begin{aligned}8 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= -8 \sqrt{\frac{1 + \cos\left(2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2}} = -8 \sqrt{\frac{1 + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{2}} = \\ &= -8 \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}} = -8 \sqrt{\frac{1 - \frac{23}{32}}{2}} = -8 \sqrt{\frac{32 - 23}{64}} = -\frac{8 * 3}{8} = -3.\end{aligned}$$

Ответ: -3 .

Таким образом, применяя наглядные схемы решения тригонометрических задач, действительно удастся глубоко проанализировать задачи, понять их суть, определить возможные пути решения, их сильные и слабые стороны, найти и реализовать наиболее эффективные способы решения задач, доступные учащимся.

Список использованных источников

1. Централизованное тестирование: 2005: анализ. Выводы. Рекомендации. Тесты: в 2 ч. / Н. Г. Гончар [и др.]; под ред. Н. С. Феськова; Рес. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: РИКЗ, 2006. – Ч. 2: Математика. Физика. Химия. Биология. – 80 с.

2. Централизованное тестирование. Математика: анализ ошибок: анализ ошибок ЦТ 2011 года. Комментарии к ответам. Методика расчета тестового балла. Тренировочные задания / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2012. – 95 с.

3. Централизованное тестирование. Математика: полный сборник тестов / Респ. ин-т контроля знаний М-ва образования Респ. Беларусь. – Минск: Аверсэв, 2017. – 208 с.