

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12111/уч.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 03-01 Прикладная математика
(научно-производственная деятельность)

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2021, типового учебного плана №G 31-1-026/пр.-тип. от 30.06.2021 и учебных планов БГУ №G 31-1-030/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-022/уч. ин. от 23.07.2021.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Н.М. Дмитрук, заведующий кафедрой методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

О.И. Костюкова, главный научный сотрудник отдела математической теории систем Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор;

И.К. Асмыкович, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой методов оптимального управления БГУ
(протокол № 10 от 24.05.2023 г.)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Заведующий кафедрой методов
оптимального управления

Белорусского государственного университета,
кандидат физико-математических наук, доцент

Н.М. Дмитрук

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Оптимизация статических систем» знакомит студентов с задачами и методами современной оптимизации, а также их приложениями в теории систем и управления, исследовании операций, машинном обучении, обработке изображений, анализе данных, финансовой математике, биологии и др. Основное внимание в учебной дисциплине уделяется второму методу Ляпунова. Рассматриваются как стационарные, так и нестационарные системы.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цели учебной дисциплины «Оптимизация статических систем»:

1. формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
2. формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
3. формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений;
4. формирование у студентов знаний, умений и навыков в области качественной теории и конструктивных методов оптимизации статических систем;
5. демонстрация того, как изученные математические методы могут применяться при решении прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины «Оптимизация статических систем»:

1. освоение базовых понятий, концепций, методов в области оптимизации;
2. формирование представлений об эффективных методах решения и навыков обоснованного выбора наиболее подходящего алгоритма, учитывающего особенности предлагаемых задач;
3. практическое освоение программных средств решения задач выпуклой оптимизации.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Оптимизация статических систем» относится к **дисциплинам специализации** компонента учреждения высшего образования учебного плана специальности **1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)** направление специальности 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность).

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Математический анализ», дисциплины «Линейная алгебра», «Методы оптимизации». Сведения из дисциплины «Оптимизация статических систем»

являются базовыми для изучения остальных дисциплин специализации: «Качественная теория оптимального управления», «Конструктивные методы оптимального управления и наблюдения», «Управление по прогнозирующей модели». Также служат базой для выполнения курсовых и дипломных работ.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Оптимизация статических систем» должно обеспечить формирование следующей **универсальной компетенции**:

УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- формулировки задач статической оптимизации: линейное, квадратичное, выпуклое программирование, нелинейное программирование;
- результаты теории двойственности и условий оптимальности для исследуемых задач;
- основные алгоритмы численного решения задач безусловной и условной оптимизации, их реализации для основных классов задач выпуклой оптимизации;

уметь:

- формулировать прикладные задачи как задачи оптимизации и обосновывать выбор метода их решения;
- применять методы решения на практике и анализировать полученные результаты;
- реализовывать программно основные алгоритмы оптимизации статических систем;

владеть:

- современными методами решения и анализа задач линейного, квадратичного, выпуклого, нелинейного программирования;
- средствами и инструментами Matlab, Python, CXXV, CasADi для моделирования и численного решения задач статической оптимизации.

Структура учебной дисциплины

Форма получения высшего образования – дневная (очная).

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Оптимизация статических систем» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часа, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины 3 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение

Задачи статической оптимизации и их приложения. Примеры задач. Историческая справка. Цели и задачи курса.

Раздел 1. Качественная теории оптимизации

Тема 1.1. Элементы выпуклого анализа

Выпуклые множества. Аффинные множества. Выпуклые конусы. Аффинные, выпуклые, конические оболочки. Примеры. Операции, сохраняющие выпуклость. Разделяющая и опорная гиперплоскость. Теоремы отделимости. Конус второго порядка и конус неотрицательно определенных матриц. Обобщенные неравенства. Двойственные конусы, двойственные обобщенные неравенства. Выпуклые функции. Выпуклые функции. Свойства выпуклых функций, операции, сохраняющие выпуклость. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции. Дифференциальные критерии выпуклой функции. Поляры. Сильно выпуклые функции.

Тема 1.2. Задачи оптимизации статических систем

Общая формулировка задачи математической оптимизации. Классификация задач. Выпуклая оптимизация. Эквивалентные преобразования задач. Условия оптимальности для выпуклой задачи в абстрактной форме и на простейших множествах. Линейное программирование. Квадратичное программирование. Коническое программирование. Оптимизация на конусах второго порядка (CQP) и полуопределенное программирование (SDP).

Тема 1.3. Теория двойственности и условия оптимальности

Функция Лагранжа. Двойственная задача. Слабая двойственность. Сильная двойственность. Условия регулярности. Условия оптимальности в терминах седловой точки. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера. Теория двойственности и анализ чувствительности в параметрических задачах линейного программирования. Линейное программирование: двойственность и оптимальность. Двойственность и оптимальность в квадратичном программировании. Сопряженные конусы, двойственные обобщенные неравенства. Двойственность в коническом программировании.

Тема 1.4. Прикладные задачи выпуклой оптимизации

Задачи аппроксимации, регрессии. Линейная бинарная классификация. Робастное линейное программирование. Экстремальные эллипсоиды. Полуопределенное программирование в теории управления. Оптимизация портфелей.

Раздел 2. Конструктивные методы оптимизации

Тема 2.1. Методы безусловной оптимизации

Методы спуска: общие правила выбора направления и шага. Градиентные методы, сходимость. Методы Ньютона. Сходимость метода Ньютона. Самосогласованные функции. Анализ сложности через самосогласованные функции.

Тема 2.2. Задачи на условный экстремум

Метод Ньютона в задаче с ограничениями-равенствами. Анализ сходимости. Обобщение метода Ньютона на случай старта из недопустимой точки. Последовательное квадратичное программирование.

Тема 2.3. Методы внутренней точки

Барьерная модель. Центральная траектория. Прямой метод внутренней точки. Анализ сходимости. Методы первой фазы. Прямо-двойственный метод внутренней точки. Метод барьеров для задач полуопределенного программирования.

Тема 2.4. Решение задач оптимизации в Matlab/CVX и CasADi

Основы синтаксиса CVX. Правила составления выпуклых функций. Моделирование в CVX. Двойственные переменные. Режим полуопределенной оптимизации. Решение прикладных задач с помощью CVX. Моделирование и решение задач статической оптимизации в CasADi. Применение CasADi-Opti

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
	Введение	2			
1	Качественная теории оптимизации				
1.1	Элементы выпуклого анализа	6	2		Устный опрос. Решение задач
1.2	Задачи оптимизации статических систем	4	4		Решение задач
1.3	Теория двойственности и условия оптимальности	6	6		Коллоквиум. Решение задач
1.4	Прикладные задачи выпуклой оптимизации	4	2		Расчетно-графическое задание №1 Контрольная работа по разделу 1
2	Конструктивные методы оптимизации				
2.1	Методы безусловной оптимизации	4	6	2	Расчетно-графическое задание №2
2.2	Задачи на условный экстремум	2	2		Отчет по практическим упражнениям
2.3	Методы внутренней точки	4	6	2	Расчетно-графическое задание №3
2.4	Решение задач оптимизации в Matlab/CVX и CasADi	2	2		Отчет по практическим упражнениям
	Итого	34	30	4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Методы оптимизации : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актуарная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск : БГУ, 2020. – 203 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 202–203.
2. Васильев Ф. Методы оптимизации / Ф. Васильев – М.: Litres, 2022.
3. Ашманов, С.А. Линейное программирование: Учебное пособие / С.А. Ашманов – М.: URSS. 2021. – 304 с.
4. Выпуклая оптимизация : учебное пособие / Е.А. Воронцова, Р.Ф. Хильдебранд, А.В. Гасников, Ф.С. Стонякин. – Москва : МФТИ, 2021. – 364 с. Электронный доступ – <https://arxiv.org/pdf/2106.01946.pdf>

Перечень дополнительной литературы

5. Boyd S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe – Cambridge University Press, 2004.
6. Wright S.J. Numerical optimization / S.J. Wright, J. Nocedal – Springer, 1999.
7. Ben-Tal A. Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications / A. Ben-Tal, A. Nemirovski – Philadelphia: SIAM, 2015. Электронный доступ – http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/LMCO_LN.pdf.
8. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации / Ю.Е. Нестеров – М.: МЦНМО, 2010.

Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Текущая аттестация проводится в соответствии с Постановлением Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29 мая 2012 г. «Об утверждении Правил проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования»; Положением о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (приказ ректора БГУ №189-ОД от 31.03.2020); Критериями оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

Устная форма:

- устный опрос;
- коллоквиум.

Письменная форма:

- контрольная работа;
- расчетно-графические задания.

Устно-письменная форма:

- решение задач;
- отчет по практическим упражнениям;
- зачет по учебной дисциплине.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Оптимизация статических систем» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Оптимизация статических систем» учебным планом предусмотрен **зачет**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- устный опрос, коллоквиум – 10 %;
- расчетно-графические задания – 60 %;
- контрольная работа – 30 %.

Отметка «зачет» выставляется студенту, имеющему отметку за текущую успеваемость не ниже 4 («четырёх») баллов.

Примерный перечень заданий управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.1. «Методы безусловной оптимизации».(2 ч)

Задание 1. Реализовать методы спуска с различными вариантами выбора шага и направления (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Провести численные эксперименты для ряда модельных задач безусловной минимизации с анализом результата и обоснованными выводами об эффективности методов.

Задание 3. Провести сравнительный анализ по группам методов (групповое задание).

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №2.

Тема 2.3. «Методы внутренней точки». (2 ч)

Задание 1. Реализовать метод внутренней точки для задач линейного, квадратичного программирования и др. (по вариантам групповых заданий).

Задание 2. Провести численные эксперименты, изучить зависимость от параметров метода.

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №3.

Перечень используемых средств диагностики результатов управляемой самостоятельной работы студентов: расчетно-практические задания с использованием ЭВМ.

Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

Метод учебной дискуссии, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

Метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении лабораторных заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Выпуклые множества. Выпуклые конусы. Аффинные, выпуклые, конические оболочки.
2. Операции, сохраняющие выпуклость множеств.
3. Разделяющая и опорная гиперплоскость. Теоремы отделимости.
4. Выпуклые функции. Свойства выпуклых функций. Поляры.
5. Операции, сохраняющие выпуклость функций.
6. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции.
7. Дифференциальные критерии выпуклой функции.
8. Общая формулировка задачи математической оптимизации. Классификация задач.
9. Выпуклая оптимизация. Эквивалентные преобразования выпуклых задач.
10. Условия оптимальности для выпуклой задачи в абстрактной форме и на простейших множествах.
11. Теория двойственности: функция Лагранжа, двойственная задача, слабая двойственность.
12. Теория двойственности: условия регулярности, сильная двойственность.
13. Условия оптимальности в терминах седловой точки.
14. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера.
15. Двойственность и оптимальность в задачах линейного и квадратичного программирования.
16. Методы спуска: общие правила выбора направления и шага.
17. Градиентные методы. Анализ сходимости.
18. Методы Ньютона. Сходимость метода Ньютона.
19. Метод Ньютона в задаче с ограничениями-равенствами.
20. Обобщение метода Ньютона на случай старта из недопустимой точки.
21. Барьерная модель общей выпуклой задачи. Центральная траектория. Прямой метод внутренней точки. Методы первой фазы.
22. Прямо-двойственный метод внутренней точки.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ¹
Методы оптимизации	Кафедра методов оптимального управления	нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24.05.2023 г.)
Качественная теория оптимального управления	Кафедра методов оптимального управления	нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24.05.2023 г.)
Конструктивные методы оптимального управления и наблюдения	Кафедра методов оптимального управления	нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24.05.2023 г.)
Управление по прогнозирующей модели	Кафедра высшей математики	нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24.05.2023 г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО
на ____ / ____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры методов оптимального управления (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

доцент _____ Н.М. Дмитрук
(ученая степень, звание) (подпись) (И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

доцент _____ Ю.Л. Орлович
(ученая степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)