

Министерство образования Республики Беларусь  
Белорусский государственный университет  
Факультет прикладной математики и информатики  
Кафедра компьютерных технологий и систем

СОГЛАСОВАНО  
Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ Казачёнок В.В.  
«29» августа 2023 г.

СОГЛАСОВАНО  
Декан факультета  
\_\_\_\_\_ Орлович Ю.Л.  
«30» августа 2023 г.

Математические методы компьютерной графики

Электронный учебно-методический комплекс  
для специальности:

6-05-0533-11 «Прикладная информатика»;

профилизация специальности:

«Информационные аналитические системы»

В 3 частях

Часть 1. Математические основы компьютерной графики

Регистрационный № 2.4.2-24/354

Автор:

Шолтанюк С.В., старший преподаватель.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ  
31.08.2023 г., протокол № 1.

Минск 2023

УДК 004.925.8(075.8)  
Ш 786

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ  
Протокол № 1 от 31.08.2023 г.

Решение о депонировании вынес:  
Совет факультета прикладной математики и информатики  
Протокол № 1 от 30.08.2023 г.

Автор

Шолтанюк Станислав Витальевич, старший преподаватель кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета.

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики физико-математического факультета Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент Гриб Николай Васильевич),

Базылев Дмитрий Фёдорович, заведующий кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Шолтанюк, С. В. Математические методы компьютерной графики : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», профилизация «Информационные аналитические системы». В 3 ч. Ч. 1. Математические основы компьютерной графики / С. В. Шолтанюк ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2023. – 240 с. : ил. – Библиогр.: с. 237–240.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальности «Прикладная информатика». Содержание ЭУМК предполагает изучение таких вопросов как моделирование и визуализация простейших геометрических объектов (прямых, плоскостей, отрезков, полигонов и полиэдров), аффинные и проективные преобразования и некоторые другие, связанные с компьютерной графикой и непосредственно опирающиеся на математику. В настоящем ЭУМК подробно изложен теоретический материал, приведены примеры решения типовых задач с подробными пояснениями, предложены задачи для самостоятельного решения с ответами для самопроверки, а также примеры задач для контрольной работы. Кроме того, приведён вспомогательный материал, содержащий, в частности, ссылки на некоторые интерактивные ресурсы, которые могут использоваться при различных вычислениях в компьютерной графике.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	6
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	10
1.1. Модели прямой на плоскости и в пространстве .....	10
1.1.1. Общее уравнение прямой.....	10
1.1.2. Нормальное уравнение прямой .....	14
1.1.3. Параметрические уравнения прямой .....	18
1.1.4. Каноническое уравнение прямой .....	21
1.2. Модели плоскости в пространстве .....	22
1.2.1. Общее уравнение плоскости .....	22
1.2.2. Параметрические уравнения плоскости .....	24
1.3. Взаимное расположение графических элементов на плоскости и в пространстве .....	25
1.3.1. Взаимное положение точек.....	25
1.3.2. Положение точек относительно прямой.....	28
1.3.3. Положение точек относительно плоскости.....	33
1.3.4. Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве .....	36
1.3.5. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.....	39
1.3.6. Взаимное расположение прямой и плоскости .....	42
1.3.7. Взаимное расположение отрезков на плоскости .....	43
1.4. Плоские полигоны и их свойства .....	46
1.4.1. Угол между векторами и его свойства.....	46
1.4.2. Самонепересекающиеся и выпуклые полигоны .....	49
1.4.3. Расположение точки относительно полигона .....	60
1.4.4. Алгоритмы генерации случайных полигонов .....	74
1.5. Аффинные пространства и преобразования.....	77
1.5.1. Основные понятия.....	77
1.5.2. Декартовы системы координат .....	79
1.5.3. Аффинные преобразования и их свойства .....	81
1.5.4. Матрица аффинного преобразования .....	87

1.5.5. Геометрические свойства аффинных преобразований .....	91
1.5.6. Движения аффинных пространств .....	98
1.6. Проективные преобразования.....	104
1.6.1. Аксонометрические проекции .....	106
1.6.2. Косоугольные проекции.....	114
1.6.3. Центральные проекции.....	118
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	127
2.1. Модели прямой и плоскости.....	127
2.2. Определение свойств полигонов .....	127
2.2.1. Определение выпуклости самонепересекающегося полигона.....	127
2.2.2. Определение свойств произвольного полигона.....	132
2.2.3. Задачи .....	141
2.3. Положение точки относительно полигона .....	142
2.3.1. Положение точек относительно треугольника .....	142
2.3.2. Положение точек относительно выпуклого многоугольника .....	144
2.3.3. Положение точки относительно самонепересекающегося полигона .....	153
2.3.4. Задачи .....	157
2.4. Линейные преобразования векторных пространств и аффинные преобразования аффинных пространств.....	159
2.4.1. Основные понятия.....	159
2.4.2. Переход от одного базиса (декартовой системы координат) к другому (к другой) .....	167
2.4.3. Связь координатных столбцов вектора (точки), записанных в разных базисах (декартовых системах координат).....	169
2.4.4. Связь между матрицами линейного (аффинного) преобразования, записанными в разных базисах (декартовых системах координат).....	172
2.4.5. Задачи .....	177
2.5. Проективные преобразования.....	179
2.5.1. Аксонометрическое проектирование.....	182
2.5.2. Косоугольное проектирование .....	187
2.5.3. Центральное проектирование .....	189

2.5.4. Задачи .....	200
2.6. Ответы .....	202
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.....	227
3.1. Вопросы к коллоквиуму №1 .....	227
3.2. Варианты контрольной работы №1 .....	228
3.3. Примерный перечень вопросов к экзамену .....	232
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	235
4.1. Фрагмент учебной программы.....	235
4.2. Рекомендуемая литература .....	237
4.3. Электронные ресурсы .....	238

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Математические методы компьютерной графики» знакомит учащихся с математическими методами графического представления разнообразных объектов, особенностями их моделирования и визуализации, обусловленными свойствами самих объектов, их расположением и сферами применения полученных изображений. Компьютерная графика представляет собой современную научную дисциплину, оперирующую самыми разными методами: математическими, алгоритмическими, программными, аппаратно-зависимыми. Таким образом, для понимания и усвоения основных вопросов компьютерной графики важно владеть всеми этими методами и уметь применять их вместе и по отдельности для решения задач, связанных с моделированием компьютерной графики. В данной дисциплине компьютерная графика рассматривается как область науки, основной задачей которой является переход от математических моделей различных объектов к изображениям этих объектов. В этом плане имеет место разграничение между компьютерной графикой, обработкой изображений и компьютерным зрением.

Дисциплина «Математические методы компьютерной графики» преподаётся на 1 курсе 2 семестре специальности «Прикладная информатика». Данная дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», которые преподаются в 1-2 семестрах 1 курса. Они дают первоначальную математическую подготовку студентам, которой, однако, недостаточно для решения задач компьютерной графики. Отсюда возникла необходимость разделения настоящего электронного учебно-методического комплекса (ЭУМК) на части, первой из которых является «Математические основы компьютерной графики». Эта часть, опираясь на материал, представленный в связанных дисциплинах, дополняет его сведениями, необходимыми для изучения и понимания работы базового математического аппарата, используемого при моделировании и построении компьютерной графики (например, аффинные и проективные преобразования).

В большинстве источников (в т.ч. [1, 5]), посвящённых компьютерной графике, математика идёт рука об руку с алгоритмикой и в особенности программированием. В данном же ЭУМК упор делается исключительно на математическую составляющую, в т.ч. понятия и их определения, теоремы и их доказательства, постановка и решение математических задач. Прочие разделы компьютерной графики либо будут описаны в последующих частях данного ЭУМК, либо изучаются студентами по дисциплине «Программирование компьютерной графики» на 2 курсе 3 семестре. Разумеется, они также могут воспользоваться приведёнными выше или другими пособиями, что, впрочем, пред-

ставляется маловероятным для студентов 1 курса в силу недостатка опыта самостоятельной работы с учебной литературой.

Преподавание «Математических методов компьютерной графики», как и всякой математической дисциплины, состоит из следующих компонентов. Во-первых, это знакомство студентов с теорией, в первую очередь на лекциях. Описанный в данном ЭУМК раздел дисциплины не подразумевает использования дополнительных средств или оборудования для наглядной демонстрации материала (это является важным и актуальным, скорее, в последующих темах дисциплины, которые здесь не затрагиваются). В теоретическом разделе представлен материал, который может быть предложен на лекциях. Для студентов специальности «Прикладная информатика» для лучшего понимания рекомендуется не только оперировать строгими понятиями и доказательствами, но и объяснять схематически суть и природу рассматриваемых объектов.

Во-вторых, теоретический материал необходимо закреплять на лабораторных занятиях, которые по «Математическим методам компьютерной графики» представляют собой преимущественно решение математических задач. При этом, с одной стороны, студентам настоятельно рекомендуется избегать решений задач «по чертежу», на котором «всё видно», и использовать математические модели и методы решения задач. С другой стороны, грамотно составленный чертёж может подсказать некоторую гипотезу, натолкнуть на неё, благодаря чему упрощается процесс решения задачи.

В-третьих, имеет место текущий контроль знаний, который по программе дисциплины предусмотрен в форме контрольных работ и коллоквиумов. Коллоквиум представляет собой устный или письменный опрос по пройденному теоретическому материалу, который при необходимости может быть дополнен решением задачи. Контрольная работа проходит в форме самостоятельного решения задач, где рекомендуется, как и в любой математической дисциплине, в первую очередь оценивать ход решения этих задач. По данной части дисциплины предусмотрено проведение одного коллоквиума и одной контрольной работы.

Естественно, неотъемлемой частью учебного процесса является также самостоятельная работа студентов, в т.ч. с настоящим ЭУМК. В первую очередь поэтому в практическом разделе приведены подробные решения типовых задач с некоторыми дополнительными сведениями и замечаниями.

Дисциплина «Математические методы компьютерной графики» характеризуется некоторыми особенностями. Во-первых, на неё отводится 68 часов лекционных и 34 часа лабораторных занятий. Отсюда очевидна нехватка времени, уделённого на лабораторные занятия, а следовательно, и недостаточное закрепление полученного на лекциях материала. В этой связи предлагается некоторые примеры рассматривать на лекциях, что позволяет сэкономить время

на лабораторных занятиях. Кроме того, такое количество отведённого на лекционные занятия времени позволяет готовить лекции без сокращений, т.е. излагать весь материал подробно и без опускания важных деталей. В условиях нехватки материала, посвящённого математическим основам компьютерной графики, понятного студентам 1 курса, рекомендуется в первую очередь пользоваться материалом из теоретического раздела настоящего ЭУМК.

Во-вторых, следует отметить тесную связь данной дисциплины с другими математическими дисциплинами, причём не только с 1 курса, но и теми, что студенты будут изучать в дальнейшем. Отсюда возникает необходимость сокращать некоторую часть материала во избежание дублирования некоторых фактов. Подобное дублирование, тем не менее, имеет место в первых подразделах теоретического раздела (повторении аналитической геометрии), с одной стороны, с целью повторения в начале семестра изученного студентами материала и, как следствия, настройки на рабочий лад, а с другой – в силу того, чтобы избежать «забегания вперёд», так как возможна ситуация, когда студенты ещё не изучили важные понятия по другим дисциплинам (например, матрицы на «Алгебре и теории чисел»). Кроме того, следует обращать внимание студентов на междисциплинарные связи, после чего они могли бы повторить материал по дисциплинам с предыдущего или текущего семестра с целью лучшего понимания данной дисциплины.

В-третьих, при решении задач, предложенных в настоящем ЭУМК, могут оказаться полезными различные компьютерные средства для визуализации и расчётов. Некоторые из них представлены во вспомогательном разделе. Рекомендуется их использование в первую очередь для того, чтобы студенты могли проверять свои промежуточные вычисления и результаты при решении задач.

Данная дисциплина в первую очередь предназначена для студентов, изучающих «Математические методы компьютерной графики» в университете, и для преподавателей этой дисциплины. Материал, представленный в настоящем ЭУМК, может быть полезен также для студентов, аспирантов, преподавателей и прочих людей, занимающихся или интересующихся компьютерной графикой, в т.ч. её математическими методами.

В настоящем ЭУМК используются следующие сокращения и обозначения:

МСК – мировая система координат

ОСК – объектная система координат

(П)ДСК – (прямоугольная) декартова система координат

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

◆ – начало доказательства

■ – конец доказательства

& – логическое «и»



$\vee$  – логическое «или»

$\Rightarrow$  – логическое следование, импликация

$\Leftrightarrow$  – эквивалентность

$\forall$  – квантор всеобщности

$\exists$  – квантор существования

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$  – множество целых чисел

$\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел

$\mathbb{R}$  – множество натуральных чисел

$\overline{a, b}$  – все натуральные числа от  $a$  до  $b$  (включительно)

$\text{sgn}(x)$  («сигнум») – функция, определяющая знак числа  $x$ :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$M(x, y, z)$  – точка  $M$  с координатами  $x, y, z$

$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$  – вектор  $\vec{a}$  с координатами  $a_x, a_y, a_z$

$\text{pr}_S p$  – проекция точки  $p$  на подпространство  $S$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$  – векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$  – векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не являются коллинеарными

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$  – векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$  – векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  противоположны

$\vec{a} \perp \vec{b}$  – векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны

$\vec{a} \not\perp \vec{b}$  – векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не являются ортогональными

$\vec{a} \cdot \vec{b}$  – скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b}$  – векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  – смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ :  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$|\vec{a}|$  – длина вектора  $\vec{a}$

$\angle(\vec{a}, \vec{b})$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$\mathbf{0}_{m,n}$  – нулевая матрица с  $m$  строками и  $n$  столбцами

$\mathbb{R}_{m,n}$  – множество действительных матриц с  $m$  строками и  $n$  столбцами

$\det M$  – определитель матрицы  $M$

$\text{rank } M$  – ранг системы векторов или матрицы  $M$

$\circ$  – композиция отображений и преобразований

$a := b$  – присвоить переменной  $a$  значение, равное  $b$

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

## 1.1. Модели прямой на плоскости и в пространстве

Рассмотрим некоторую плоскость. Всякая прямая, лежащая на этой плоскости, однозначно определяется, если известен хотя бы один из следующих наборов данных:

- две точки, лежащие на прямой (Рисунок 1.1а),
- точка и направляющий вектор (Рисунок 1.1б),
- точка и вектор нормали<sup>1</sup> (Рисунок 1.1в).

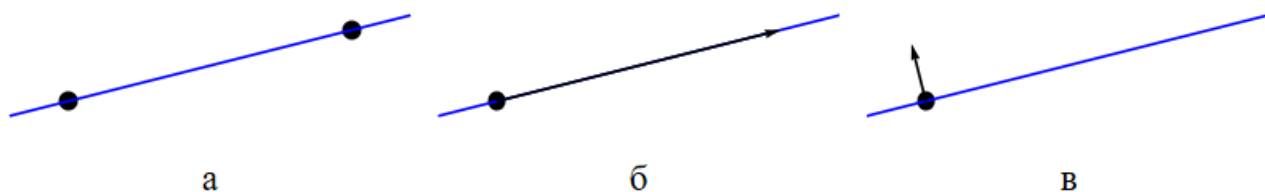


Рисунок 1.1 – Рисование прямой по её заданным элементам

На рассматриваемой плоскости построим ПДСК  $Oxy$  с началом координат в некоторой точке  $O$  и базисными векторами  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ . В этой ПДСК всякая прямая может быть задана следующими уравнениями.

### 1.1.1. Общее уравнение прямой

Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta$  на плоскости  $Oxy$ . Пусть известны некоторая принадлежащая ей точка  $M_0$  и её вектор нормали  $\vec{n}$  (Рисунок 1.2). Пусть  $M \in \Delta$  – произвольная точка. Проведём радиус-векторы  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Тогда их разность  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{MM_0}$  является направляющим вектором прямой  $\Delta$ . Он должен быть ортогонален вектору нормали  $\vec{n}$ , а значит, справедливо следующее равенство:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup> По этим двум геометрическим объектам прямая задаётся именно на плоскости. В пространстве таким же образом задаётся плоскость.

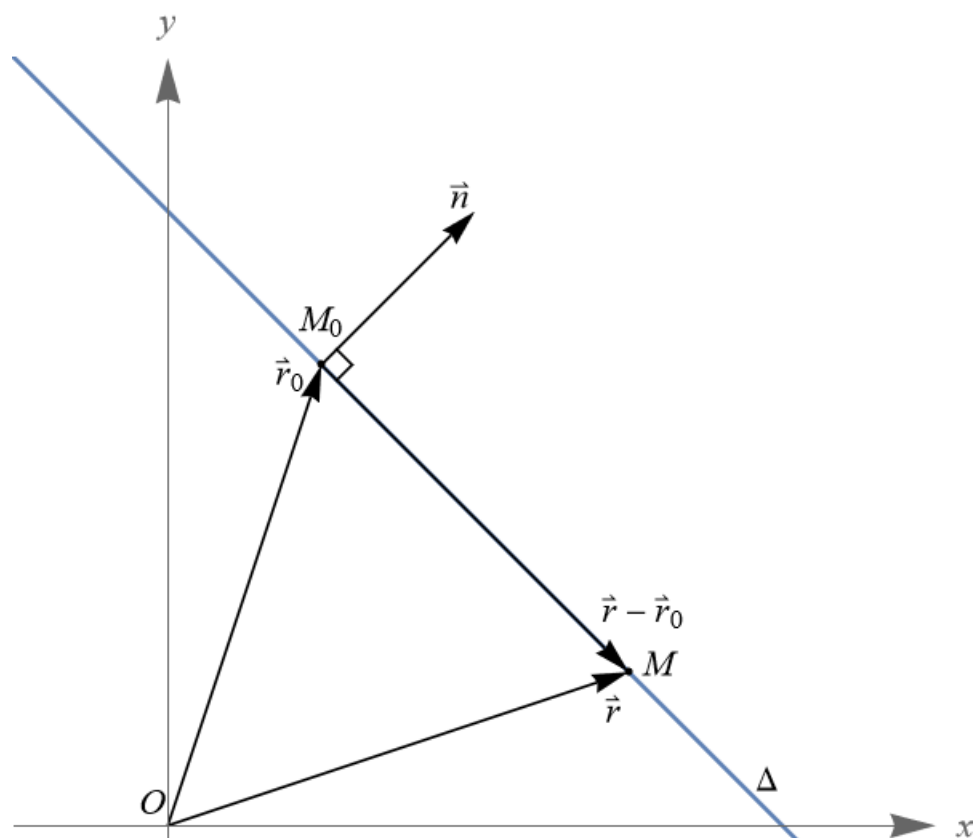


Рисунок 1.2 – Построение уравнения прямой по заданной точке  $M_0$  и вектору нормали  $\vec{n}$

Верно и обратное, т.е. всякая точка  $M$ , удовлетворяющая уравнению (1.1), лежит на прямой  $\Delta$ . Уравнение (1.1) называется уравнением прямой, проходящей через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}$ . Его координатная форма имеет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (1.2)$$

где  $A, B$  – координаты вектора  $\vec{n}$ ,  $x_0, y_0$  – координаты точки  $M_0$ . Раскрывая скобки в уравнении (1.2) и обозначая  $C = -Ax_0 - By_0$ , получим **общее уравнение прямой  $\Delta$** :

$$Ax + By + C = 0. \quad (1.3)$$

Заметим, что должно выполняться хотя бы одно из неравенств  $A \neq 0$  или  $B \neq 0$  (так как нулевой вектор перпендикулярен любой прямой, а значит, не может использоваться для её однозначного определения).

По уравнению (1.3) легко восстановить вектор нормали  $\vec{n}(A, B)$ , а следовательно, и направляющий вектор  $\vec{a}(-B, A)$  заданной прямой. Таким образом, для построения прямой по данному уравнению остаётся только найти некото-

рую точку, принадлежащую ей. Проще всего сделать это, выразив одну координату точки через другую:

$$y = -\frac{Ax + C}{B}, \text{ если } B \neq 0.$$

Полагая, например,  $x = 0$ , имеем  $y = -\frac{C}{B}$ . Искомая прямая проводится вдоль направляющего вектора  $(B, -A)$ , отложенного от точки с координатами  $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ . В случае  $B = 0$  имеет место следующая формула:

$$x = -\frac{By + C}{A} = -\frac{C}{A}, A \neq 0.$$

Недостаток такого подхода состоит в том, что перед вычислениями необходимо делать проверку на равенство нулю того или иного коэффициента уравнения (1.3), что несколько усложняет реализацию алгоритма построения прямой по его общему уравнению.

Избавиться от проверки условий и тем самым обобщить алгоритм можно, например, путём нахождения точки прямой, наименее удалённой от начала координат (Рисунок 1.3). Для этого первоначально проведём прямую из начала координат перпендикулярно прямой  $\Delta$ , или, что то же самое, перпендикулярно её направляющему вектору  $\vec{a}(-B, A)$ . Пользуясь формулой (1.2), получим следующее уравнение:

$$-Bx + Ay = 0. \tag{1.4}$$

Искомая точка должна лежать на пересечении обеих прямых, следовательно, должна удовлетворять уравнениям (1.3) и (1.4). Составим систему:

$$\begin{cases} Ax + By = -C, \\ -Bx + Ay = 0. \end{cases}$$

Решить такую систему можно, например, по методу Крамера (определитель системы, равный  $A^2 + B^2$ , отличен от нуля в силу неравенства нулю по крайней мере одного из чисел  $A$  и  $B$ ):

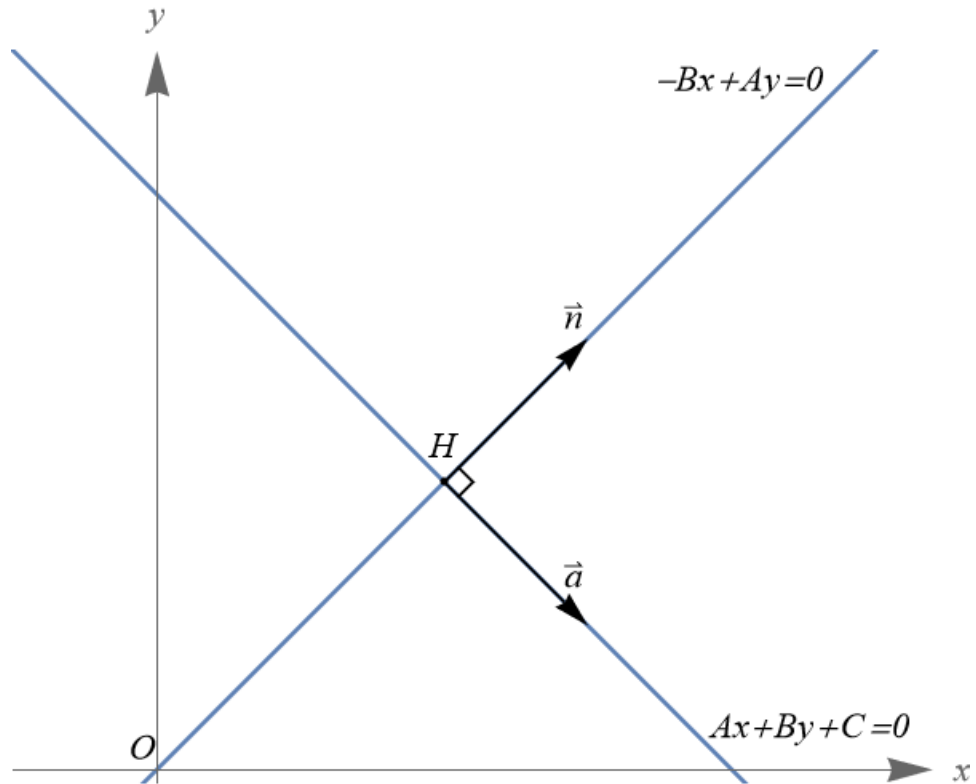


Рисунок 1.3 – Нахождение точки  $H \in \Delta: Ax + By + C = 0$ , минимально удалённой от начала координат

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{vmatrix} -C & B \\ 0 & A \end{vmatrix} = \frac{-AC}{A^2 + B^2}, \\
 y &= \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{vmatrix} A & -C \\ -B & 0 \end{vmatrix} = \frac{-BC}{A^2 + B^2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Таким образом, имеет место формула (1.5) нахождения координат точки прямой (1.3), минимально удалённой от начала координат. Такая формула уже не требует никаких дополнительных вычислений и проверок, что упрощает её использование при программной реализации различных алгоритмов.

Если в уравнении (1.3) имеют место неравенства  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ , то его можно привести к следующему виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,
 \tag{1.6}$$

где  $a = -C/A$ ,  $b = -C/B$ . Уравнение (1.6) называется **уравнением в отрезках**. Такое уравнение может быть определено для тех и только тех прямых, которые не параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$  и не проходят через начало координат. Прямая,

заданная уравнением в отрезках, отсекает на координатных осях направленные отрезки величинами  $a$  и  $b$  (Рисунок 1.4).

Заметим также, что по уравнению (1.6) легко восстановить две точки, лежащие на этой прямой: одна из них лежит на оси абсцисс и имеет координаты  $(a, 0)$ , другая – на оси ординат и имеет координаты  $(0, b)$ . По этим двум точкам и строится прямая, заданная уравнением в отрезках.

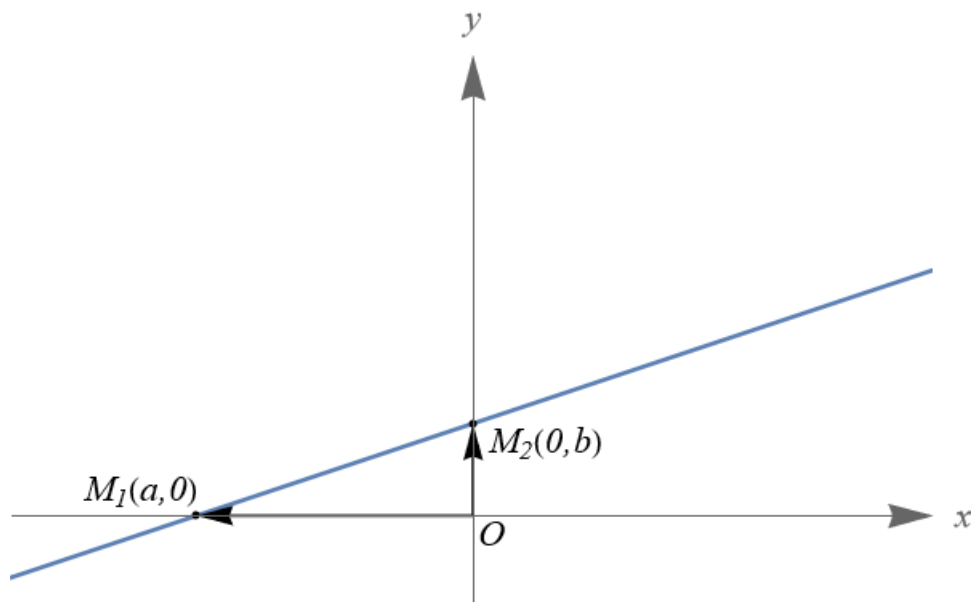


Рисунок 1.4 – Прямая, заданная уравнением в отрезках (1.6), на координатных осях отсекает направленные отрезки  $OM_1$  и  $OM_2$  величинами  $a$  и  $b$  соответственно

### 1.1.2. Нормальное уравнение прямой

Отметим, что домножая обе части уравнения (1.3) на некоторый коэффициент  $\alpha \neq 0$ , получим новое уравнение, которое описывает всё ту же прямую:

$$\alpha Ax + \alpha By + \alpha C = 0. \quad (1.7)$$

Положим в формуле (1.7)  $\alpha = \frac{-\text{sgn}(C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  при  $C \neq 0$ ,  $\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  при  $C = 0$  (можно выбрать любой знак). Тогда получим нормальное уравнение прямой:

$$A_N x + B_N y - p = 0, \quad (1.8)$$

где  $A_N = \frac{-\operatorname{sgn}(C)A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ,  $B_N = \frac{-\operatorname{sgn}(C)B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ,  $p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \geq 0$ . Уравнение (1.8) однозначно определяет вид вектора нормали. Этот вектор обладает следующими свойствами:

- его длина равна 1,
- он сонаправлен вектору  $\overrightarrow{OM}$ , где  $M$  – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (Рисунок 1.5).

Действительно, длина вектора  $\vec{n}_N(A_N, B_N)$  равна  $|\vec{n}_N| = \sqrt{A_N^2 + B_N^2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sgn}^2(C)A^2}{A^2 + B^2} + \frac{\operatorname{sgn}^2(C)B^2}{A^2 + B^2}} = 1$ . Что касается направления вектора  $\vec{n}_N$ , то он является сонаправленным радиус-вектору точки (1.5), координаты которой равны  $x_H = \frac{A_N p}{A_N^2 + B_N^2} = A_N p$ ,  $y_H = \frac{B_N p}{A_N^2 + B_N^2} = B_N p$ , так как  $p \geq 0$ .

**Понятие отклонения точки от прямой.** Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta$ , заданную нормальным уравнением (1.8), и некоторую точку  $M$  (Рисунок 1.6).

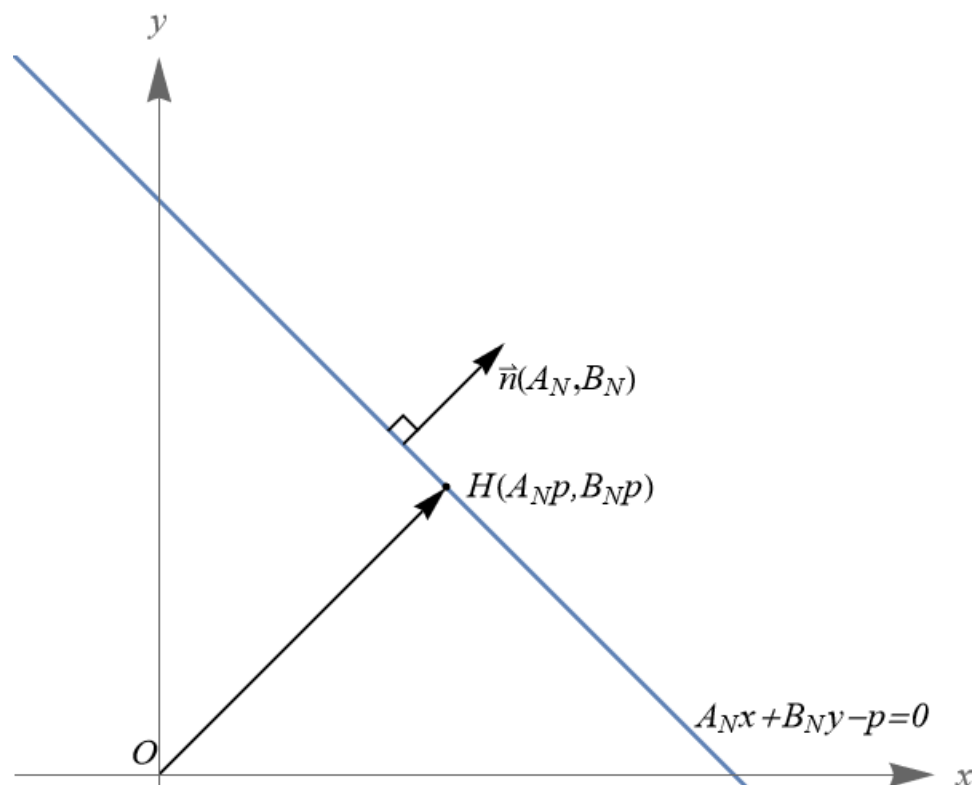


Рисунок 1.5 – Нормальное уравнение прямой однозначно определяет единичный вектор нормали, направленный в полуплоскость по другую сторону от начала координат

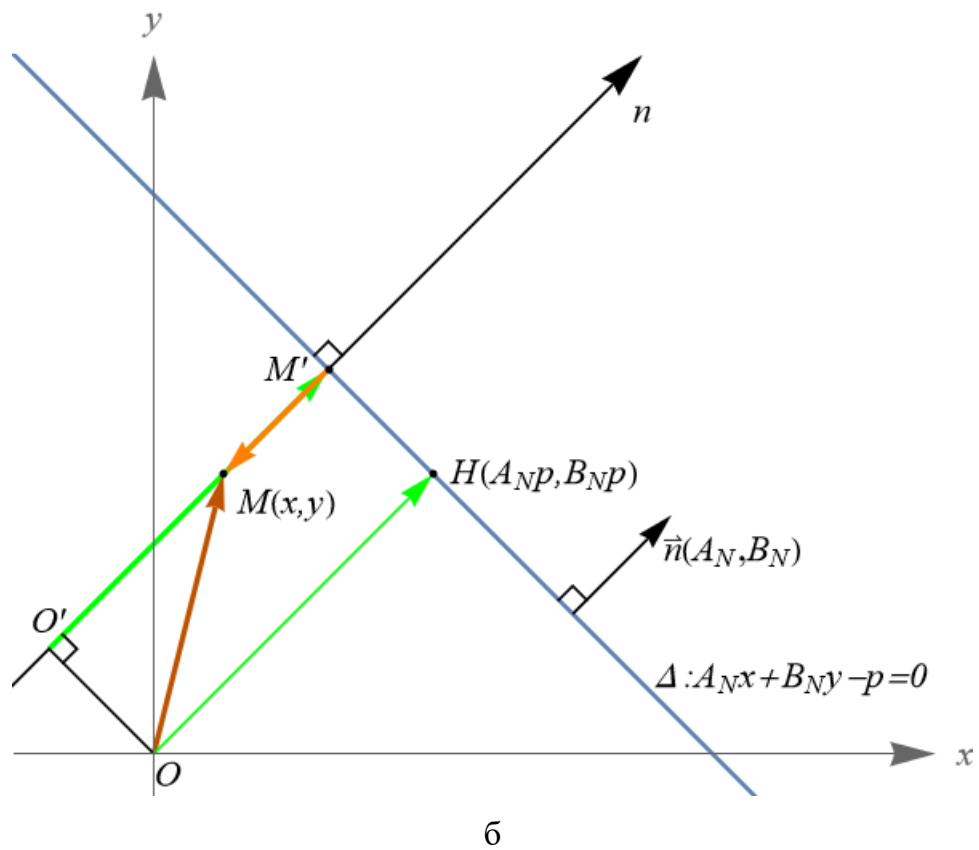
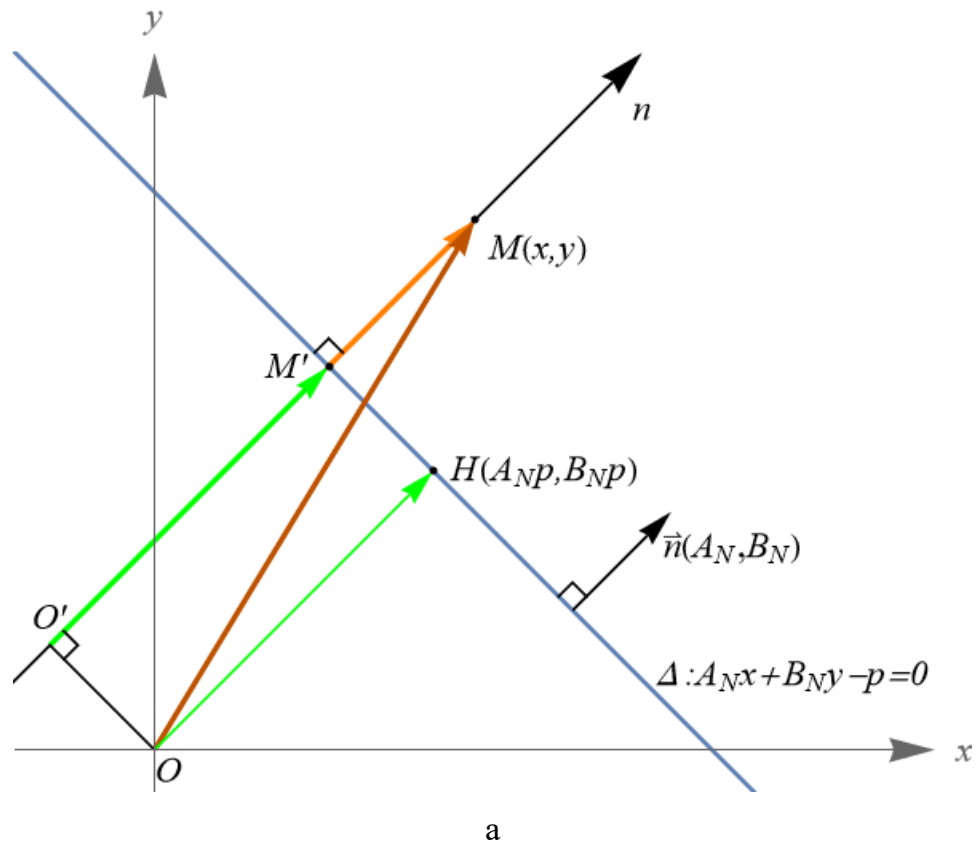


Рисунок 1.6 – Отклонение точки  $M$  от прямой  $A_N x + B_N y - p = 0$   
 (а – отклонение положительное, б – отрицательное)



Через точку  $M$  проведём ось  $n$ , сонаправленную вектору  $\vec{n}_N$ . Пусть  $M'$  – пересечение этой оси с прямой  $\Delta$ . **Отклонением точки  $M$  от прямой  $\Delta$**  называется величина направленного отрезка  $M'M$  (обозначенного на рисунке 1.6 оранжевой стрелкой), отложенного на оси  $n$ .

Отклонение произвольной точки  $M$  от прямой  $\Delta$  можно вычислить по следующей формуле:

$$\delta(M, \Delta) = \vec{n}_N \overline{OM} - p. \quad (1.9)$$

♦ Докажем эту формулу. Скалярное произведение векторов  $\vec{n}_N$  и  $\overline{OM}$  равно величине проекции вектора  $\overline{OM}$  на ось  $n$ , умноженную на длину вектора  $\vec{n}_N$ , которая равна 1. На рисунке 1.6 эта проекция обозначена вектором  $\overline{O'M}$ . С другой стороны, справедливо равенство

$$M'M = O'M - O'M'.$$

Таким образом, осталось доказать  $O'M' = p$ . В самом деле, четырёхугольник  $OO'M'H$  является прямоугольником, так как его углы  $O'$ ,  $M'$  и  $M$  прямые. Следовательно,  $\overline{O'M'} = \overline{OH}$ , а с учётом  $\overline{OM} \uparrow \uparrow \vec{n}_N$  получаем, что величина направленного отрезка  $O'M'$  равна  $p$ , откуда и следует равенство (1.9). ■

В координатном виде формула (1.9) записывается следующим образом:

$$\delta(M, \Delta) = A_N x + B_N y - p, \quad (1.10)$$

т.е. отклонение можно вычислить, просто подставив координаты точки  $M$  в левую часть нормального уравнения (1.8) прямой  $\Delta$ .

Свойства отклонения:

- Отклонение любой точки, принадлежащей прямой  $\Delta$ , равно нулю. Этот факт следует из формул (1.8) и (1.10).
- Отклонение начала координат от всякой прямой, не проходящей через него, отрицательно (так как  $\delta(O, \Delta) = -p \leq 0$  для всякой прямой  $\Delta$ , а  $p = 0$  тогда и только тогда, когда  $O \in \Delta$ ).
- Расстояние от точки  $M$  до прямой  $\Delta$  равно абсолютной величине отклонения. Это утверждение следует из определения величины направленного отрезка.

Следствие из формулы (1.10): если задано общее уравнение (1.3) прямой  $\Delta$ , то отклонение точки  $M$  от этой прямой и расстояние между ними вычисляются по следующим формулам (при  $C = 0$  в первой формуле вместо  $-\text{sgn}(C)$  нужно положить коэффициент  $\pm 1$ ):

$$\delta(M, \Delta) = -\operatorname{sgn}(C) \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.11)$$

### 1.1.3. Параметрические уравнения прямой

Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta$ , проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и имеющую направляющий вектор  $\vec{a}(a_x, a_y)$ . По точке и направляющему вектору возможно задание прямой как на плоскости, так и в пространстве (Рисунок 1.7).

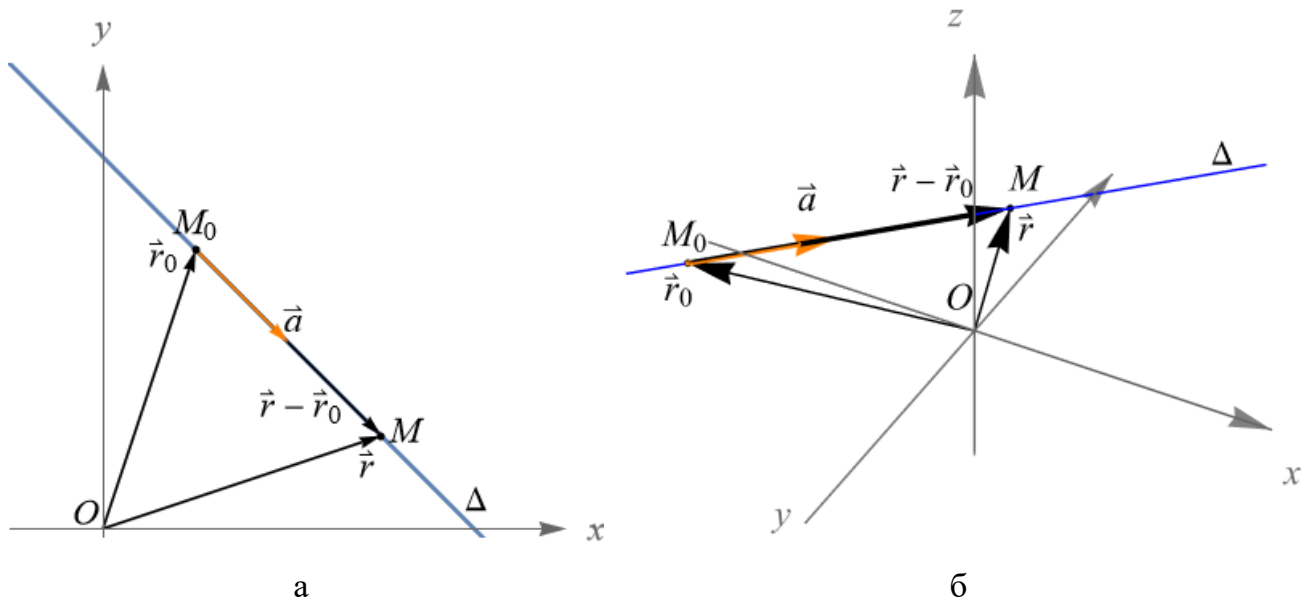


Рисунок 1.7 – Точка  $M$  принадлежит прямой  $\Delta$  тогда и только тогда, когда  $\overline{M_0M} \parallel \vec{a}$

Если взять произвольную точку  $M \in \Delta$ , то очевидно, что  $\overline{M_0M}$  также является направляющим вектором для прямой  $\Delta$ . Следовательно,  $\overline{M_0M} \parallel \vec{a}$ . Верно и обратное, т.е. если для некоторой точки  $M$  векторы  $\overline{M_0M}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны, то точка  $M$  лежит на прямой с направляющим вектором  $\vec{a}$ , проходящей через точку  $M_0$ . Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \exists t : \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad (1.12)$$

где  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_0$  – соответственно радиус-векторы точек  $M$  и  $M_0$ ,  $t$  – некоторое число. В координатах равенство (1.12) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t. \end{cases} \quad (1.13)$$

При моделировании прямой в пространстве к системе (1.13) добавляется уравнение  $z = z_0 + a_z t$ , где  $z$ ,  $z_0$ ,  $a_z$  – аппликаты точек  $M$  и  $M_0$ , вектора  $\vec{a}$  соответственно.

Уравнения (1.12) и (1.13) называются **параметрическими уравнениями прямой** ((1.12) – в векторной форме, (1.13) – в координатной). Заметим, что по системе (1.13) легко найти точку, через которую проходит заданная прямая, – её координаты равны  $(x_0, y_0)$  – и направляющий вектор, координаты которого равны коэффициентам при параметре  $t$ .

Уравнения (1.13) удобно использовать для задания частей прямой: лучей и отрезков (Рисунок 1.8).

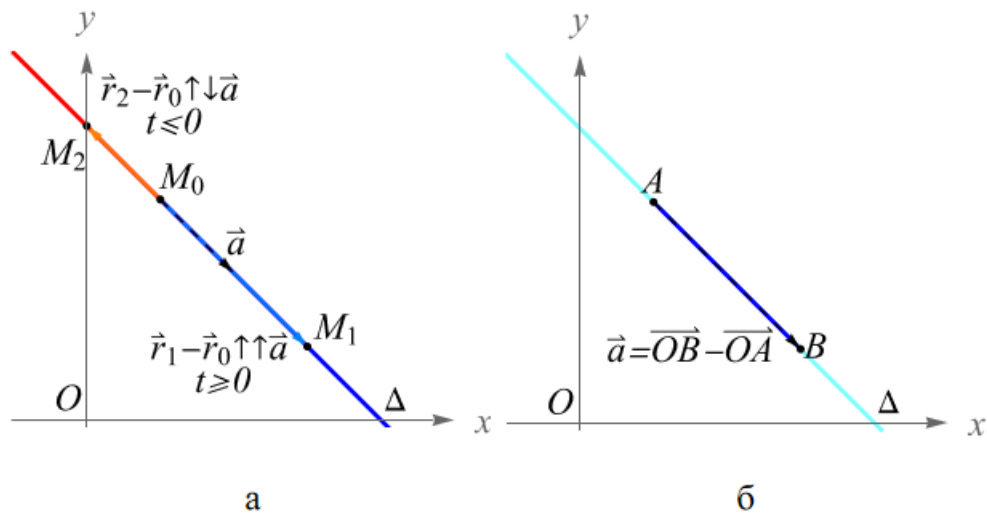


Рисунок 1.8 – Задание частей прямой параметрическим уравнением (а – лучей, б – отрезка)

Луч задаётся точкой начала и направляющим вектором. Два луча совпадают тогда и только тогда, когда их начальные точки совпадают, а направляющие векторы сонаправлены. Если два луча имеют общую точку начала и противоположнонаправленные направляющие векторы, то они образуют прямую (Рисунок 1.8а). Таким образом, для определения луча с началом в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и направляющим вектором  $\vec{a}(a_x, a_y)$  следует систему (1.13) дополнить условием  $t \geq 0$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Таковыми уравнениями задаётся луч  $M_0M_1$ . При изменении области определения параметра  $t$  на полуинтервал  $(-\infty, 0]$  получим противоположенный луч  $M_0M_2$  с направляющим вектором, равным  $-\vec{a}$ .

Отрезок обычно определяется конечными точками. Обозначим их  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$  (Рисунок 1.8б). Тогда параметрическое уравнение прямой, на которой лежит отрезок  $AB$ , можно определить следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t, \\ y = y_A + (y_B - y_A)t. \end{cases} \quad (1.14)$$

В системе (1.14) точка  $A$  соответствует значению параметра  $t = 0$ , точка  $B$  – значению  $t = 1$ . Всякой же внутренней точке отрезка  $AB$  соответствует значение  $t \in (0, 1)$ :

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t, \\ y = y_A + (y_B - y_A)t, \\ t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.15)$$

При моделировании отрезка в пространстве систему (1.15) необходимо дополнить уравнением  $z = z_0 + (z_1 - z_0)t$ . В общем случае если в системе (1.13) в качестве области определения параметра  $t$  положить произвольный отрезок  $[a, b]$ , получится система уравнений для отрезка с концами в точках с координатами  $(x_0 + a_x a, y_0 + a_y a)$  и  $(x_0 + a_x b, y_0 + a_y b)$ .

### 1.1.4. Каноническое уравнение прямой

Если в системе (1.13) выразить параметр  $t$  из обоих уравнений, затем приравнять полученные выражения, получим **каноническое уравнение прямой** на плоскости<sup>1</sup>:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (1.16)$$

Если то же самое проделать с системой (1.14), получится **уравнение прямой по двум точкам**<sup>2</sup>:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (1.17)$$

Из уравнений (1.16) и (1.17) несложно восстановить направляющий вектор и некоторую точку, лежащую на прямой: координаты вектора равны знаменателям дробей, координаты точки берутся из числителей.

При моделировании прямой на плоскости в случае  $a_x \neq 0$  уравнение (1.16) можно представить в виде  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , где  $k = a_y/a_x$  – **угловой коэффициент**. Выражая отсюда  $y$  и обозначая  $b = -kx_0 + y_0$ , получим явное уравнение прямой:

$$y = kx + b. \quad (1.18)$$

---

<sup>1</sup> При моделировании в пространстве равенство (1.16) дополняется следующим образом:  $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$ . В случае, если какая-то одна координата направляющего вектора равна нулю (например,  $a_x = 0$ ), числитель соответствующей дроби следует тоже приравнять к нулю. Для прямой на плоскости в этом случае уравнение (1.16) обретает следующий вид:  $x - x_0 = 0$ , а  $y$  может принимать любое значение. Для канонического уравнения в пространстве будем иметь систему двух уравнений:  $x - x_0 = 0$ ,  $\frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$ . Впрочем, нередко можно увидеть условную запись:  $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$ .

<sup>2</sup> При моделировании в пространстве равенство (1.17) дополняется следующим образом:  $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ .

Уравнение (1.18) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. Прямая, заданная таким уравнением, проходит через точку  $(0, b)$ , а в качестве направляющего вектора можно взять, например, вектор с координатами  $(1, k)$ .

## 1.2. Модели плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве может задаваться следующими способами:

- по трём точкам (Рисунок 1.9а),
- по точке и двум неколлинеарным направляющим векторам (Рисунок 1.9б),
- по точке и вектору нормали (Рисунок 1.9в).

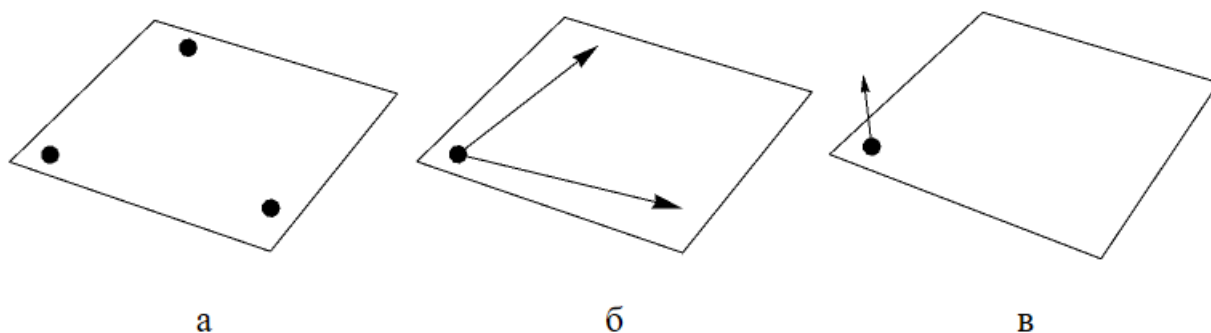


Рисунок 1.9 – Рисование плоскости по заданным её элементам

В трёхмерном пространстве зададим ПДСК  $Oxyz$ . В этой ПДСК плоскость может задаваться следующими уравнениями.

### 1.2.1. Общее уравнение плоскости

**Общее уравнение плоскости** выводится аналогично общему уравнению прямой на плоскости. Пусть некоторая плоскость  $\Pi$  задана точкой  $M_0$  и вектором нормали  $\vec{n}$ . Тогда  $M \in \Pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \vec{n}$ , что можно записать в виде векторного уравнения плоскости, проходящей через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}$ , имеющего вид (1.1). Если его распisać в координатном виде, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1.19)$$

где  $A, B, C$  – координаты вектора нормали,  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ ,  $x_0, y_0, z_0$  – координаты точки  $M_0$ . В уравнении (1.19) хотя бы один из коэффициентов  $A, B, C$  должен быть отличным от нуля.

По уравнению (1.19) найдём какую-нибудь точку  $M \in \Pi$ . Для этого проведём прямую из начала координат перпендикулярно плоскости  $\Pi$ , а затем найдём точку пересечения этой прямой и плоскости  $\Pi$ . Таким образом будет обнаружена точка плоскости  $\Pi$ , наименее удалённая от начала координат. Прямая, перпендикулярная плоскости с вектором нормали  $(A, B, C)$  и проходящая через начало координат, задаётся следующей системой параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = At, \\ y = Bt, \\ z = Ct. \end{cases}$$

Подставим теперь точку  $(At, Bt, Ct)$  в уравнение (1.19) и найдём значение параметра  $t$ :

$$A^2t + B^2t + C^2t + D = 0 \Rightarrow t = \frac{-D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

откуда получим  $M \left( \frac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2} \right) \in \Pi$ .

Если в уравнении (1.19)  $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ , то плоскость  $\Pi$  может задаваться **уравнением в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (1.20)$$

где  $a = -D/A, b = -D/B, c = -D/C$ . Плоскость, заданная уравнением в отрезках, отсекает от осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  направленные отрезки величинами  $a, b$  и  $c$  соответственно. По уравнению (1.20) легко восстановить три точки плоскости:  $(a, 0, 0), (0, b, 0)$  и  $(0, 0, c)$ .

**Нормальное уравнение плоскости:**

$$A_N x + B_N y + C_N z - p = 0, \quad (1.21)$$

где  $(A_N, B_N, C_N)$  – единичный вектор нормали, сонаправленный вектору  $\overrightarrow{OH}$ ,  $H$  – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость,

$p \geq 0$  – расстояние от начала координат до плоскости. Отклонение некоторой точки  $M(x, y, z)$  от плоскости, заданной уравнением (1.21), вычисляется путём подстановки координат точки в левую часть уравнения. Если плоскость задана общим уравнением (1.19), то отклонение точки от неё и расстояние от точки до неё вычисляется по формулам, аналогичным формулам для прямой на плоскости (если  $D = 0$ , то в первой формуле вместо  $-\text{sgn}(D)$  нужно положить  $\pm 1$ ):

$$\delta(M, \Pi) = -\text{sgn}(D) \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$d(M, \Pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.22)$$

### 1.2.2. Параметрические уравнения плоскости

Плоскость, задаваемая некоторой точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и направляющими векторами  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$  и  $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ , определяется следующим **параметрическим уравнением**:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + v\vec{b}. \quad (1.23)$$

Оно может быть переписано в виде системы координатных параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t + b_x v, \\ y = y_0 + a_y t + b_y v, \\ z = z_0 + a_z t + b_z v. \end{cases} \quad (1.24)$$

По уравнениям (1.23) или (1.24) можно найти общее уравнение плоскости. Для этого достаточно подобрать какой-нибудь нормальный вектор  $\vec{n}$  такой, что  $\vec{n} \perp \vec{a}$  &  $\vec{n} \perp \vec{b}$ . Таким свойством обладает вектор  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Тогда вектор  $\vec{r} - \vec{r}_0$  должен быть ортогонален ему, что эквивалентно следующей формуле:

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \quad (1.25)$$

В координатной форме уравнение (1.25) обретает следующий вид:



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично построение уравнений плоскости, заданной тремя точками  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , не лежащими на одной прямой. В этом случае векторы  $\vec{a}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  и  $\vec{b}(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$  — направляющие векторы плоскости, проходящей через эти три точки:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + v(\vec{r}_2 - \vec{r}_0),$$

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)v, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)v, \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)v, \end{cases} \quad (1.26)$$

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)(\vec{r}_2 - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

где  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  — радиус-векторы точек  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  соответственно. Заметим, что по уравнениям (1.24) и (1.26) легко восстанавливается некоторая точка и два направляющих вектора плоскости.

### 1.3. Взаимное расположение графических элементов на плоскости и в пространстве

#### 1.3.1. Взаимное положение точек

Рассмотрим множество точек  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Точки  $M_1, \dots, M_n$ ,  $n \geq 3$ , лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{M_1 M_i} \parallel \overrightarrow{M_1 M_j}$  для всяких  $i \neq j$ . Это утверждение можно записать в матричном виде:

$$\forall i, j: \overrightarrow{M_1 M_i} \parallel \overrightarrow{M_1 M_j} \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \dots & y_n - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & \dots & z_n - z_1 \end{pmatrix} \leq 1. \quad (1.27)$$

♦ Докажем формулу (1.27). Если ранг матрицы равен нулю, то все её элементы равны нулю. Несложно проверить, что в этом случае все точки  $M_i$  совпадают, а значит, через них можно провести прямую вдоль произвольного направляющего вектора.

Рассмотрим теперь случай, когда в формуле (1.27) имеет место равенство. Так как ранг матрицы равен рангу системы его столбцов, то  $\text{rank}((x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T, \dots, (x_n - x_1, y_n - y_1, z_n - z_1)^T) = 1$ . Каждому из координатных столбцов  $(x_i - x_1, y_i - y_1, z_i - z_1)^T$ ,  $i = 2, n$ , можно поставить в однозначное соответствие вектор  $\overrightarrow{M_1 M_i}$ :

$$\overrightarrow{M_1 M_i} = (\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}) \begin{pmatrix} x_i - x_1 \\ y_i - y_1 \\ z_i - z_1 \end{pmatrix}.$$

Верно и обратное, т.е. любому вектору  $\overrightarrow{M_1 M_i}$  можно поставить в соответствие единственный координатный столбец  $(x_i - x_1, y_i - y_1, z_i - z_1)^T$ , координаты которого можно вычислить, например, как скалярные произведения вектора  $\overrightarrow{M_1 M_i}$  и базисных векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ .

Таким образом, между вектором и его координатным столбцом имеет место взаимно однозначное соответствие, а значит, ранг системы  $(\overrightarrow{M_1 M_2}, \dots, \overrightarrow{M_1 M_n})$  также равен единице<sup>1</sup>. Это утверждение эквивалентно тому, что базис системы векторов  $(\overrightarrow{M_1 M_2}, \dots, \overrightarrow{M_1 M_n})$  состоит из одного вектора. В качестве базисного вектора возьмём вектор  $\overrightarrow{M_1 M_j}$  такой, что  $M_1 \neq M_j$ <sup>2</sup>. Тогда все векторы этой системы должны линейно выражаться через вектор  $\overrightarrow{M_1 M_j}$ :

$$\forall i = 2, n \exists \alpha_i \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_1 M_i} = \alpha_i \overrightarrow{M_1 M_j}.$$

<sup>1</sup> Говоря более строго, векторные пространства геометрических векторов и их координатных столбцов являются изоморфными.

<sup>2</sup> Такая точка всегда существует, так как если бы выполнялось  $M_1 = M_2 = \dots = M_n$ , то все векторы  $\overrightarrow{M_1 M_i}$  равнялись бы нулевому вектору, а ранг системы из таких векторов был бы равен нулю.

Этот факт равносильно коллинеарности векторов  $\overrightarrow{M_1M_i}$  и  $\overrightarrow{M_1M_j}$ , что, в свою очередь, равносильно тому, что точки  $M_1$ ,  $M_j$  и  $M_i$  лежат на одной прямой для всякого  $i = \overline{2, n}$ . ■

Точки  $M_1, \dots, M_n$ ,  $n \geq 4$ , лежат на одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_i}$ ,  $i = \overline{4, n}$ , являются компланарными. В матричном виде это условие выглядит следующим образом:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & \dots & y_n - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & \dots & z_n - z_1 \end{pmatrix} \leq 2. \quad (1.28)$$

◆ Докажем формулу (1.28). В случае строгого неравенства все точки будут лежать на одной прямой, через которую можно провести плоскость, подобрав второй направляющий вектор, не параллельный этой прямой.

В случае, если в формуле (1.28) имеет место равенство, аналогично предыдущему доказательству получим, что  $\text{rank}(\overrightarrow{M_1M_2}, \dots, \overrightarrow{M_1M_n}) = 2$ . Выберем базис этой системы, состоящий из двух неколлинеарных векторов  $\overrightarrow{M_1M_j}$  и  $\overrightarrow{M_1M_k}$ . Тогда каждый вектор системы должен линейно выражаться через них:

$$\forall i = \overline{2, n} \exists \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_1M_i} = \alpha_i \overrightarrow{M_1M_j} + \beta_i \overrightarrow{M_1M_k}.$$

Это свойство равносильно компланарности векторов  $\overrightarrow{M_1M_i}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_j}$  и  $\overrightarrow{M_1M_k}$ . Действительно, вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_j} \overrightarrow{M_1M_k} \overrightarrow{M_1M_i} &= \left[ \vec{a} = \overrightarrow{M_1M_j}, \vec{b} = \overrightarrow{M_1M_k} \right] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\alpha_i \vec{a} + \beta_i \vec{b}) = \alpha_i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + \\ &+ \beta_i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}, \end{aligned}$$

что равняется нулю в силу ортогональности векторного произведения  $\vec{a} \times \vec{b}$  обоим векторам  $\overrightarrow{M_1M_j}$  и  $\overrightarrow{M_1M_k}$ . Отсюда окончательно имеем, что точки  $M_1$ ,  $M_j$ ,  $M_k$  и  $M_i$  лежат на одной плоскости для всякого  $i = \overline{2, n}$ . ■

Два критерия, сформулированных выше, можно обобщить и дополнить: обозначим  $r = \text{rank } M$ , где  $M$  – матрица из неравенств (1.27) и (1.28). Тогда возможны следующие ситуации:

- $r = 0 \Leftrightarrow$  все точки совпадают;
- $r = 1 \Leftrightarrow$  все точки лежат на одной прямой;

- $r = 2 \Leftrightarrow$  точки не лежат на одной прямой, но лежат в одной плоскости;
- $r = 3 \Leftrightarrow$  найдутся по крайней мере четыре точки, не лежащие на одной плоскости.

При рассмотрении на плоскости  $Oxy$  множества точек  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в матрице  $M$  будут только две строки. При этом критерий принадлежности всех точек одной прямой, а также все перечисленные выше случаи (кроме  $r = 3$ ) остаются теми же.

### 1.3.2. Положение точек относительно прямой

**Принадлежность точки прямой.** Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta$  и точку  $M$ . В зависимости от задания прямой  $\Delta$  (подраздел 1.1, Рисунок 1.1) сформируем критерии принадлежности точки  $M$  этой прямой:

- Пусть известны две точки  $M_1, M_2 \in \Delta$ . Тогда  $M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2} \Leftrightarrow \overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} = \pm |\overline{M_1M}| |\overline{M_1M_2}| \Leftrightarrow \overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2} = \vec{0}$ .
- Пусть прямая  $\Delta$  проходит через точку  $M_0$  параллельно направляющему вектору  $\vec{a}$ . Тогда  $M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{a} = \pm |\overline{M_0M}| |\vec{a}| \Leftrightarrow \overline{M_0M} \times \vec{a} = \vec{0}$ .
- Пусть прямая  $\Delta$  проходит через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору нормали  $\vec{n}$ . Тогда  $M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ . Этот критерий применим только при моделировании прямой и точки на некоторой плоскости.

Очевидно, если прямая задана некоторым общим уравнением, то для проверки принадлежности некоторой точки этой прямой достаточно подставить координаты этой точки в уравнение. Если точка  $M(x, y, z)$  лежит на прямой, заданной параметрическим уравнением (1.12), то соответствующее этой точке значение параметра  $t$  можно найти исходя из канонического уравнения прямой (1.16):

$$t = \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.$$

Однако использование такой формулы непременно сопровождается проверками на равенство нулю координат  $a_x, a_y, a_z$  направляющего вектора. Поэтому часто используется следующая универсальная формула:

$$t = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2}, \quad (1.29)$$

которая получается, если обе части равенства (1.12) домножить скалярно на направляющий вектор  $\vec{a}$ , а затем воспользоваться свойством  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ . Формулу (1.29) можно переписать в координатном виде:

$$t = \frac{a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.30)$$

Если же  $M \notin \Delta: \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$ , тогда по формулам (1.29) и (1.30) будет получаться значение параметра для ортогональной проекции точки  $M$  на прямую  $\Delta$ .

◆ Для доказательства этого утверждения вычислим радиус-вектор  $\vec{r}_1$  точки, соответствующей значению параметра  $t$  по формуле (1.29):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}.$$

Теперь остаётся доказать  $\vec{r}_1 - \vec{r}_0 \perp \vec{r} - \vec{r}_1$ :

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) &= \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \right) \cdot \left( \vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) - \\ &- \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \right)^2 \vec{a}^2 = \frac{((\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a})^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{((\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{a})^2}{|\vec{a}|^2} = 0. \end{aligned}$$

Равенство скалярного произведения нулю означает ортогональность вектора  $\vec{r} - \vec{r}_1$  вектору  $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ , который является направляющим для прямой  $\Delta$ , откуда и следует, что радиус-вектор  $\vec{r}_1$  соответствует ортогональной проекции  $\text{pr}_\Delta M$ . ■

**Принадлежность точки отрезку.** Рассмотрим некоторый отрезок с концами в точках  $A(A_x, A_y, A_z)$  и  $B(B_x, B_y, B_z)$ . Тогда произвольная точка  $C(C_x, C_y, C_z)$  лежит на этом отрезке тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ , что равносильно равенству отношения координат этих векторов, а также равенству  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{CB}|$ . Если точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ , то значение параметра  $t$ ,

соответствующее точке  $C$  в параметрических уравнениях (1.15), можно вычислить по формуле, получаемой аналогично формуле (1.29):

$$t = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}, \quad (1.31)$$

или в координатном виде:

$$t = \frac{(C_x - A_x)(B_x - A_x) + (C_y - A_y)(B_y - A_y) + (C_z - A_z)(B_z - A_z)}{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2}.$$

**Принадлежность точки лучу.** Луч  $\Delta_1$  может быть определён двумя способами:

- По точке начала  $M_0$  и некоторой точке  $M_1 \in \Delta_1$ . Тогда  $M \in \Delta_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \overrightarrow{M_0M_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\overrightarrow{M_0M}| |\overrightarrow{M_0M_1}|$ .
- По точке начала  $M_0$  и направляющему вектору  $\vec{a}$ . Тогда  $M \in \Delta_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a} = |\overrightarrow{M_0M}| |\vec{a}|$ .

Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta$  и точки  $M_0, M_1, M_2 \in \Delta$ . Точка  $M_0$  делит прямую  $\Delta$  на два противоположных луча. Точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат на разных лучах (т.е. по разные стороны от точки  $M_0$  на прямой  $\Delta$ ), если точка  $M_0$  лежит на отрезке  $M_1M_2$ . Это условие эквивалентно двум следующим:

- $t_1 < t_0 < t_2$  либо  $t_2 < t_0 < t_1$ , где  $t_0, t_1, t_2$  – параметры, соответствующие точкам  $M_0, M_1, M_2 \in \Delta: \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$  и вычисляемые по формулам (1.29) и (1.30);
- $0 < t_0 < 1$ , если задать прямую  $\Delta$  по точке  $M_1$  и направляющему вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ;

**Расстояние от точки до прямой. Ортогональная проекция точки на прямую.** Рассмотрим некоторую точку  $M$  и прямую  $\Delta$ , заданную точкой  $M_0$  и направляющим вектором  $\vec{a}$ . Отложим векторы  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\vec{a}$  от точки  $M_0$ , и на этих векторах построим параллелограмм (Рисунок 1.10).

Его площадь, с одной стороны, равна произведению длины одной из сторон, умноженной на высоту, проведённой к ней, т.е.  $|\vec{a}| \cdot d(M, \Delta)$ . С другой стороны, по одному из свойств векторного произведения эта площадь должна равняться  $|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}|$ . Таким образом, получим следующую формулу нахождения расстояния от точки  $M$  до прямой  $\Delta$ :

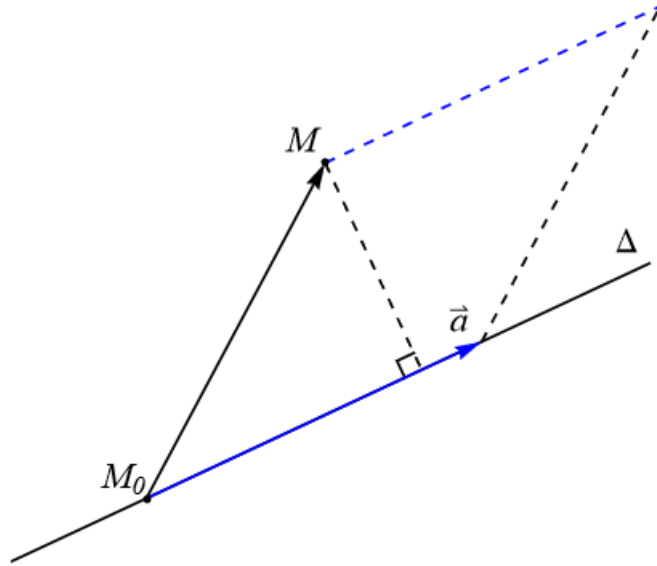


Рисунок 1.10 – Расстояние  $d(M, \Delta)$  можно вычислить, зная площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\vec{a}$

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Заметим, что операция векторного умножения двух векторов задаётся по определению в трёхмерном пространстве. Если же рассматривается некоторая плоскость с заданной на ней ПДСК  $Oxy$ , то для вычисления векторного произведения двух векторов  $\vec{a}_1(x_1, y_1)$  и  $\vec{a}_2(x_2, y_2)$  этой плоскости нужно вначале провести ось  $Oz$  перпендикулярно плоскости  $Oxy$  таким образом, чтобы получилась правая система координат. При этом векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  получают аппликаты, равные нулю. После этого можно вычислить их векторное произведение:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение по} \\ \text{3-ему столбцу} \end{bmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (1.32)$$

Если прямая задана общим уравнением, то расстояние от неё до некоторой точки можно вычислить по формуле (1.11).

Координаты ортогональной проекции точки  $M(x, y, z)$  на прямую  $\Delta$ , заданную точкой  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и направляющим вектором  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ , можно вычислить по следующей формуле:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{пр}} = x_0 + a_x t_{\text{пр}}, \\ y_{\text{пр}} = y_0 + a_y t_{\text{пр}}, \\ z_{\text{пр}} = z_0 + a_z t_{\text{пр}}, \\ t_{\text{пр}} = \frac{a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

При моделировании на плоскости формула (1.33) преобразуется к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{пр}} = x_0 + a_x t_{\text{пр}}, \\ y_{\text{пр}} = y_0 + a_y t_{\text{пр}}, \\ t_{\text{пр}} = \frac{a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0)}{a_x^2 + a_y^2}. \end{array} \right.$$

Если прямая задана общим уравнением  $\Delta: Ax + By + C = 0$ , то для нахождения ортогональной проекции точки  $M_0(x_0, y_0)$  на эту прямую достаточно провести прямую через  $M_0$  параллельно нормальному вектору прямой  $\Delta$ , равному  $(A, B)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \end{array} \right.$$

после чего координаты точки полученной прямой подставить в уравнение для  $\Delta$  и вычислить значение параметра  $t$ :

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2)t + Ax_0 + By_0 + C &= 0, \\ t &= \frac{-Ax_0 - By_0 - C}{A^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем координаты ортогональной проекции точки  $M_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{пр}} = x_0 - A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \\ y_{\text{пр}} = y_0 - B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}. \end{array} \right.$$



**Расположение точек относительно прямой на плоскости.** Точки на плоскости находятся по одну сторону от прямой  $\Delta: Ax + By + C = 0$ , если их отклонения одного знака, и по разные, если отклонения точек разных знаков. Для определения, одинаковы или различны знаки отклонений двух или более точек, достаточно подставить координаты каждой из них в левую часть уравнения  $Ax + By + C = 0$  и сравнить знаки полученных значений.

### 1.3.3. Положение точек относительно плоскости

**Принадлежность точки плоскости.** Рассмотрим некоторую плоскость  $\Pi$  и точку  $M$ . В зависимости от задания плоскости (подраздел 1.2, Рисунок 1.9) можно сформулировать следующие критерии принадлежности точки  $M$  плоскости  $\Pi$ :

- Если известны три точки  $M_1, M_2, M_3 \in \Pi$ , то  $M \in \Pi \Leftrightarrow \overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$  компланарны  $\Leftrightarrow \overline{M_1M} \overline{M_1M_2} \overline{M_1M_3} = 0$ .
- Пусть плоскость  $\Pi$  проходит через точку  $M_0$  параллельно двум неколлинеарным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Тогда  $M \in \Pi \Leftrightarrow \overline{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$  компланарны  $\Leftrightarrow \overline{M_0M} \vec{a} \vec{b} = 0$ .
- Если плоскость  $\Pi$  проходит через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору нормали  $\vec{n}$ , то  $M \in \Pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ .

Если плоскость задана общим уравнением (1.19), то проверить, лежит ли та или иная точка на ней, можно, просто подставив её координаты в это уравнение. Если  $M \in \Pi: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} + v\vec{b}$ , то параметры  $t$  и  $v$ , соответствующие точке  $M$ , можно найти, исходя из следующих соображений. Домножая равенство (1.23) скалярно на векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно  $t$  и  $v$ :

$$\begin{cases} |\vec{a}|^2 t + (\vec{a} \cdot \vec{b}) v = \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0), \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) t + |\vec{b}|^2 v = \vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0). \end{cases}$$

Эта система не является вырожденной, т.к.  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ . Значит, она имеет единственное решение, которое можно получить, например, по правилу Крамера:

$$\begin{aligned}
\left| \begin{array}{cc} |\vec{a}|^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{array} \right| &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \left( 1 - \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)^2 \right) = \left[ \text{обозначим } \alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right] = \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|^2, \\
\left| \begin{array}{cc} \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) & |\vec{b}|^2 \end{array} \right| &= (\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) |\vec{b}|^2 - (\vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left( |\vec{b}|^2 \vec{a} \right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) - \\
&\quad - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \left( |\vec{b}|^2 \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0), \\
\left| \begin{array}{cc} |\vec{a}|^2 & \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \end{array} \right| &= |\vec{a}|^2 (\vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) = \left( |\vec{a}|^2 \vec{b} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \right) - \\
&\quad - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \left( |\vec{a}|^2 \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} \right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0), \\
t = \frac{\left( |\vec{b}|^2 \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} \right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{a} \times \vec{b}|^2}, v = \frac{\left( |\vec{a}|^2 \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a} \right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{a} \times \vec{b}|^2}. & \quad (1.34)
\end{aligned}$$

Если  $M \notin \Pi$ , то по формулам (1.34) получатся параметры для ортогональной проекции точки  $M$  на плоскость  $\Pi$ .

**Расстояние от точки до плоскости. Ортогональная проекция точки на плоскость.** Пусть плоскость  $\Pi$  задана точкой  $M_0$  и двумя направляющими векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Для того, чтобы вычислить расстояние от произвольной точки  $M$  до этой плоскости, отложим от точки  $M_0$  векторы  $\overrightarrow{M_0 M}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (Рисунок 1.11). Объём параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах, с одной стороны, равен модулю их смешанного произведения  $|\overrightarrow{M_0 M} \vec{a} \vec{b}|$ , а с другой – его можно вычислить как произведение высоты, опущенной из точки  $M$  на плоскость  $\Pi$ , на площадь основания, которое является параллелограммом площадью  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ . Таким образом, получим следующую формулу:

$$d(M, \Pi) = \frac{|(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{a} \vec{b}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Если плоскость задана общим уравнением, то расстояние от неё до некоторой точки вычисляется по формуле (1.22).

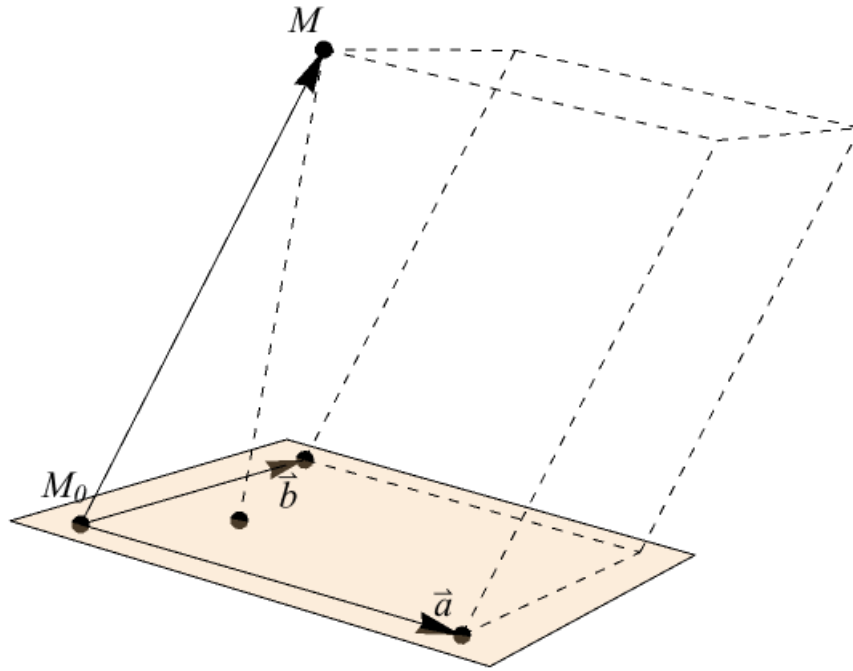


Рисунок 1.11 – Расстояние от точки до плоскости, заданной точкой  $M_0$  и векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

Координаты ортогональной проекции точки  $M(x, y, z)$  на плоскость  $\Pi$ , заданную точкой  $M_0$  и направляющими векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , можно вычислить, подставив параметры из формулы (1.34) в уравнение (1.23).

При задании плоскости общим уравнением  $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$  координаты ортогональной проекции на неё некоторой точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_{\text{пр}} = x_0 - A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y_{\text{пр}} = y_0 - B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z_{\text{пр}} = z_0 - C \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases}$$

Вопросы расположения точек относительно плоскости рассматриваются аналогично расположению точек относительно прямой на плоскости (см. пункт 1.3.2).

### 1.3.4. Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве

Рассмотрим две прямые  $\Delta_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$  и  $\Delta_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$ . Тогда возможны следующие случаи:

- $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Leftrightarrow \Delta_1 = \Delta_2$  – прямые **совпадают**.
- $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \not\parallel \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Leftrightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$ . Для двух **параллельных** прямых можно определить расстояние, равное расстоянию от некоторой точки прямой  $\Delta_1$  до  $\Delta_2$ :  $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_1, \Delta_2) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_2|}$ . Если расстояние между

двумя параллельными прямыми оказывается нулевым, то эти прямые совпадают.

- $\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2 \ \& \ \vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0 \Leftrightarrow$  прямые  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  **пересекаются**. Точка пересечения, которой соответствует радиус-вектор  $\vec{r}_0$ , должна удовлетворять следующей системе равенств:

$$\begin{cases} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{a}_1 = \vec{0}, \\ (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) \times \vec{a}_2 = \vec{0}, \end{cases}$$

которая в координатной форме расписывается в виде системы из двух (при моделировании на плоскости) или шести уравнений (в трёхмерном пространстве). Угол  $\alpha$  между пересекающимися прямыми равен углу между их направляющими векторами, а также углу между их нормальными векторами (если прямые построены на плоскости):

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}.$$

- $\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2 \ \& \ \vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \neq 0 \Leftrightarrow$  прямые  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  **скрещиваются**. Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми можно как расстояние от некоторой точки прямой  $\Delta_1$  до плоскости, проходящей через прямую  $\Delta_2$  параллельно  $\Delta_1$  (Рисунок 1.12). Оно равно  $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_1, \Pi) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{a}_1 \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$ , где  $\Pi: \Delta_2 \in \Pi \ \& \ \Delta_1 \parallel \Pi$ . Если расстояние меж-

ду прямыми оказывается равным нулю, то эти прямые пересекаются.

**Пучком прямых** на плоскости называется множество прямых, проходящих через общую точку. Пучок прямых однозначно определяется либо этой общей точкой, называемой **центром** пучка, либо некоторыми двумя пересекающимися прямыми. Если известен центр пучка, то произвольную прямую из

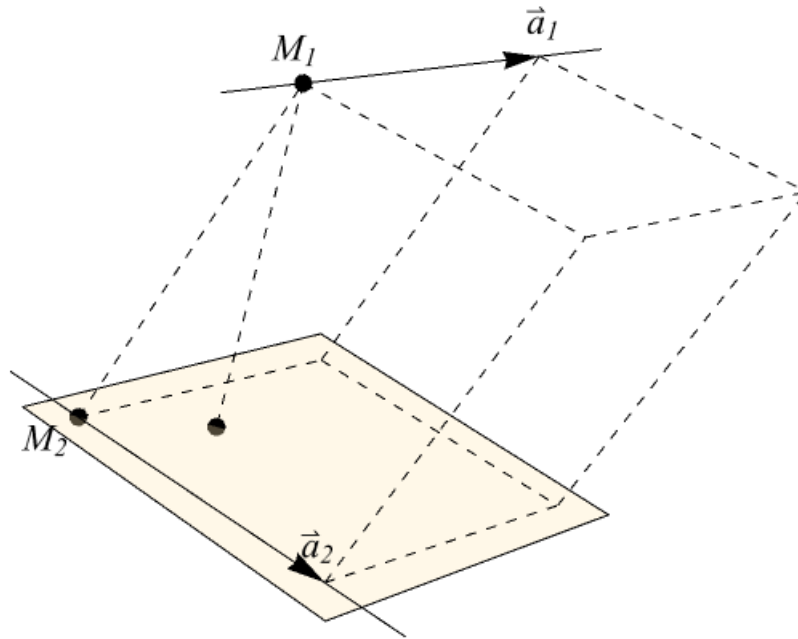


Рисунок 1.12 – Расстояние между скрещивающимися прямыми

этого пучка можно провести, если задать некоторый направляющий или нормальный вектор.

Интерес представляет случай, если известны некоторые две прямые, задающие пучок. Пусть они заданы своими общими уравнениями:  $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Докажем, что уравнение пучка, задаваемого двумя этими прямыми, следующее:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (1.35)$$

◆ Пусть некоторая прямая  $\Delta_3 : A_3x + B_3y + C_3 = 0$  принадлежит этому же пучку прямых. Тогда найдётся некоторая точка с координатами  $(x_0, y_0)$  – центр пучка, – которая удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0, \\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{3,1}. \quad (1.36)$$

Таким образом, получили, что однородная СЛАУ (1.36) имеет ненулевое решение. Это возможно тогда и только тогда, когда она является вырожденной,

что равносильно  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$ . По свойству определителей отсюда следует,

что третья строка линейно выражается через две другие:  $A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2$ ,  $B_3 = \alpha \times B_1 + \beta B_2$ ,  $C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2$ , и отсюда получается уравнение (1.35).

Обратное, очевидно, тоже выполняется: если  $\Delta_3$  удовлетворяет уравнению (1.35) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ , то при подстановке координат центра пучка имеем  $A_1x + B_1y + C_1 = 0 \& A_2x + B_2y + C_2 = 0 \Rightarrow \alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ , т.е. центр пучка лежит на прямой  $\Delta_3$ , а значит,  $\Delta_3$  принадлежит пучку. ■

Рассматривая произвольное множество прямых  $\Delta_i : A_ix + B_iy + C_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\Delta_i \neq \Delta_j$ ,  $i \neq j$ , докажем следующее утверждение: прямые  $\Delta_i$  проходят через одну точку тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \dots & \dots \\ A_n & B_n \end{pmatrix} = 2, \text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{pmatrix} = 2. \quad (1.37)$$

♦ Обозначим матрицу из первого равенства (1.37) через  $M$ , матрицу из второго –  $M'$ .

Достаточность. Из первого равенства (1.37) следует, что найдутся пересекающиеся прямые. Пусть это будут прямые  $\Delta_k$  и  $\Delta_l$ . Из второго равенства исходя из теоремы о ранге матрицы следует, что для всякого  $m \neq k$ ,  $m \neq l$  имеет

место следующее равенство:  $\begin{vmatrix} A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \\ A_m & B_m & C_m \end{vmatrix} = 0$ . Это означает, что уравнение пря-

мой  $\Delta_m$  линейно выражается через уравнения прямых  $\Delta_k$  и  $\Delta_l$ , что согласно формуле (1.35) и означает принадлежность всех прямых пучку, заданному прямыми  $\Delta_k$  и  $\Delta_l$ .

Необходимость. Всякие две прямые  $\Delta_k$  и  $\Delta_l$  пересекаются, откуда следует, что  $\vec{n}_k \times \vec{n}_l \neq \vec{0}$ , где  $\vec{n}_k$  и  $\vec{n}_l$  – их нормальные векторы. Согласно формуле (1.32), это равносильно тому, что  $\begin{vmatrix} A_k & B_k \\ A_l & B_l \end{vmatrix} \neq 0$ . Таким образом, в матрице  $M$

найден минор второго порядка, отличный от нуля, значит,  $\text{rank } M = 2$ . Для доказательства второго равенства из (1.37) достаточно показать, что  $\forall k, l, m$

$$\begin{vmatrix} A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \\ A_m & B_m & C_m \end{vmatrix} = 0. \text{ Доказывается это аналогично тому, как это проделано в дока-}$$

зательстве формулы (1.35). ■

Если допустить, что во множестве  $\Delta_i : A_i x + B_i y + C_i = 0, i = \overline{1, n}$ , могут быть совпадающие прямые, то формула (1.37) остаётся в силе, за исключением случая, когда  $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n$ . В этом случае получим  $\text{rank } M = \text{rank } M' = 1$ .

### 1.3.5. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Рассмотрим две плоскости  $\Pi_1 : \vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0, \Pi_2 : \vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ . Возможны следующие случаи:

- $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \perp (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Leftrightarrow \Pi_1 = \Pi_2$  – плоскости **совпадают**.
- $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \not\perp (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Leftrightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_2$ . Для **параллельных** плоскостей можно определить расстояние, которое равно длине проекции вектора  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  на ось, проведённую параллельно нормальному вектору  $\vec{n} \parallel \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

(Рисунок 1.13):  $d(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$ . Его также можно вычислить как

модуль разности отклонений некоторой точки от этих плоскостей:  
 $d(\Pi_1, \Pi_2) = |\delta(M, \Pi_1) - \delta(M, \Pi_2)|$ .

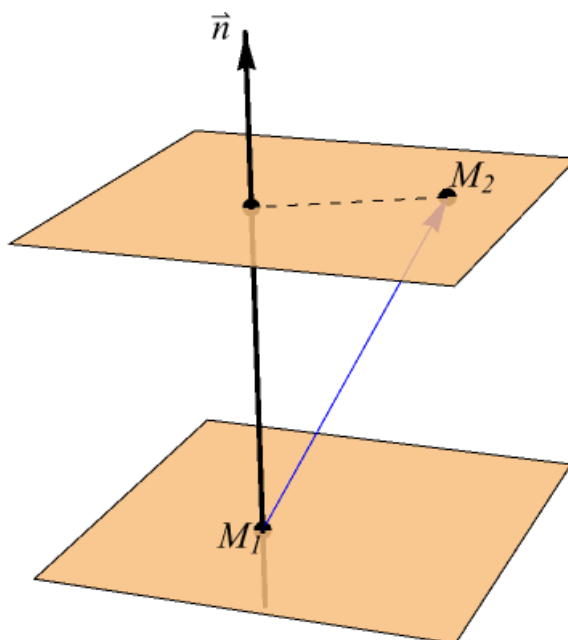


Рисунок 1.13 – Расстояние между двумя параллельными плоскостями

- $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow$  плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  **пересекаются** по некоторой прямой. Её направляющий вектор должен быть ортогонален обоим векторам  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , например,  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  может служить направляющим вектором прямой-

пересечения плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Пересечение двух плоскостей обычно задаётся системой двух уравнений:

$$\begin{cases} \Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Угол между двумя пересекающимися плоскостями можно определить как угол между их нормальными векторами:  $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ .

**Пучок плоскостей.** Пучком плоскостей называется множество плоскостей, проходящих через некоторую прямую, называемой **осью** пучка. Для задания пучка плоскостей достаточно двух пересекающихся плоскостей. Обозначим их  $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Докажем, что всякая плоскость из пучка, определяемого плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , может быть задана следующим уравнением:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (1.38)$$

◆ Пусть плоскость  $\Pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$  проходит через пересечение плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Тогда следующая система имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3. \end{cases}$$

Такое возможно только в случае, если  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$ . Это означает, что

третья строка в этом определителе должна линейно выражаться через две остальные:  $A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2$ ,  $B_3 = \alpha B_1 + \beta B_2$ ,  $C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2$ . Наконец, если рассматривать некоторую точку  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ , то для неё должно выполняться  $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 = -D_1$  и  $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 = -D_2$ , значит,  $-D_3 = A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 = (\alpha A_1 + \beta A_2)x_0 + (\alpha B_1 + \beta B_2)y_0 + (\alpha C_1 + \beta C_2)z_0 = \alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) = -\alpha D_1 - \beta D_2 \Rightarrow D_3 = \alpha D_1 + \beta D_2$ , откуда и следует формула (1.38).



Верно и обратное: если некоторая плоскость удовлетворяет формуле (1.38), то она принадлежит пучку плоскостей, определяемому плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . ■

Из этого доказательства следует следующее свойство пучка плоскостей: нормальные векторы плоскостей, проходящих через одну прямую, компланарны.

Рассматривая множество плоскостей  $\Pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\Pi_i \neq \Pi_j$ ,  $i \neq j$ , докажем, что они проходят через одну прямую тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix} = 2. \quad (1.39)$$

♦ Обозначим первую матрицу в равенствах (1.39) через  $M$ , вторую – через  $M'$ .

**Достаточность.** Из равенства  $\text{rank } M = 2$  следует, что нормальные векторы всех плоскостей компланарны (ведь все миноры третьего порядка равны нулю), а значит, найдётся некоторый им всем ортогональный вектор  $\vec{a}$ :  $\vec{a} \perp \vec{n}_i \Rightarrow \vec{a} \parallel \Pi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Осталось доказать, что существует общая точка для всех плоскостей  $\Pi_i$ . Из равенств  $\text{rank } M = \text{rank } M' = 2$  следует, что столбец  $(D_1, D_2, \dots, D_n)^T$  должен линейно выражаться через три других столбца:  $(D_1, D_2, \dots, D_n)^T = \alpha(A_1, A_2, \dots, A_n)^T + \beta(B_1, B_2, \dots, B_n)^T + \gamma(C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ . Таким образом, уравнения плоскостей обретают вид  $\Pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + (\alpha A_i + \beta \times B_i + \gamma C_i) = 0$ . Несложно проверить, что точка с координатами  $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$  принадлежит всем плоскостям.

**Необходимость.** Равенство  $\text{rank } M = 2$  следует из компланарности нормальных векторов плоскостей  $\Pi_i$  из одного пучка плоскостей. Рассмотрим две произвольные плоскости  $\Pi_k$  и  $\Pi_l$ . Остальные плоскости должны линейно выражаться через них согласно формуле (1.38). Отсюда следует равенство  $\text{rank } M' = 2$ . ■

Если рассматривать множество плоскостей, среди которых могут оказаться совпадающие, то равенства (1.39) остаются справедливыми, кроме случая, если  $\Pi_1 = \Pi_2 = \dots = \Pi_n$ . Тогда получится  $\text{rank } M = \text{rank } M' = 1$ .

**Связка плоскостей.** Связкой плоскостей называется множество плоскостей, проходящих через некоторую точку. Связка может определяться точкой или тремя непараллельными плоскостями. Если заданы три плоскости  $\Pi_i : A_i x +$

$+B_i y + C_i z + D_i = 0, i = \overline{1,3}$ , то произвольная плоскость из задаваемой этими тремя плоскостями связки имеет следующее уравнение:

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) + \gamma(A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3) = 0. \quad (1.40)$$

Заметим, что если в формуле (1.40) один из коэффициентов положить равным нулю, то получим уравнение пучка по двум плоскостям. Таким образом, всякий пучок плоскостей является подмножеством связки, для задания которой можно выбрать третью, непараллельную плоскость.

Множество плоскостей  $\Pi_i : A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = \overline{1,n}$ , входит в одну связку тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix} = 3. \quad (1.41)$$

Исключение составляют случаи, когда все плоскости совпадают либо проходят через одну прямую. В этих случаях ранги обеих матриц равны 1 и 2 соответственно. Формулы (1.40) и (1.41) доказываются аналогично формулам (1.36) и (1.37).

### 1.3.6. Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}$  и плоскость  $\Pi : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ . Возможны следующие ситуации:

- $\vec{n} \perp \vec{a} \ \& \ \vec{n} \perp \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Leftrightarrow \Delta \in \Pi$ . Прямая **лежит** на плоскости.
- $\vec{n} \perp \vec{a} \ \& \ \vec{n} \not\perp \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Leftrightarrow \Delta \parallel \Pi$ . Прямая и плоскость **параллельны**. При этом возможно задать расстояние между прямой и плоскостью:  
 $d(\Delta, \Pi) = d(M_1, \Pi) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ . Если расстояние между прямой и плоскостью оказывается равным нулю, то прямая лежит на плоскости.
- $\vec{n} \not\perp \vec{a} \Leftrightarrow$  прямая и плоскость **пересекаются** в одной точке. Точке пересечения соответствует параметр  $t = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}$ . Угол между прямой и

плоскостью, т.е. угол между прямой  $\Delta$  и её ортогональной проекцией на плоскость  $\Pi$  (в случае  $\vec{n} \nparallel \vec{a}$ ), можно определить по следующей формуле:

$$\alpha = \angle(\Delta, \Pi) = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{n}, \vec{a}) = \beta, \quad (1.42)$$

$$\sin \alpha = |\cos \beta| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| |\vec{a}|}.$$

В случае  $\vec{n} \parallel \vec{a}$  по определению считается  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

### 1.3.7. Взаимное расположение отрезков на плоскости

На некоторой плоскости с ПДСК  $Oxy$  рассмотрим два отрезка, заданные своими конечными точками:  $AB$  и  $CD$ , где точки имеют координаты  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$ ,  $C(x_c, y_c)$ ,  $D(x_d, y_d)$ . Тогда возможны следующие случаи:

-  $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ . Тогда два отрезка лежат на пересекающихся прямых, и два отрезка **пересекаются** тогда и только тогда, когда отрезок  $AB$  пересекает прямую  $CD$ , а отрезок  $CD$  пересекает прямую  $AB$  (Рисунок 1.14). Это утверждение равносильно тому, что точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $CD$ , а точки  $C$  и  $D$  – от прямой  $AB$ . Определить это можно, зная общие уравнения прямых  $AB: A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $CD: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  и подставив в их левые части координаты точек  $C$  и  $D$ ,  $A$  и  $B$  соответственно:

$$\text{отрезки пересекаются} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1x_c + B_1y_c + C_1)(A_1x_d + B_1y_d + C_1) < 0, \\ (A_2x_a + B_2y_a + C_2)(A_2x_b + B_2y_b + C_2) < 0. \end{cases} \quad (1.43)$$

- Если в системе (1.43) одно из неравенств выполняется, а вместо второго имеет место равенство, то это означает, что один из концов одного отрезка лежит на другом – отрезки **касаются** (Рисунок 1.15а).

- Если в системе (1.43) вместо обоих неравенств имеют место равенства, то это означает, что два отрезка имеют общую точку конца – они **смежные** (Рисунок 1.15б).

- Хотя бы одно из неравенств в системе (1.43) нарушается тогда и только тогда, когда отрезки  $AB$  и  $CD$  не пересекаются.

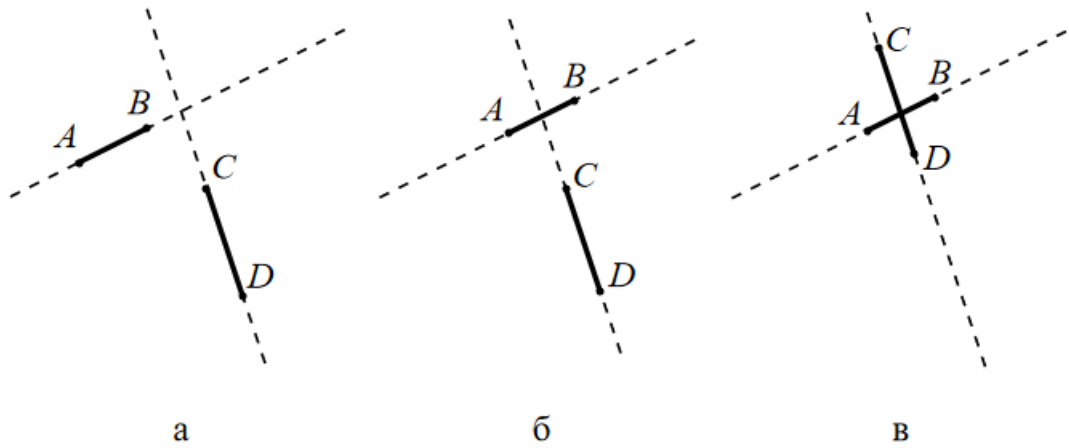


Рисунок 1.14 – Взаимное расположение отрезков на пересекающихся прямых (а – отрезок  $AB$  не пересекает прямую  $CD$ , б – отрезок  $AB$  пересекает прямую  $CD$ , но отрезок  $CD$  не пересекает прямую  $AB$ , в – оба отрезка пересекают нужные прямые, следовательно, пересекают друг друга)

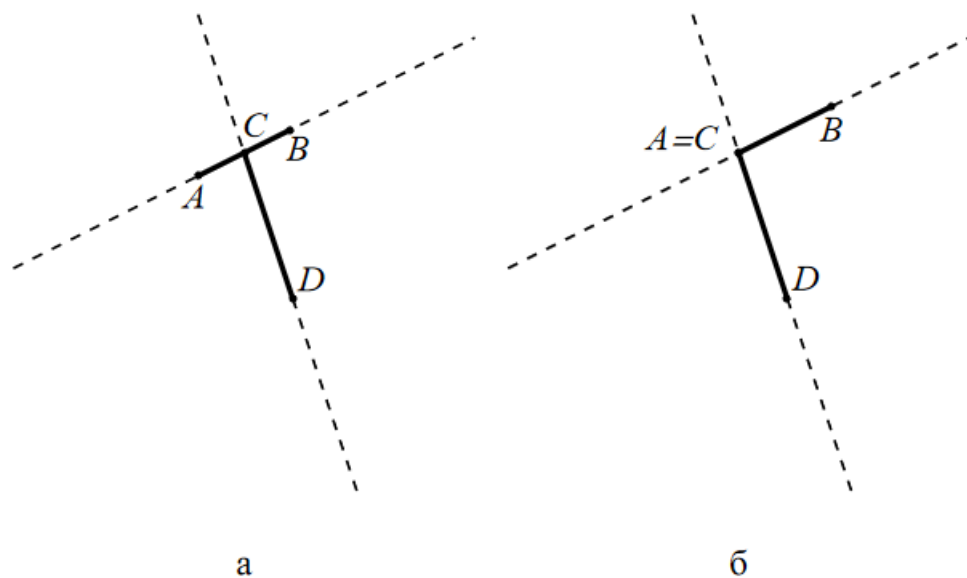


Рисунок 1.15 – Касающиеся (а) и смежные (б) отрезки

- $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \nparallel \overline{AC} \Leftrightarrow$  отрезки лежат на параллельных прямых, следовательно, **не пересекаются**.
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{AC} \Leftrightarrow$  отрезки лежат на одной прямой. При этом могут иметь место случаи, продемонстрированные на рисунке 1.16. Для определения взаимного положения отрезков на одной прямой удобнее всего использовать параметрические уравнения прямой. Например, по точке середины отрезка  $AB$  и направляющему вектору, отложенному от этой точки до точки  $B$  получается следующая система параметрических уравнений:

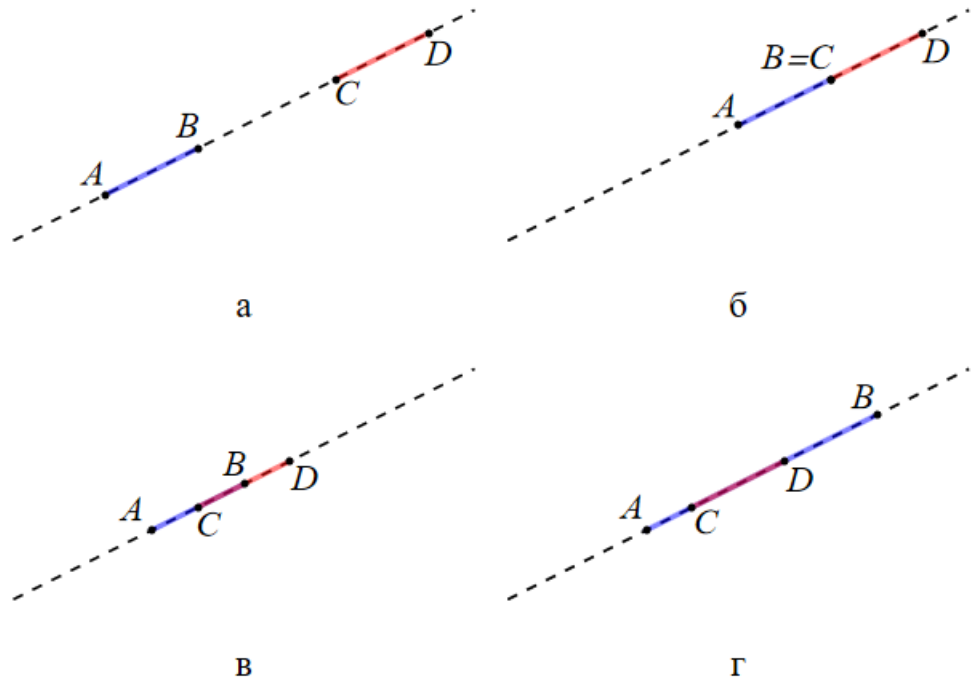


Рисунок 1.16 – Взаимное положение отрезков на прямой: а – отрезки не пересекаются, б – отрезки смежные, в – отрезки частично накладываются, г – один отрезок лежит на другом

$$\begin{cases} x = \frac{x_a + x_b}{2} + \frac{x_b - x_a}{2}t, \\ y = \frac{y_a + y_b}{2} + \frac{y_b - y_a}{2}t. \end{cases} \quad (1.44)$$

По уравнениям (1.44) значению параметра  $t = -1$  соответствует точка  $A$ , при  $t = 1$  получается точка  $B$ . Значения параметров для точек  $C$  и  $D$  можно получить по формуле (1.29). Обозначим их  $t_c$  и  $t_d$ . По ним расположение отрезков определяется следующим критериям:

- $|t_c| > 1 \& |t_d| > 1 \& t_c t_d > 0 \Leftrightarrow$  отрезки **не пересекаются**.
- Отрезки являются **смежными** тогда и только тогда, когда одно из двух первых неравенств из предыдущего пункта обращается в равенство.
- $|t_c| \leq 1 \& |t_d| \leq 1 \Leftrightarrow$  отрезок  $CD$  **лежит** на отрезке  $AB$ .
- $|t_c| \geq 1 \& |t_d| \geq 1 \& t_c t_d < 0 \Leftrightarrow$  отрезок  $AB$  **лежит** на отрезке  $CD$ .
- Если при этом один из параметров  $t_c$  и  $t_d$  равен  $-1$ , а другой равен  $1$ , то два отрезка **совпадают**.
- $(|t_c| < 1 \& |t_d| > 1) \vee (|t_c| > 1 \& |t_d| < 1) \Leftrightarrow$  отрезки **накладываются** друг на друга.

## 1.4. Плоские полигоны и их свойства

На плоскости с ПДСК  $Oxy$  рассмотрим некоторую последовательность точек  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n), n \geq 3$ . **Полигоном** с вершинами в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется множество точек, ограниченных ломанной замкнутой линией  $A_1A_2\dots A_nA_1$ . Эта ломанная линия называется **границей** полигона, отрезки  $A_iA_{i+1}, i = \overline{1, n}$  (где  $A_{n+1} = A_1$ ) – **сторонами**, или **рёбрами** полигона, точки  $A_i$  – **вершинами** полигона. Полигон, ограниченный границей  $A_1A_2\dots A_nA_1$ , будем также обозначать  $A_1A_2\dots A_nA_1$ .

### 1.4.1. Угол между векторами и его свойства

Для двух векторов  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , определённых на плоскости с ПДСК  $Oxy$ , определим понятие угла между ними (и обозначим  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ) следующим образом: **углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называется величина угла меньше развёрнутого, на который нужно повернуть вектор  $\vec{a}$ , чтобы он стал сонаправлен вектору  $\vec{b}$ , причём этот угол положительный, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и отрицательный при повороте по часовой стрелке (Рисунок 1.17). Таким образом, знак  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  положительный, если векторы  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  образуют правую пару векторов, либо отрицательный, если пара векторов  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  левая. В случае  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  знак угла считается нулевым,  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$ .

**Свойства угла между векторами.** Для произвольных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выполняются следующие свойства:

1.  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in (-\pi, \pi]$ .

2.  $\angle(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ .

3.  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) + \angle(\vec{b}, \vec{a}) = \begin{cases} 2\pi, \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

4.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0: \angle(\alpha\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \beta\vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ .

5.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < 0, \beta < 0: \angle(\alpha\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \beta\vec{b}) = \begin{cases} \angle(\vec{a}, \vec{b}) - \pi, \angle(\vec{a}, \vec{b}) > 0, \\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) + \pi, \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 0. \end{cases}$

6.  $\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \angle(\vec{a}_2, \vec{a}_3) + \dots + \angle(\vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n) = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_n) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

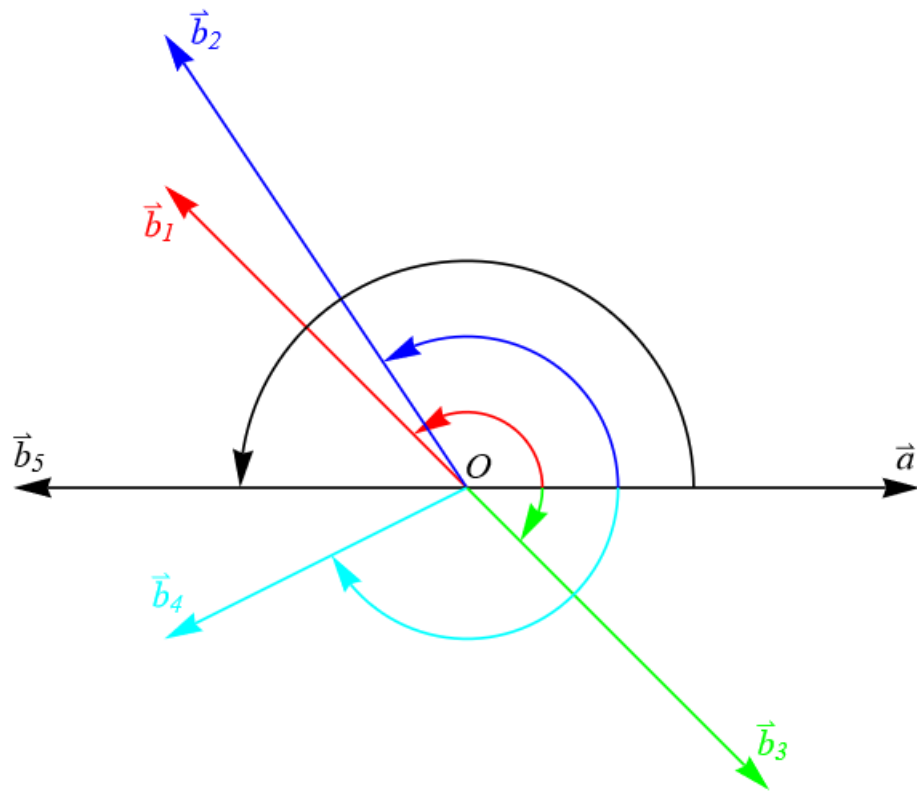


Рисунок 1.17 – Вектор  $\vec{a}$  с векторами  $\vec{b}_1$  и  $\vec{b}_2$  образует положительные углы, с  $\vec{b}_3$  и  $\vec{b}_4$  – отрицательные, а с вектором  $\vec{b}_5 \updownarrow \vec{a}$  – угол, равный  $\pi$

♦ Отложим все векторы  $\vec{a}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , от одной точки. Тогда ясно, что сумма этих углов есть величина угла суммарного поворота вектора  $\vec{a}_1$  к вектору  $\vec{a}_2$ , затем от этого направления к вектору  $\vec{a}_3$  и т.д. до вектора  $\vec{a}_n$ . Это равносильно повороту вектора  $\vec{a}_1$  сразу к вектору  $\vec{a}_n$ , перед которым, возможно, совершен поворот на целое число полных углов против или по часовой стрелке. ■

7. Углы  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$ ,  $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b})$  имеют один знак, причём  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) + \angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b})$ .

♦ При  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$  этот факт очевидным образом следует из правила параллелограмма сложения векторов (Рисунок 1.18). При  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , как несложно проверить, это утверждение также имеет место. ■

8. Ось  $\Delta: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ , сонаправленная вектору  $\vec{a}$ , делит плоскость  $Oxy$  на две полуплоскости: для произвольной точки  $M_L$  одной из полуплоскостей (**левой**) справедливо следующее утверждение:  $\forall M_\Delta \in \Delta: \angle(\vec{a}, \overrightarrow{M_\Delta M_L}) > 0$ , для точки  $M_R$  из **правой** полуплоскости выполняется следующее:  $\forall M_\Delta \in \Delta: \angle(\vec{a}, \overrightarrow{M_\Delta M_R}) < 0$ . Так, на рисунке 1.17 векторы  $\vec{b}_1$  и

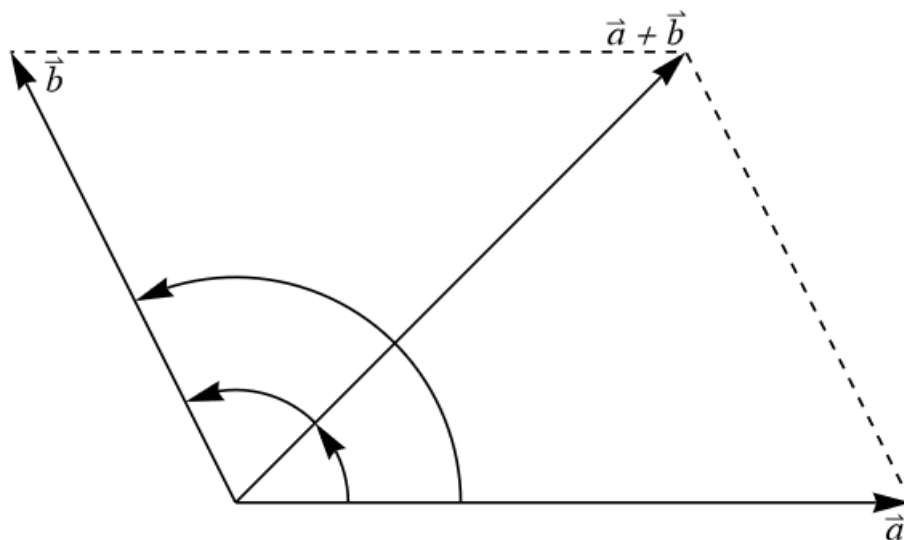


Рисунок 1.18 – Углы между двумя векторами и их суммой

$\vec{b}_2$  отложены от точки  $O$  в левой полуплоскости от оси с началом в точке  $O$  и направлением вдоль вектора  $\vec{a}$ , а векторы  $\vec{b}_3$  и  $\vec{b}_4$  – в правой. Если поменять направление оси на противоположное, то левая полуплоскость станет правой, правая – левой.

Как известно, абсолютную величину угла между двумя векторами можно вычислить, пользуясь формулой  $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ . С другой стороны, знак угла

$\angle(\vec{a}, \vec{b})$  зависит от ориентации пары векторов  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Эту ориентацию можно выяснить, вычислив векторное произведение этих двух векторов: пара  $(\vec{a}, \vec{b})$

является правой, если величина векторного произведения, равная  $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ , где

$a_x, a_y$  – координаты вектора  $\vec{a}$ ,  $b_x, b_y$  – координаты вектора  $\vec{b}$ , – положитель-

ная; левой, если  $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} < 0$ ; состоит из коллинеарных векторов, если

$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$ . Таким образом, получим следующую формулу для вычисления уг-

ла между двумя векторами:



$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, & \vec{a} \not\parallel \vec{b}, \\ 0, & \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, \\ \pi, & \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Замечание. В дальнейшем не будем различать понятия величины векторного произведения двух векторов на плоскости от самого векторного произведения. По определению будем считать  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ .

### 1.4.2. Самонепересекающиеся и выпуклые полигоны

Полигон  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  называется **самонепересекающимся**, если никакая пара несмежных рёбер этого полигона не имеет общей точки. Внутренние точки всякого полигона и точки, не принадлежащие ему (будем называть такие точки **внешними** для полигона) лежат по разные стороны от границы  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ . Значит, в самопересекающемся полигоне при пересечении некоторых несмежных рёбер  $A_{i-1} A_i$  и  $A_{j-1} A_j$  в точке  $A'$  внутренней областью полигона является какая-то одна пара вертикальных углов между прямыми  $A_{i-1} A_i$  и  $A_{j-1} A_j$ , и эти углы лежат по разные стороны как от прямой  $A_{i-1} A_i$ , так и от прямой  $A_{j-1} A_j$  (Рисунок 1.19).

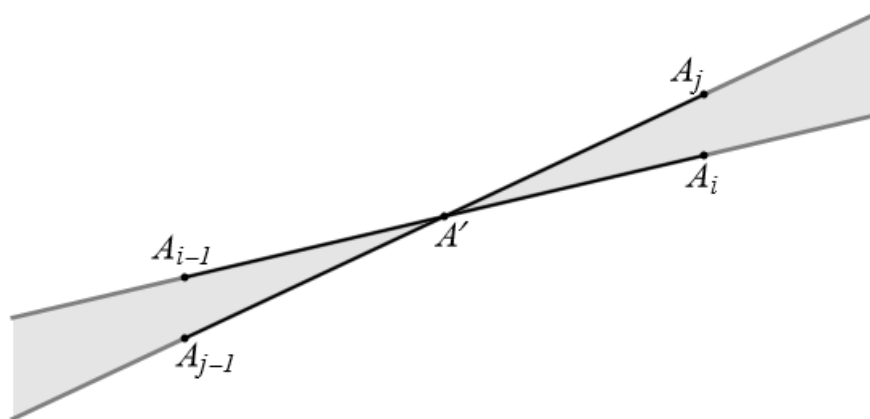


Рисунок 1.19 – Внутренняя область самопересекающегося полигона в окрестности точки пересечения несмежных рёбер

Для самонепересекающегося же полигона имеет место противоположное утверждение: для всякой внутренней точки любого ребра найдётся некоторая её

окрестность, все внутренние точки полигона в которой лежат по одну сторону – левую или правую – от этого ребра. Таким образом, можно говорить о **лево-стороннем** и **право-стороннем обходе** самонепересекающегося полигона, т.е. выборе обхода по периметру полигона, при котором внутренняя область остаётся всегда либо слева, либо справа от направляющих векторов сторон (Рисунок 1.20).

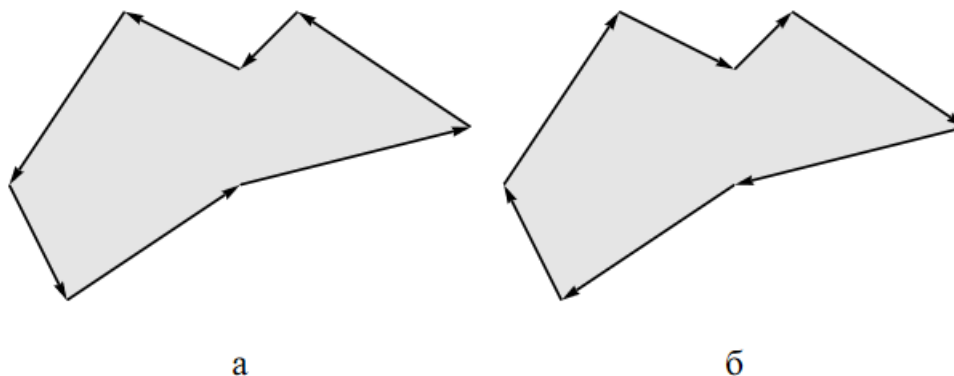


Рисунок 1.20 – Обход самонепересекающегося полигона (а – левосторонний, б – правосторонний)

Важным свойством самонепересекающегося полигона является постоянство суммы углов между направляющими векторами его рёбер:

$$\begin{aligned} & \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) + \dots + \angle(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}) + \angle(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \\ & = \begin{cases} 2\pi, \text{ если обход } A_1A_2\dots A_nA_1 \text{ левосторонний,} \\ -2\pi, \text{ если обход } A_1A_2\dots A_nA_1 \text{ правосторонний.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.46)$$

♦ Докажем формулу (1.46) (случай левостороннего обхода полигона) методом индукции. В случае  $n = 3$  имеем три направляющих вектора, которые в сумме дают нулевой вектор, т.е.  $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{A_3A_1} = -\vec{a} - \vec{b}$ . По свойству углов между векторами и их суммой углы  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$  и  $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b})$  одного знака, и  $\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) + \angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ . В случае левостороннего обхода  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) > 0$ , и тогда имеем следующее:

$$\begin{aligned} & \angle(\vec{a}, \vec{b}) + \angle(\vec{b}, -\vec{a} - \vec{b}) + \angle(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a}) = \left( \underline{\underline{\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})}} + \underline{\underline{\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b})}} \right) + \underline{\underline{\angle(\vec{b}, -\vec{a} - \vec{b})}} + \\ & \underline{\underline{\angle(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a})}} = \underline{\underline{\angle(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a})}} + \underline{\underline{\angle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})}} + \underline{\underline{\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b})}} + \underline{\underline{\angle(\vec{b}, -\vec{a} - \vec{b})}} = \underline{\underline{\pi}} + \underline{\underline{\pi}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (1.46) доказана для треугольника.

Теперь предположим, что формула (1.46) верна для  $n = 3, 4, \dots, k - 1$ . Докажем её для  $n = k$ . Рассмотрим самонепересекающийся полигон  $AA_1A_2\dots A_lBB_1B_2\dots B_mA$ ,  $l + m = k - 2$ , в котором можно провести внутреннюю диагональ  $AB$  (на рисунке 1.21  $l = 6, m = 7$ )<sup>1</sup>. Тогда полигоны  $AA_1A_2\dots A_lBA$  и  $BB_1B_2\dots B_mAB$  являются самонепересекающимися, и по предположению индукции справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA_1}) &= 2\pi, \\ \angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{B_mA}, \overrightarrow{AB}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) &= 2\pi. \end{aligned} \quad (1.47)$$

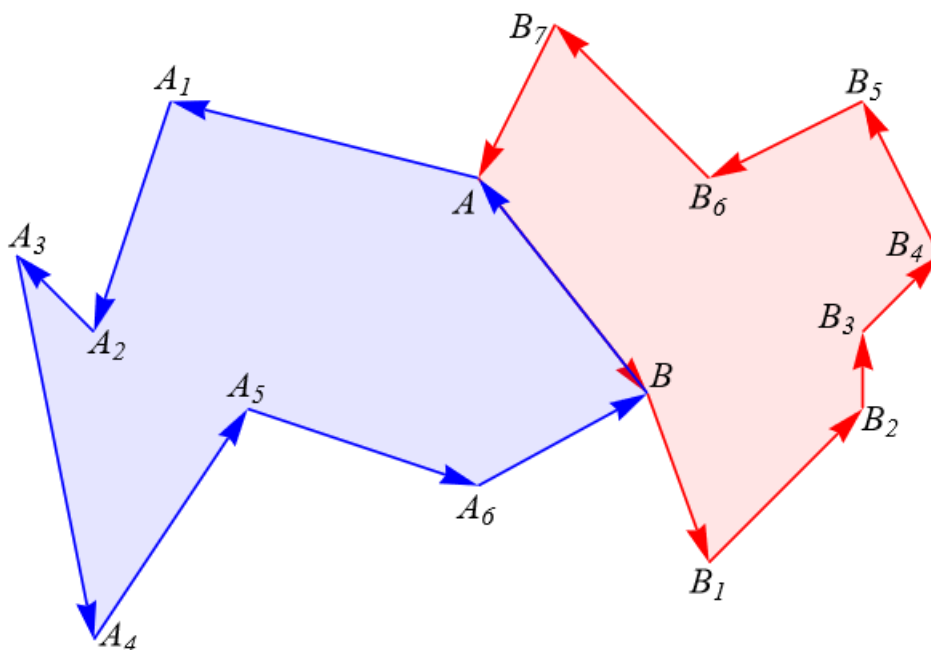


Рисунок 1.21 – Деление самонепересекающегося полигона на две части внутренней диагональю

Все углы из равенств (1.47), кроме  $\angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BA})$ ,  $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA_1})$ ,  $\angle(\overrightarrow{B_mA}, \overrightarrow{AB})$ ,  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1})$ , являются также углами между векторами исходного контура  $AA_1A_2\dots A_lBB_1B_2\dots B_mA$ . Таким образом, нужно выразить через эти четыре угла углы  $\angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BB_1})$  и  $\angle(\overrightarrow{B_mA}, \overrightarrow{AA_1})$ :

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BB_1}) &= \angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) + 2\pi k_1 = \\ &= \angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) + \pi(2k_1 + 1), \end{aligned} \quad (1.48)$$

<sup>1</sup> Такая диагональ всегда существует, доказательство продемонстрировано в видео: [https://www.youtube.com/watch?v=2x4ioToqe\\_c](https://www.youtube.com/watch?v=2x4ioToqe_c)

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{B_m A}, \overrightarrow{AA_1}) &= \angle(\overrightarrow{B_m A}, \overrightarrow{AB}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA_1}) + 2\pi k_2 = \\ &= \angle(\overrightarrow{B_m A}, \overrightarrow{AB}) + \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA_1}) + \pi(2k_2 + 1). \end{aligned} \quad (1.48)$$

С одной стороны, все углы из равенств (1.48) по определению находятся в промежутке  $(-\pi, \pi]$ , откуда следует  $2k_i + 1 > -3 \Rightarrow k_i > -2, i = \overline{1, 2}$ . С другой стороны, по свойству левостороннего обхода должны выполняться неравенства  $\angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BA}) > \angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BB_1}), \angle(\overrightarrow{B_m A}, \overrightarrow{AB}) > \angle(\overrightarrow{B_m A}, \overrightarrow{AA_1})$ , так как  $AB$  – внутренняя диагональ исходного полигона (Рисунок 1.22), и тогда из равенств (1.48) следует следующее:

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BA}) &> \angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BB_1}) = \angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) + \pi(2k_1 + 1), \\ 0 &> \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) + \pi(2k_1 + 1), \\ \pi(-2k_1 - 1) &> \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) > -\pi, \\ -2k_1 - 1 &> -1, \\ k_1 &< 0. \end{aligned}$$

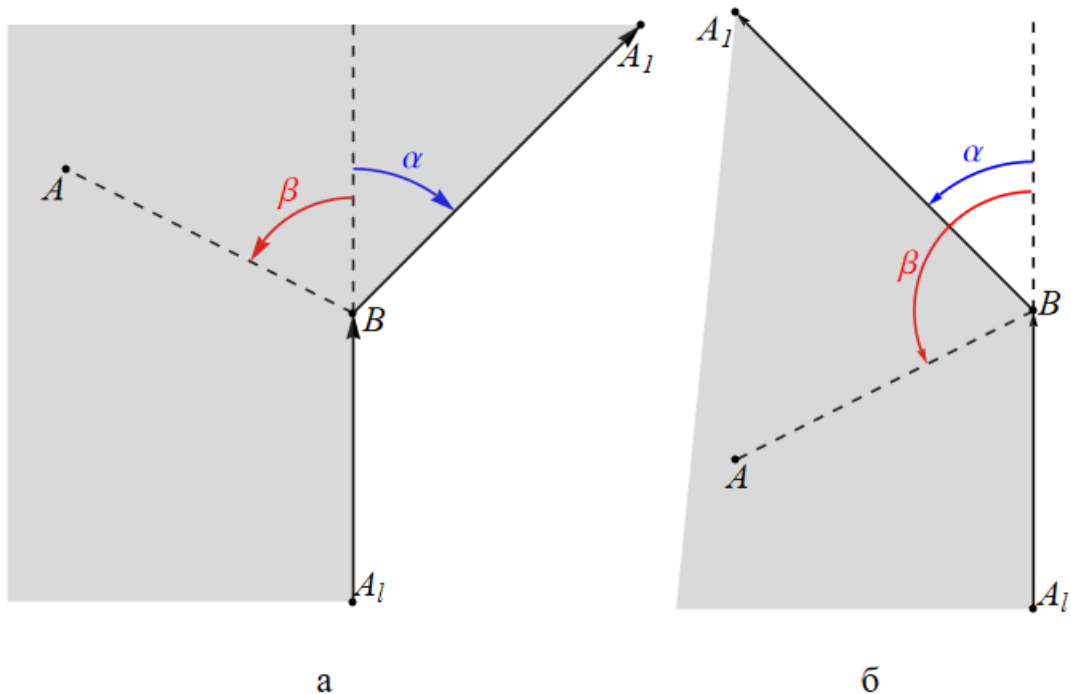


Рисунок 1.22 – При левостороннем обходе самонепересекающегося полигона для внутреннего отрезка  $BA$ , проведённого из угла  $\angle A_i B A_1$ , будет всегда выполняться  $\alpha < \beta$ , где  $\alpha = \angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BB_1}), \beta = \angle(\overrightarrow{A_i B}, \overrightarrow{BA})$  (а – угол  $\alpha$  отрицательный, б – угол  $\alpha$  положительный)

Тогда получается, что  $k_1 = -1$ . Аналогично имеем также  $k_2 = -1$ , и тогда для полигона  $AA_1A_2\dots A_lBB_1B_2\dots B_mA$  получаем следующее:

$$\begin{aligned} & \angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{A_{l-1}A_l}, \overrightarrow{A_lB}) + \angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BB_1}) + \angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{B_{m-1}B_m}, \\ & \overrightarrow{B_mA}) + \angle(\overrightarrow{B_mA}, \overrightarrow{AA_1}) \stackrel{(1.48)}{=} \left( \angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{A_{l-1}A_l}, \overrightarrow{A_lB}) + \angle(\overrightarrow{A_lB}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{BA}, \right. \\ & \left. \overrightarrow{AA_1}) \right) + \left( \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) + \angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{B_{m-1}B_m}, \overrightarrow{B_mA}) + \angle(\overrightarrow{B_mA}, \overrightarrow{AB}) \right) - \underline{\underline{\pi}} - \\ & \quad \stackrel{(1.47)}{-\underline{\underline{\pi}}} = 2\pi + 2\pi - 2\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что формула (1.46) выполняется для полигона с  $k$  вершинами при условии, что она же выполнена для полигонов с  $l$  и  $m$  вершинами,  $l, m < k$ . Выше доказана формула для  $n = 3$ , следовательно, она выполняется и для  $n = 4, 5, 6, \dots$  ■

Геометрическое множество  $\Omega$  называется **выпуклым**, если всякий отрезок, оба конца которого принадлежат этому множеству, сам целиком лежит в  $\Omega$ . Выпуклый полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$  можно также определить как полигон, у которого все точки (как граничные, так и внутренние) находятся по одну сторону от прямых  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ . Из этих определений следует, что всякий выпуклый полигон является самонепересекающимся, и для него тоже можно определить лево- и правосторонний обход.

**Критерий выпуклости полигонов.** Полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$  является выпуклым тогда и только тогда, когда все углы  $\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}), \angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}), \dots, \angle(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1})$  одного знака, кроме, быть может, некоторых нулевых (больше нуля при левостороннем обходе и меньше – при правостороннем), и у него нет самопересечений.

◆ **Необходимость.** Пусть полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$  – выпуклый. Из выпуклости следует самонепересекаемость полигона. Возможны следующие ситуации:

- Найдётся угол  $\angle(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$  с нулевым знаком. Этот угол не может равняться  $\pi$  в силу самонепересекаемости полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ , значит, он равен нулю.

- Среди углов  $\angle(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$  нет углов нулевого знака. Докажем, что углы  $\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4})$  одного знака. По определению выпуклого многоугольника точки  $A_1$  и  $A_4$  лежат по одну сторону от прямой  $A_2A_3$ . Тогда по

свойству б углов между векторами углы  $\angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4})$  должны быть либо оба больше нуля, либо оба меньше нуля (в зависимости, от того, в которой из полуплоскостей – левой или правой – лежат обе точки). Но  $\text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3}) = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3})$ , таким образом, углы  $\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4})$  действительно имеют один знак. Аналогично доказывается равенство знаков углов  $\angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5})$ , ...,  $\angle(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2})$ , откуда и следует утверждение из критерия.

Достаточность. Рассмотрим некоторый самонепересекающийся полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$ , у которого все углы  $\angle(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , одного знака. Предположим, что полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$  невыпуклый, и в нём найдётся сторона  $AB$ , по обе стороны от которой лежат некоторые вершины  $C$  и  $D$ . Без ограничения общности можно положить, что вершины  $C$  и  $D$  являются смежными (если это не так, то в участке границы полигона между вершинами  $C$  и  $D$  есть ребро, пересекающее прямую  $AB$ ). На рисунке 1.23а  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) > 0$ ,  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) < 0$ .

Свойство равенства знаков углов  $\angle(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$ , как было выяснено выше, равносильно тому, что вершины  $A_{i-1}$  и  $A_{i+2}$  находятся по одну сторону от прямой  $A_iA_{i+1}$ . Отсюда следует, что вершина  $B$  не может быть смежной ни с вершиной  $C$ , ни с вершиной  $D$ . Проведём ребро  $BB_1$ , для которого без ограничения общности можно положить  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) > \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) > 0$ , т.е. точки  $B_1$  и  $C$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ , причём прямая  $BB_1$  не пересекает отрезок  $CD$  (Рисунок 1.23б).

Обозначим через  $ABB_1B_2\dots B_nC$  участок границы полигона от точки  $A$  до точки  $C$ , проходящий через вершину  $B$ . Тогда  $\angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) > 0$ ,  $\angle(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_2B_3}) > 0$ , ...,  $\angle(\overrightarrow{B_{n-2}B_{n-1}}, \overrightarrow{B_{n-1}B_n}) > 0$ ,  $\angle(\overrightarrow{B_{n-1}B_n}, \overrightarrow{B_nC}) > 0$ .

Покажем, что отрезок  $BB_2$  не пересекает ломаную  $ABB_1B_2\dots B_nC$ . Для этого нужно показать, во-первых, что ни одна из точек  $B_3, B_4, \dots, B_n, C$  не находится внутри треугольника  $BB_1B_2$ , во-вторых – что ни одна из этих точек не лежит на отрезке  $BB_2$ .

Предположим, что найдётся участок ломаной  $B_iB_{i+1}\dots B_{j-1}B_j$ ,  $i < j$ , находящийся внутри этого треугольника. Без ограничения общности можно положить, что вершины  $B_i$  и  $B_j$  лежат на отрезке  $BB_2$  (если это не так, то можно ввести

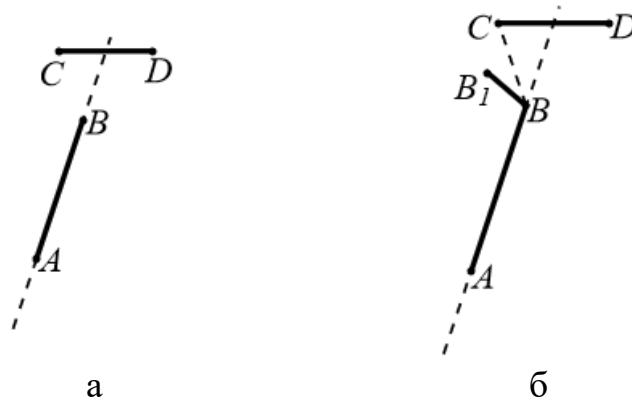


Рисунок 1.23 – Попытка построить невыпуклый полигон, удовлетворяющий критерию выпуклости

фиктивные вершины). Кроме того, положим  $\overrightarrow{B_2 B_i} \uparrow \uparrow \overrightarrow{B_i B_j} \uparrow \uparrow \overrightarrow{B_j B}^1$  (другими словами, точка входа ближе к  $B_2$ , чем точка выхода, Рисунок 1.24а), потому что в противном случае после точки  $B_j$  граница полигона пересечёт отрезок  $B_2 B_j$ , а затем отрезок  $B_i B$ , и у полученного участка границы внутри треугольника точка входа лежит ближе к  $B_2$ , а точка выхода – ближе к  $B$  (Рисунок 1.24б).

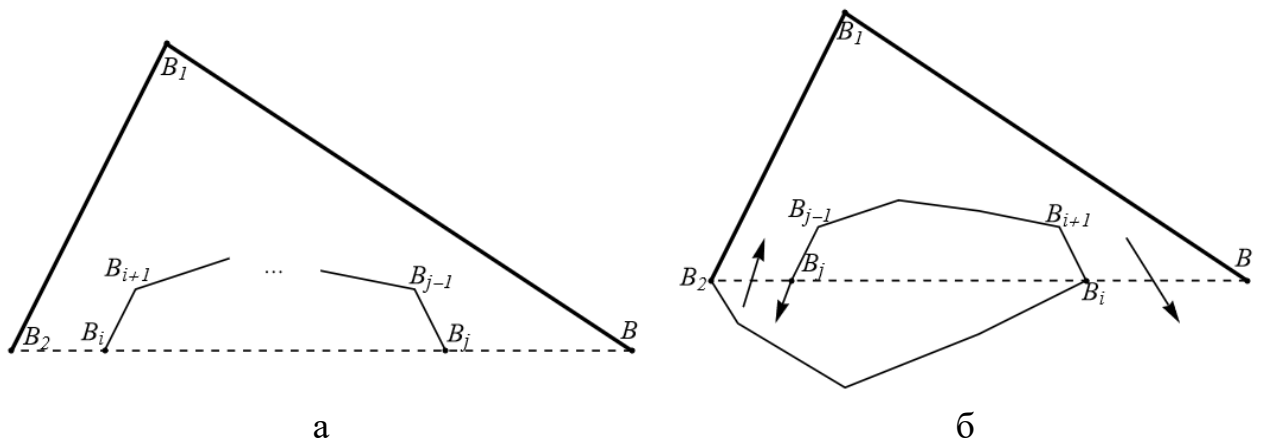


Рисунок 1.24 – Предположение о том, что отрезок  $BB_2$  пересекает участок границы исходного полигона  $ABB_1 B_2 \dots B_n C$ .

Полигон  $B_i B_{i+1} \dots B_{j-1} B_j B_i$  является самонепересекающимся, а следовательно,  $\angle(\overrightarrow{B_i B_{i+1}}, \overrightarrow{B_{i+1} B_{i+2}}) + \angle(\overrightarrow{B_{i+1} B_{i+2}}, \overrightarrow{B_{i+2} B_{i+3}}) + \dots + \angle(\overrightarrow{B_{j-2} B_{j-1}}, \overrightarrow{B_{j-1} B_j}) + \angle(\overrightarrow{B_{j-1} B_j}, \overrightarrow{B_j B_i}) + \angle(\overrightarrow{B_j B_i}, \overrightarrow{B_i B_{i+1}}) = 2\pi$ . Все углы этого равенства, кроме двух последних, являются углами между направляющими векторами рёбер самонепересекающегося полигона, и в силу положительности всех углов исходного полигона имеем  $\angle(\overrightarrow{B_i B_{i+1}}, \overrightarrow{B_{i+1} B_{i+2}}) + \angle(\overrightarrow{B_{i+1} B_{i+2}}, \overrightarrow{B_{i+2} B_{i+3}}) + \dots + \angle(\overrightarrow{B_{j-2} B_{j-1}}, \overrightarrow{B_{j-1} B_j}) < 2\pi$ , откуда полу-

<sup>1</sup> причём точка  $B_i$  может совпасть с  $B_2$ .

чаем  $\angle(\overrightarrow{B_{j-1}B_j}, \overrightarrow{B_jB_i}) + \angle(\overrightarrow{B_jB_i}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) > 0$ . Значит, хотя бы один из этих углов больше нуля, пусть  $\angle(\overrightarrow{B_jB_i}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) > 0$ . С другой стороны,  $\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_jB_i}, \overrightarrow{B_iB_1}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_iB_j}, \overrightarrow{B_iB_1}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_2B}, \overrightarrow{B_iB_1}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_2B}, \overrightarrow{BB_1}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) = -1$ , т.е.  $\angle(\overrightarrow{B_jB_i}, \overrightarrow{B_iB_1}) < 0$ . Таким образом, точки  $B_{i+1}$  и  $B_1$  лежат по разные стороны от прямой  $BB_2$ , чего быть не может, так как точка  $B_{i+1}$  лежит внутри треугольника  $BB_1B_2$ . Это противоречие доказывает, что ломаная  $B_2B_3\dots B_nC$  не проходит внутри треугольника  $BB_1B_2$ .

Теперь предположим, что есть некоторая точка  $B_i$ , лежащая на отрезке  $B_2B$ . Заметим, что точка  $B_3$  не лежит на этом отрезке, потому что в противном случае получим, что точки  $B_1$  и  $B_4$  лежат по одну сторону от прямой  $B_2B$ , что возможно, только если точка  $B_4$  находится внутри треугольника  $BB_1B_2$  (Рисунок 1.25).

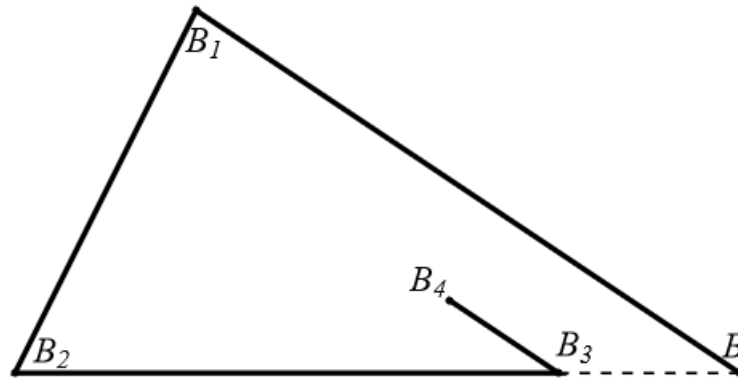


Рисунок 1.25 – Точки  $B$ ,  $B_2$  и  $B_3$  не могут лежать на одной прямой

Значит, без ограничения общности можно положить, что точки  $B_3, \dots, B_{i-1}$  не лежат на отрезке  $B_2B$ . Также положим, что на этом отрезке не лежит точка  $B_{i+1}$ . Тогда точки  $B_{i+1}$  и  $B_1$  лежат по разные стороны от прямой  $B_2B$ .

Покажем, что точки  $B_2$  и  $B_{i-1}$  лежат по разные стороны от прямой  $B_iB_{i+1}$ . Для этого нужно вычислить знаки углов:  $\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_iB_{i+1}}, \overrightarrow{B_iB_2}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_iB_2}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_2B_i}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_2B}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_2B}, \overrightarrow{B_iB_1}) = -1$ ,  $\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_iB_{i+1}}, \overrightarrow{B_iB_{i-1}}) = -\text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_iB_{i-1}}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{B_{i-1}B_i}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) = 1$ . Значит, ломаная  $B_2B_3\dots B_{i-1}$  пересекает прямую  $B_iB_{i+1}$ , причём точка пересечения лежит за точкой  $B_{i+1}$ . Отсюда с учётом самонепересекаемости контура  $B_2B_3\dots B_{i-1}B_iB_2$  получим, что точка  $B_{i+1}$  лежит внутри полигона  $B_2B_3\dots B_{i-1}B_iB_2$  (Рисунок 1.26). Значит, ломаная  $B_{i+1}B_{i+2}\dots B_nC$  пересекает отрезок  $B_2B_i$ , что противоречит доказанному выше утверждению об отсутствии точек ломаной  $B_2B_3\dots B_nC$  внутри



треугольника  $BB_1B_2$ . К аналогичному противоречию можно прийти при предположении, что точка  $B_{i+1}$  лежит на отрезке  $B_2B$ .

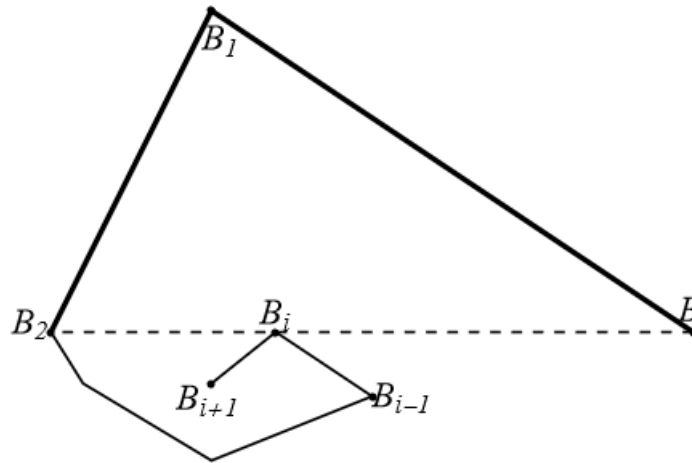


Рисунок 1.26 – Если вершина  $B_i$  лежит на отрезке  $BB_2$ , то ломаная  $B_{i+1}...B_nC$  проходит через треугольник  $BB_1B_2$

Итак, показано, что диагональ  $BB_2$  не пересекает участок границы  $B_2B_3...B_nC$ . Предположим, что точки  $B_1$  и  $B_2$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . Покажем, что в этом случае  $\angle(\overrightarrow{BB_2}, \overrightarrow{B_2B_3}) > 0$ . Для этого достаточно показать, что точки  $B_3$  и  $B_1$  лежат по разные стороны от прямой  $BB_2$ . Действительно, если предположить противное, то получится, что точки  $B_3$  и  $B_1$  лежат по одну сторону от прямой  $BB_2$ , точки  $B_3$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой  $B_1B_2$  (в силу  $\angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) > 0$ ,  $\angle(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_2B_3}) > 0$ ), точки  $B_3$  и  $B_2$  лежат по одну сторону от прямой  $BB_1$  (так как иначе отрезок  $B_2B_3$  пересечёт отрезок  $BB_1$ ), откуда следует принадлежность точки  $B_3$  треугольнику  $BB_1B_2$ , чего, как доказано выше, быть не может. Кроме того, так как углы  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_2})$  и  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1})$  имеют один знак, то  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_2}) = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) + \angle(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}) > \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_1}) > \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

Таким образом, ломаная  $BB_2B_3...B_nC$  обладает теми же свойствами, что и  $BB_1B_2B_3...B_nC$ : она является самонепересекающейся, углы между направляющими векторами рёбер больше нуля, а также  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_2}) > \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ . Значит, вместо полигона  $ABB_1B_2B_3...B_nC...A$  можно рассматривать полигон  $ABB_2B_3...B_nC...A$ , а если точки  $B_2$  и  $B_3$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ , то можно перейти к полигону  $ABB_3...B_nC...A$  и т.д.

Из свойства  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB_2}) > \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  следует, что не все точки  $B_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , лежат по одну сторону от прямой  $AB$  (иначе получили бы  $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) > \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ ).

$\overline{BB_n}) > \dots > \angle(\overline{AB}, \overline{BB_1}) > \angle(\overline{AB}, \overline{BC'})$ , т.е. найдётся ребро  $C'B'$ , пересекающее прямую  $AB$ , причём за точкой  $A$ , т.к. в полигоне  $ABC'B' \dots B_n C \dots A$  точки  $A$  и  $B'$  должны лежать по одну сторону от прямой  $BC'$ . Без ограничения общности положим, что точка  $B'$  лежит на прямой  $AB$  (если это не так, то просто введём фиктивную вершину на пересечении прямых  $AB$  и  $C'B'$ , рисунок 1.27а). При этом справедливо неравенство  $\angle(\overline{AB}, \overline{BC'}) + \angle(\overline{BC'}, \overline{C'B'}) > \pi$ , потому что в треугольнике  $BC'B'$  сумма трёх углов равна  $2\pi$ .  $\angle(\overline{AB}, \overline{BC'}) + \angle(\overline{BC'}, \overline{C'B'}) + \angle(\overline{C'B'}, \overline{B'B}) = 2\pi$ , а угол  $\angle(\overline{C'B'}, \overline{B'B})$  меньше  $\pi$  по определению угла между двумя векторами.

Теперь проведём ломаную  $BA A_1 A_2 \dots A_m D$ , в которой углы  $\angle(\overline{AA_1}, \overline{A_1 A_2})$ ,  $\angle(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3})$ , ...,  $\angle(\overline{A_{m-1} A_m}, \overline{A_m D})$  должны быть меньше нуля. Меньше нуля также должен быть угол  $\angle(\overline{BA}, \overline{AA_1})$ , значит, точки  $A_1$  и  $D$  находятся по разные стороны от прямой  $AB$ . Отсюда следует, что в ломаной  $BA A_1 A_2 \dots A_m D$  есть некоторое ребро  $D'' B''$ , пересекающее прямую  $AB$  за точкой  $B$ , и

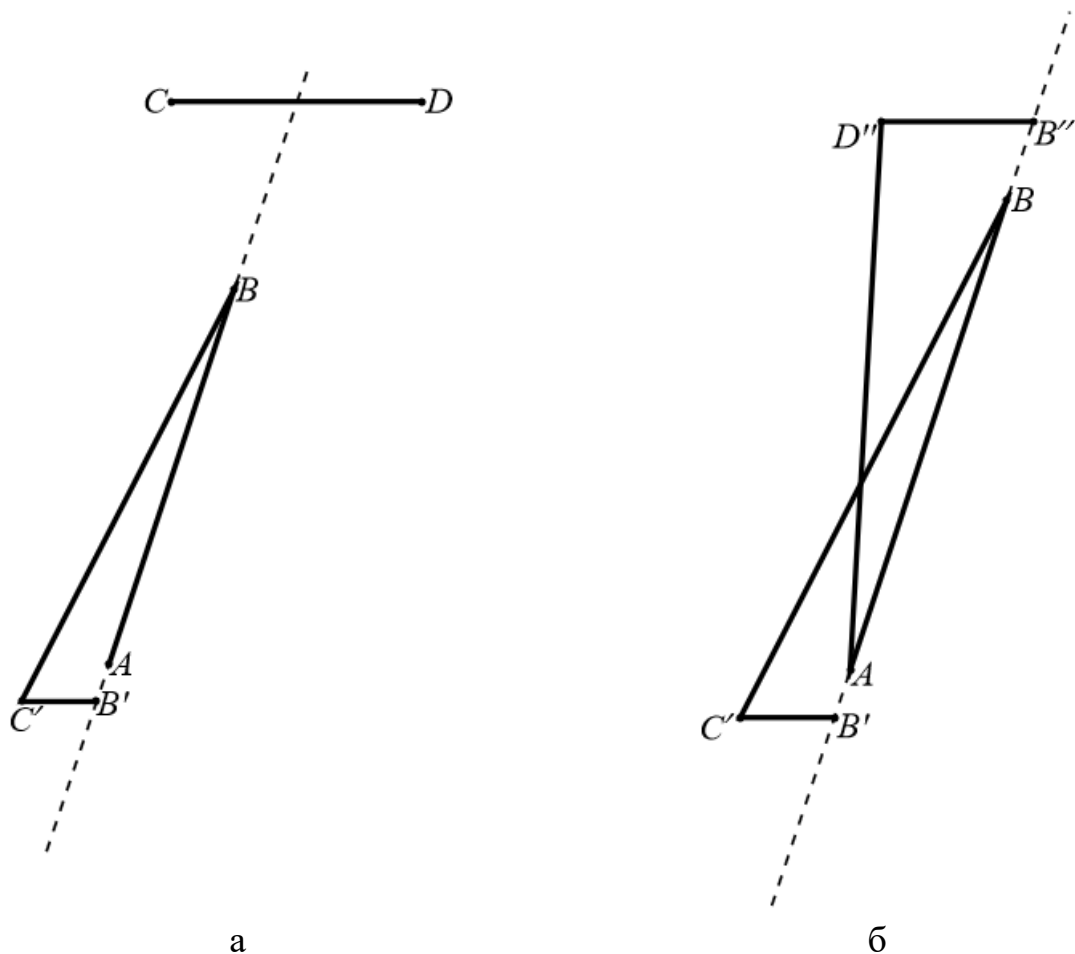


Рисунок 1.27 – Исходные предположения вместе с предположением о невыпуклости полигона приводят к противоречию

аналогично рассуждениям выше получается, что  $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD''}) + \angle(\overrightarrow{AD''}, \overrightarrow{D''B''}) < < -\pi$ . Отсюда имеем  $\angle(\overrightarrow{B''D''}, \overrightarrow{D''A}) + \angle(\overrightarrow{D''A}, \overrightarrow{AB}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC'}) + \angle(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{C'B'}) > > 2\pi$ . Добавляя к левой части этого неравенства остальные углы между направляющими векторами рёбер полигона  $ABC'B'...CD...B''D''A$ , в силу их положительности получим, что неравенство сохраняется, что противоречит исходному условию о самонепересекаемости полигона (Рисунок 1.27б). Итак, окончательно приходим к выводу, что с учётом поставленных условий предположение о невыпуклости полигона приводит к противоречию, таким образом, полигон является выпуклым. ■

Итак, выяснить, является ли самонепересекающийся полигон  $A_1A_2...A_nA_1$  выпуклым, можно, проверив знаки углов  $\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3})$ ,  $\angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4})$ , ...,  $\angle(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2})$ . Если очередной угол имеет противоположный знак, нежели все предыдущие, то это означает, что полигон  $A_1A_2...A_nA_1$  невыпуклый, и на этом сразу можно заканчивать проверку. Если же  $\text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}) = \dots = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}) = \text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2})$ , то полигон  $A_1A_2...A_nA_1$  выпуклый.

В случае, если заранее неизвестно, является ли полигон  $A_1A_2...A_nA_1$  самонепересекающимся, можно для каждого вектора  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , выяснить, по какую сторону от прямой, определяемой точкой  $A_i$  и направляющим вектором  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ , лежат все другие вершины рассматриваемого полигона. Тогда полигон  $A_1A_2...A_nA_1$

- является выпуклым тогда и только тогда, когда все вершины лежат от всех прямых по левую либо по правую сторону;
- является самопересекающимся, если нашлись точки  $A_i$ ,  $A_{i+1}$ ,  $A_j$  и  $A_{j+1}$  такие, что  $A_j$  и  $A_{j+1}$  лежат по разные стороны от прямой  $A_iA_{i+1}$ , а  $A_i$  и  $A_{i+1}$  – по разные стороны от прямой  $A_jA_{j+1}$ ;
- является самонепересекающимся и невыпуклым, если для каждой пары несмежных рёбер  $A_iA_{i+1}$  и  $A_jA_{j+1}$  таких, что точки  $A_j$  и  $A_{j+1}$  лежат по разные стороны от прямой  $A_iA_{i+1}$ , точки  $A_i$  и  $A_{i+1}$  лежат по одну сторону от прямой  $A_jA_{j+1}$ .

Для определения, к которой из перечисленных выше категорий относится полигон с  $n$  вершинами, достаточно найти знаки углов между  $n(n-2)$  парами векторов.

### 1.4.3. Расположение точки относительно полигона

Важное место в различных задачах компьютерного моделирования графики является определение расположения точки относительно некоторого полигона. Для плоского полигона и точки, лежащей с этим полигоном в одной плоскости, может иметь место один из трёх вариантов: точка лежит внутри полигона (**внутренняя точка**), снаружи него (**внешняя точка**), на его границе (**границная точка**).

**Принадлежность точки треугольнику.** В плоскости рассмотрим некоторый треугольник  $\triangle A_1A_2A_3$  и точку  $M$ . Проведём два вектора из одной из вершин треугольника к двум другим его вершинам, например,  $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$ . Таким образом, можно рассматривать декартову систему координат с началом в точке  $A_1$  и базисом из этих двух векторов (см. пункт 1.5.2). Пусть точка  $M$  в этой ДСК имеет координаты  $M(x, y)$ , т.е.  $\overrightarrow{A_1M} = x\vec{a} + y\vec{b}$ . Тогда возможны следующие случаи (Рисунок 1.28):

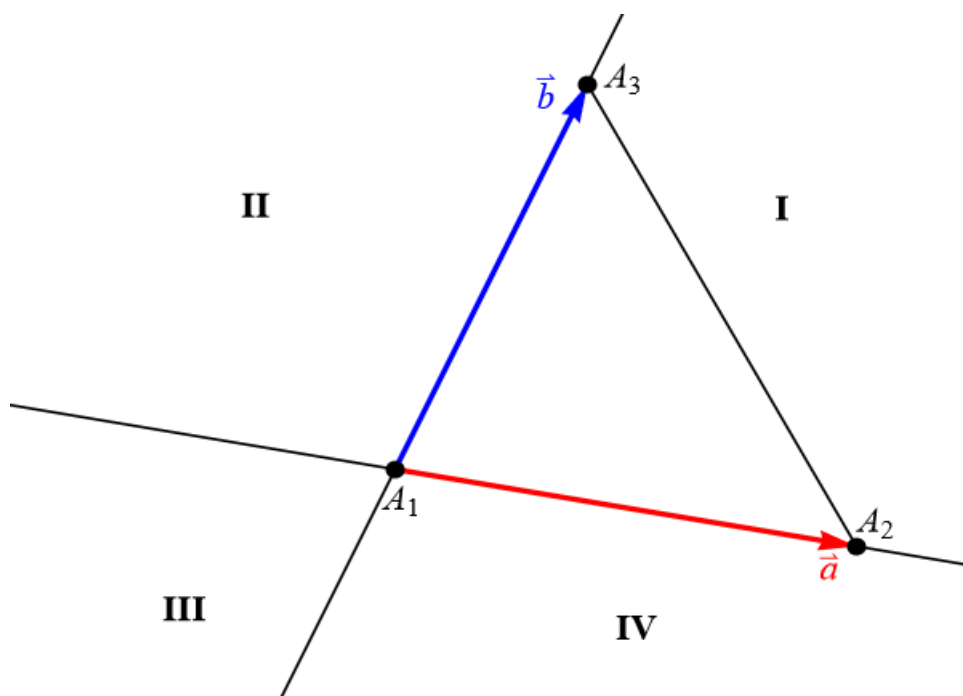


Рисунок 1.28 – Декартова система координат  $(A_1, (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}))$  и деление ею плоскости на четыре квадранта

- $x < 0 \Rightarrow$  точка  $M$  лежит во II либо в III квадранте, а следовательно, является **внешней** для  $\triangle A_1A_2A_3$ ;
- $y < 0 \Rightarrow$  точка  $M$  лежит в III либо в IV квадранте, а следовательно, является **внешней** для  $\triangle A_1A_2A_3$ ;

- если же  $x > 0$  и  $y > 0$ , то точка  $M$  лежит в I квадранте, и тогда нужно выяснить, по какую сторону точка  $M$  лежит от прямой  $A_2A_3$ . Несложно видеть, что так как  $\overrightarrow{A_1A_2} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$ , т.е. точка  $A_2$  имеет координаты  $A_2(1,0)$  в заданной нами ДСК, а точка  $A_3$  удовлетворяет равенству  $\overrightarrow{A_1A_3} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$ , а значит, имеет координаты  $A_3(0,1)$ , прямая  $A_2A_3$  может быть описана уравнением в отрезках:

$$A_2A_3 : \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0.$$

Подставляя координаты точки  $M$  в левую часть этого уравнения и сравнивая с нулём, можно выяснить, по какую сторону от неё она лежит, а следовательно, будет ли она внутренней или внешней точкой для  $\triangle A_1A_2A_3$ . Точка  $M$  является **внутренней** тогда и только тогда, когда она находится от прямой  $A_2A_3$  по ту же сторону, что и точка  $A_1(0,0)$ , т.е. когда  $x + y < 1$ .

Таким образом, окончательно имеем **критерий принадлежности точки  $M$  треугольнику  $\triangle A_1A_2A_3$** : точка  $M$ , удовлетворяющая равенству  $\overrightarrow{A_1M} = x\vec{a} + y\vec{b}$  при некоторых значениях  $x$  и  $y$ , является внутренней для этого треугольника тогда и только тогда, когда выполняются три неравенства:  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y < 1$ . В случае, когда одно или два из этих неравенств обращаются в равенство, точка  $M$  является **граничной**.

**Принадлежности точки выпуклому полигону.** Рассмотрим некоторый выпуклый полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$  и точку  $M$ . Выберем направление обхода этого полигона  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3}$ , ...,  $\overrightarrow{A_nA_1}$ . В зависимости от того, является ли такой обход левосторонним либо правосторонним, все внутренние и граничные точки полигона должны лежать по левую либо по правую сторону от осей  $A_iA_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$  (за исключением точек самого отрезка  $A_iA_{i+1}$ ). Для внешней же точки это условие должно нарушаться хотя бы для одной из осей  $A_iA_{i+1}$ .

Таким образом, имеет место **критерий принадлежности точки выпуклому полигону**: точка  $M$  является **внутренней** для полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$  тогда и только тогда, когда все углы  $\angle(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iM})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , одного знака (Рисунок 1.29а). Могут иметь место также следующие случаи:

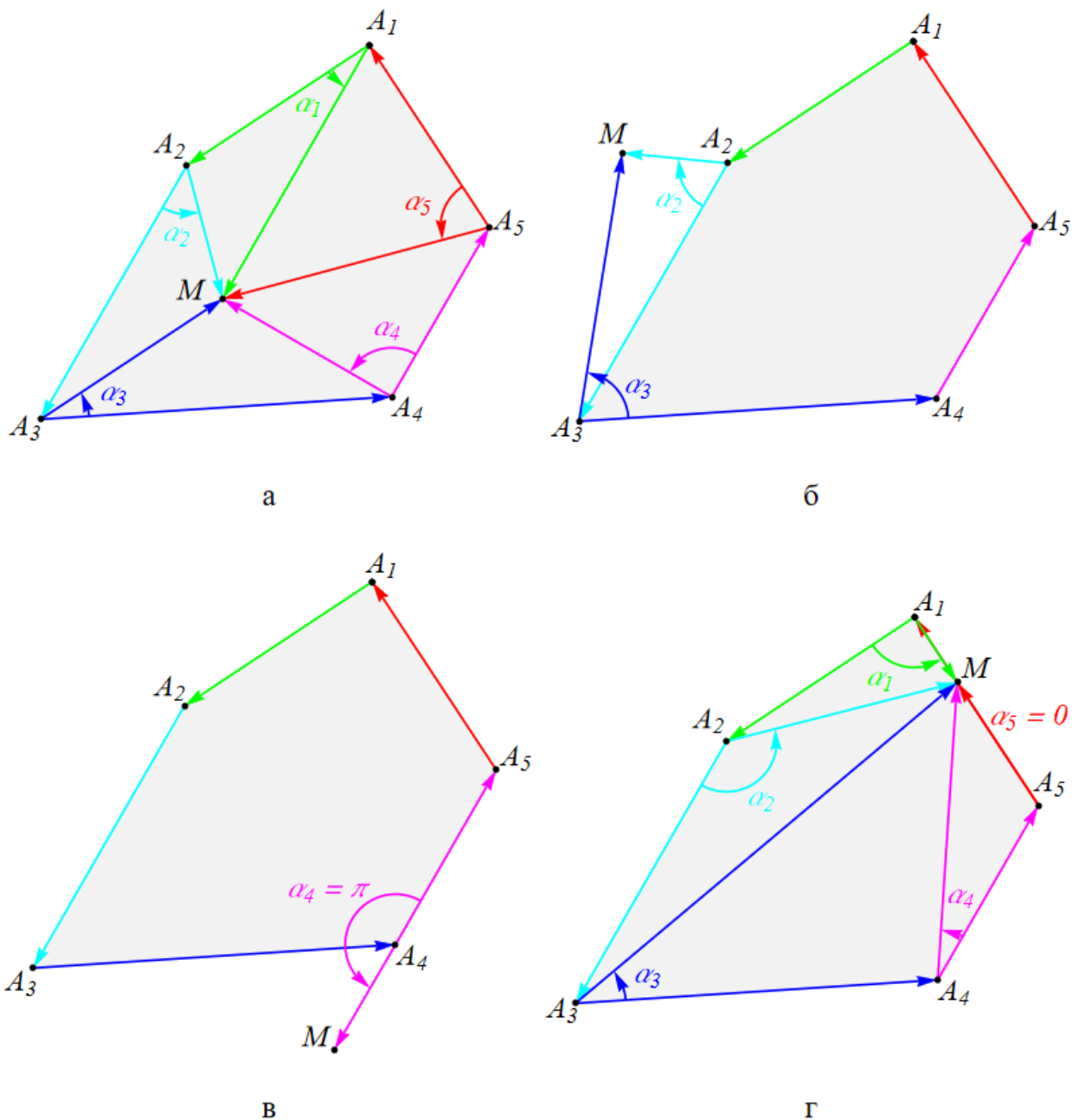


Рисунок 1.29 – Варианты расположения точки  $M$  относительно полигона (а – внутри полигона, б, в – вне полигона, г – на границе)

- Если есть два угла  $\angle(\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \overrightarrow{A_i M})$  и  $\angle(\overrightarrow{A_j A_{j+1}}, \overrightarrow{A_j M})$  разных знаков, то точка  $M$  является **внешней** (Рисунок 1.29б).
- Если есть угол  $\angle(\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \overrightarrow{A_i M}) = \pi$ , то точка  $M$  является **внешней** (Рисунок 1.29в).
- В случае, когда для очередного угла получилось  $\angle(\overrightarrow{A_i A_{i+1}}, \overrightarrow{A_i M}) = 0$ , проверяются знаки остальных углов. Если все остальные углы одного знака, то точка  $M$  является **границной** точкой полигона  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ , лежащей на ребре  $A_i A_{i+1}$  (Рисунок 1.29г). Если же выполняется один из

перечисленных выше случаев, то снова приходим к выводу о том, что точка  $M$  – **внешняя**.

Несложно видеть, что по такому алгоритму придётся вычислять знаки для не более  $n$  углов между векторами, таким образом, изложенный алгоритм работает за время  $O(n)$ . Однако для выпуклого полигона определить принадлежность заданной точки можно и за меньшее время.

**Алгоритм дихотомии выпуклого полигона определения принадлежности точки.** Вначале заметим, что вершины выпуклого полигона являются отсортированными в смысле сравнения углов поворота определённых векторов: если в полигоне  $A_1A_2\dots A_nA_1$  с левосторонним обходом провести векторы  $\overrightarrow{A_1A_i}$ ,  $i = \overline{2, n}$ , то окажется, что выполняются следующие соотношения:

$$\angle(\overrightarrow{A_1A_i}, \overrightarrow{A_1A_j}) \begin{cases} \geq 0 \Leftrightarrow i < j, \\ \leq 0 \Leftrightarrow i > j. \end{cases}$$

Действительно, все углы вида  $\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_j})$ ,  $j = \overline{3, n}$ , больше нуля, так как в выпуклом полигоне все его точки должны располагаться по левую сторону от оси  $A_1A_2$ . Аналогично получаем, что  $\angle(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_j}) > 0$ ,  $j = \overline{4, n}$  в силу выпуклости и левостороннего обхода полигона  $A_1A_3\dots A_nA_1$ ,  $\angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_j}) > 0$ , ...,  $\angle(\overrightarrow{A_1A_{n-1}}, \overrightarrow{A_1A_n}) > 0$  (Рисунок 1.30а).

Идея алгоритма дихотомии заключается в следующем. Проводя из точки  $A_1$  лучи  $A_1A_i$ ,  $i = \overline{2, n}$ , получим разбиение всей плоскости на  $n$  секторов

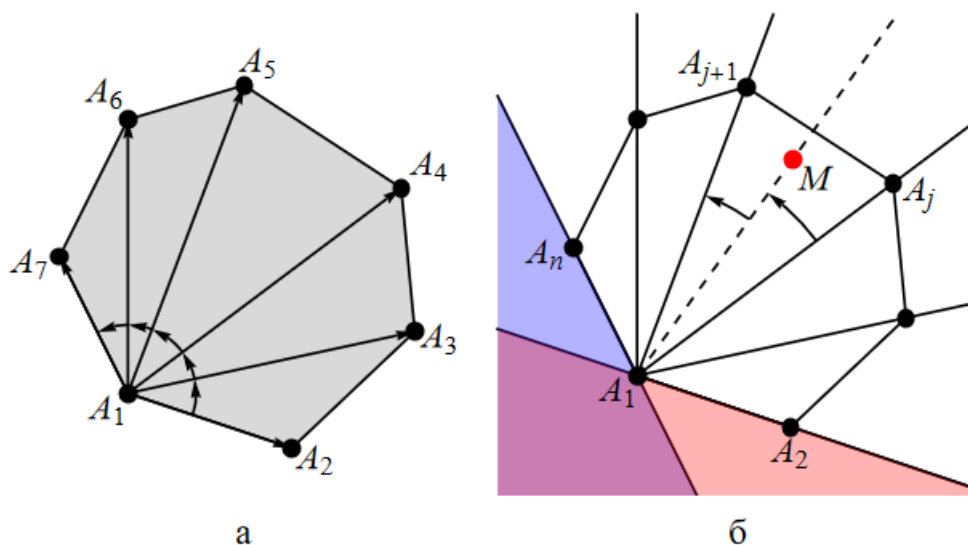


Рисунок 1.30 – Нахождение положения точки  $M$  относительно диагоналей выпуклого полигона

(Рисунок 1.30б), и нужно определить, в котором из них лежит заданная точка  $M$ . Для этого нужно найти знаки углов вектора  $\overrightarrow{A_1M}$  с векторами  $\overrightarrow{A_1A_j}$  и найти такие две соседние диагонали  $A_1A_j$  и  $A_1A_{j+1}$ , чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \underline{\angle(\overrightarrow{A_1A_j}, \overrightarrow{A_1M})} &> 0, \\ \underline{\angle(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_1A_{j+1}})} &> 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Таким образом, фактически имеет место задача поиска нужного положения для точки  $M$  в отсортированном списке точек  $A_2, A_3, \dots, A_n$ , которая, как известно, решается за время  $O(\log n)$  при помощи разбиения этого списка на два примерно равных (например, от  $A_2$  до  $A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$  и от  $A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$  до  $A_n$ ), выбора нужного из них, разбиения выбранного списка на два примерно равных по тому же принципу и т.д. Если в итоге окажется, что  $\underline{\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1M})} < 0$  либо  $\underline{\angle(\overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1M})} > 0$  (на рисунке 1.30б множества таких точек выделены соответственно красным и синим), то точка  $M$  является заведомо **внешней**. Если же найдутся две точки  $A_j$  и  $A_{j+1}$ , удовлетворяющие неравенствам (1.49), то далее остаётся определить принадлежность точки  $M$  треугольнику  $\triangle A_1A_jA_{j+1}$ . Точка  $M$  является **внутренней** для исходного полигона тогда и только тогда, когда она является внутренней для этого треугольника.

Таким образом, вывели **алгоритм дихотомии**, определяющий расположение точки  $M$  относительно выпуклого полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ :

1. Определяется направление обхода полигона. Это можно сделать, например, вычислив знак следующего угла:

$$\angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{левосторонний,} \\ < 0 \Rightarrow \text{правосторонний.} \end{cases}$$

Если полигон оказался правосторонним, то все подчёркнутые выше и ниже неравенства и слова следует заменить на противоположные по смыслу.

2. Определим последовательность точек  $A := (A_2, A_3, \dots, A_n)$ , между которыми может располагаться точка  $M$ . Крайние точки обозначим  $A_{\min} := A_2, A_{\max} := A_n$ , их индексы —  $i_{\min} := 2, i_{\max} := n$ .



3. Осуществляем дихотомию последовательности  $A$  точкой  $A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}$ . По-

сле вычисления знака угла  $\angle \left( \overrightarrow{A_1 M}, \overrightarrow{A_1 A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}} \right)$  могут возникнуть сле-

дующие ситуации:

-  $\text{sgn} \angle \left( \overrightarrow{A_1 M}, \overrightarrow{A_1 A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}} \right) = 0$ , т.е.  $\overrightarrow{A_1 M} \parallel \overrightarrow{A_1 A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}}$ . В этой ситуа-

ции точка  $M$  является **внутренней** тогда и только тогда, когда точка  $M$  расположена на отрезке  $A_1 A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}$ . Алгоритм завершает

работу.

-  $\angle \left( \overrightarrow{A_1 M}, \overrightarrow{A_1 A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}} \right) > 0 \Rightarrow$  переопределяем последовательность

$$A: A_{\max} := A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}, A := (A_{\min}, \dots, A_{\max}), i_{\max} := \left\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \right\rfloor.$$

-  $\angle \left( \overrightarrow{A_1 M}, \overrightarrow{A_1 A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}} \right) < 0 \Rightarrow A_{\min} := A_{\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \rfloor}, A := (A_{\min}, \dots, A_{\max}),$

$$i_{\min} := \left\lfloor \frac{i_{\min} + i_{\max}}{2} \right\rfloor.$$

Этот шаг повторяется до тех пор, пока в последовательности  $A$  не останется ровно две точки. Обозначим их через  $A_j$  и  $A_{j+1}$ .

4. Определяется принадлежность точки  $M$  треугольнику  $\triangle A_1 A_j A_{j+1}$ . В случае, если  $j \neq 2$  и  $j \neq n - 1$ , достаточно проверить только одно неравенство:  $x + y < 1$ , где  $x$  и  $y$  вычисляются исходя из уравнения  $\overrightarrow{A_1 M} = x \overrightarrow{A_1 A_j} + y \overrightarrow{A_1 A_{j+1}}$ . Точка является **внутренней**, **внешней** либо **граничной**, если имеют место соответственно неравенства  $x + y < 1$ ,  $x + y > 1$  либо равенство  $x + y = 1$ . Последнее равенство также означает, что точка  $M$  лежит на ребре  $A_j A_{j+1}$ .
5. Если  $j = 2$ , то проверяются неравенства  $x + y < 1$  и  $y > 0$ . При их выполнении точка  $M$  оказывается **внутренней**, при нарушении одного из неравенств – **внешней**, при обращении одного либо обоих неравенств в равенства – **граничной**, причём если  $y = 0$ , то  $M$  лежит на ребре  $A_1 A_2$ .
6. Если  $j = n - 1$ , то проверяются неравенства  $x + y < 1$  и  $x > 0$ . Они рассматриваются аналогично шагу 5, только если  $x = 0$ , то тогда  $M \in A_{n-1} A_n$ .

**Октантный критерий принадлежности точки самонепересекающемуся полигону.** Рассмотрим теперь произвольный самонепересекающийся полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$ . Проведём из точки  $M$  к вершинам векторы  $\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}, \dots, \overrightarrow{MA_n}$ . Тогда ясно, что точка  $M$  является граничной тогда и только тогда, когда для некоторого  $i$   $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) = \pi$ , причём это также означает, что точка  $M$  лежит на ребре  $A_iA_{i+1}$ .

Пусть точка  $M$  является внутренней для полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ . Проводя прямую  $MA_1$ , получим, вообще говоря, несколько точек пересечения с границей полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ , причём часть этих точек будет лежать на прямой  $MA_1$  за точкой  $M$ . Обозначим эти точки пересечения  $B_1, B_2, \dots, B_k$  таким образом, чтобы точки  $B_1$  и  $B_k$  были крайними на прямой  $MA_1$ , а движение по границе полигона от точки  $B_i$  к точке  $B_{i+1}$  обеспечивает левосторонний обход (на рисунке 1.31 точка  $B_2$  совпадает с вершиной  $A_1$ ). Тогда точки  $B_i, i = \overline{1, k}$ , можно рассматривать в качестве фиктивных вершин исходного полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ .

Точка  $M$  разбивает множество точек  $B_i$  на два подмножества  $\{B_1, \dots, B_l\}$  и  $\{B_{l+1}, \dots, B_k\}$  точек, лежащих по разные стороны от точки  $M$  на прямой  $MA_1$ . Для этих точек выполняются равенства

$$\angle(\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MB_2}) = \angle(\overrightarrow{MB_2}, \overrightarrow{MB_3}) = \dots = \angle(\overrightarrow{MB_{l-1}}, \overrightarrow{MB_l}) = 0, \quad (1.50)$$

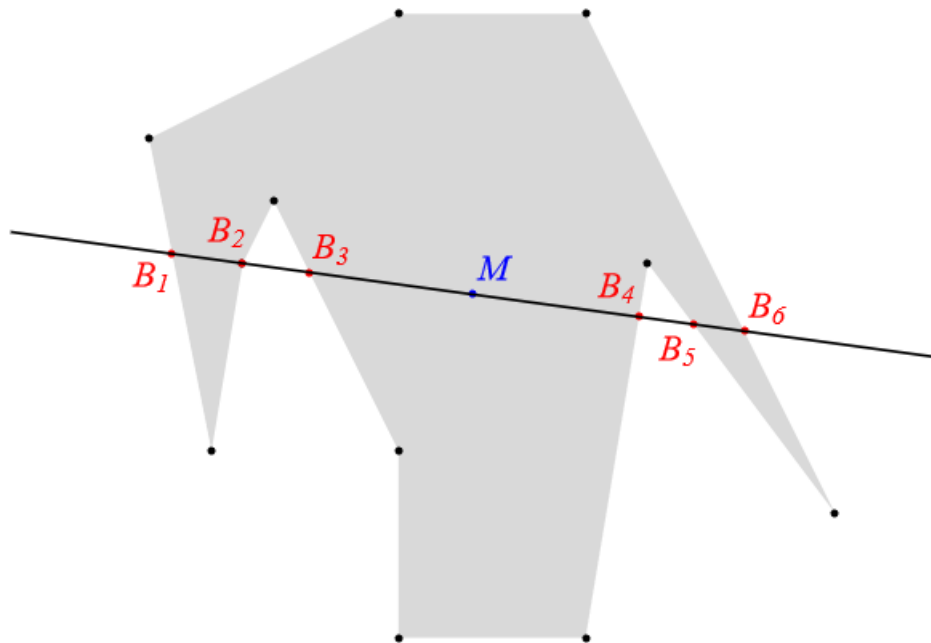


Рисунок 1.31 – Точки пересечения прямой, проведённой через внутреннюю точку  $M$ , с границей полигона лежат на этой прямой по разные стороны от точки  $M$

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{MB_l}, \overrightarrow{MB_{l+1}}) &= \pi, \\ \angle(\overrightarrow{MB_{l+1}}, \overrightarrow{MB_{l+2}}) &= \angle(\overrightarrow{MB_{l+2}}, \overrightarrow{MB_{l+3}}) = \dots = \angle(\overrightarrow{MB_{k-1}}, \overrightarrow{MB_k}) = 0, \\ \angle(\overrightarrow{MB_k}, \overrightarrow{MB_1}) &= \pi. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Рассмотрим участок границы между точками  $B_i$  и  $B_{i+1}$  (обозначая  $B_{k+1} = B_1$ ). Вершины исходного полигона  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ , лежащие на этом участке, обозначим через  $B_{i1}, \dots, B_{i, k_i}$ . Возможны три случая:

- Точки  $B_i$  и  $B_{i+1}$  находятся по одну сторону от точки  $M$  на прямой  $MA_1$ . Тогда ломаная  $B_i B_{i1} \dots B_{i, k_i} B_{i+1}$  находится целиком по одну сторону от прямой  $MB_i$ , и выполнено равенство  $\angle(\overrightarrow{MB_i}, \overrightarrow{MB_{i1}}) + \angle(\overrightarrow{MB_{i1}}, \overrightarrow{MB_{i2}}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MB_{i, k_i}}, \overrightarrow{MB_{i+1}}) = \angle(\overrightarrow{MB_i}, \overrightarrow{MB_{i+1}}) = 0$  без добавления полных углов.
- Ломаная  $B_k B_{k1} \dots B_{k, k_k} B_1$  расположена целиком по левую сторону от оси  $MB_k$ , так как внутренняя область исходного полигона находится слева от этой ломаной в силу выбора направления обхода исходного полигона. Отсюда имеем  $\angle(\overrightarrow{MB_k}, \overrightarrow{MB_{k1}}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MB_{k, k_k}}, \overrightarrow{MB_1}) = \angle(\overrightarrow{MB_k}, \overrightarrow{MB_1}) = \pi$ .
- Ломаная  $B_l B_{l1} \dots B_{l, k_l} B_{l+1}$  расположена целиком по левую сторону от оси  $MB_l$ , так как внутренняя область полигона  $B_l B_{l1} \dots B_{l, k_l} B_{l+1} MB_l$  является частью внутренней области исходного полигона, и движение по такой ломаной снова обеспечивает левосторонний обход. Отсюда следует  $\angle(\overrightarrow{MB_l}, \overrightarrow{MB_{l1}}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MB_{l, k_l}}, \overrightarrow{MB_{l+1}}) = \angle(\overrightarrow{MB_l}, \overrightarrow{MB_{l+1}}) = \pi$ .

Вычислим сумму углов между векторами  $\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}, \dots, \overrightarrow{MA_n}$ :

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MA_n}, \overrightarrow{MA_1}) &= \angle(\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MB_2}) + \\ &+ \dots + \angle(\overrightarrow{MB_k}, \overrightarrow{MB_1}) = \pi + \pi = 2\pi. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Если движение по ломаной  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  обеспечивает правосторонний обход полигона, в равенстве (1.51) в правой части будет стоять число  $-2\pi$ .

Если точка  $M$  является внешней для полигона, при проведении прямой  $MA_1$  возможны следующие случаи:

- Все точки пересечения этой прямой с границей полигона лежат по одну сторону от точки  $M$  (Рисунок 1.32а). Тогда  $\angle(\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MB_2}) = \angle(\overrightarrow{MB_2},$

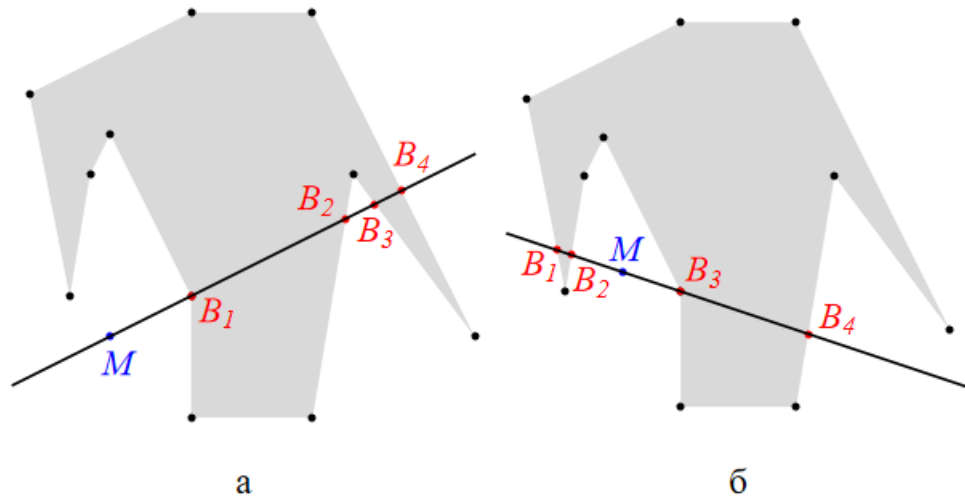


Рисунок 1.32 – Точки пересечения границы полигона с прямой, проведённой через внешнюю точку  $M$  и некоторую вершину этого полигона, могут лежать как по одну, так и по разные стороны от точки  $M$

$\overrightarrow{MB_3}) = \dots = \angle(\overrightarrow{MB_k}, \overrightarrow{MB_1}) = 0$ , откуда, согласно приведённым выше рассуждениям, следует

$$\angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}) + \angle(\overrightarrow{MA_2}, \overrightarrow{MA_3}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MA_n}, \overrightarrow{MA_1}) = 0. \quad (1.52)$$

- Точки пересечения прямой  $MA_1$  с границей полигона лежат по разные стороны от точки  $M$  (Рисунок 1.32б). Тогда для точек пересечения выполнены равенства (1.50), и справедливы все те же рассуждения, что и для внутренней точки  $M$ , кроме того, что ломаная  $B_l B_{l+1} \dots B_{l,k_l} B_{l+1}$  будет находиться уже по правую сторону от прямой  $MB_l$ , и тогда  $\angle(\overrightarrow{MB_l}, \overrightarrow{MB_{l+1}}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MB_{l,k_l}}, \overrightarrow{MB_{l+1}}) = -\angle(\overrightarrow{MB_l}, \overrightarrow{MB_{l+1}}) = -\pi$ . Отсюда тогда следует

$$\begin{aligned} \angle(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA_2}) + \dots + \angle(\overrightarrow{MA_n}, \overrightarrow{MA_1}) &= \angle(\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MB_2}) + \\ &+ \dots + \angle(\overrightarrow{MB_k}, \overrightarrow{MB_1}) = -\pi + \pi = 0, \end{aligned}$$

т.е. в этом случае равенство (1.52) также является справедливым.

Таким образом, имеет место **критерий принадлежности точки самонепересекающемуся полигону**: точка  $M$

- лежит на ребре  $A_i A_{i+1}$  тогда и только тогда, когда  $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) = \pi$ ,

- является внутренней тогда и только тогда, когда она не является граничной и выполняется равенство (1.51),
- является внешней тогда и только тогда, когда она не является граничной и выполняется равенство (1.52).

Зная координаты точек  $M$  и  $A_i$ , можно посчитать все векторы  $\overrightarrow{MA_i}$  и углы между ними, а затем проверить выполнение сформулированного критерия. Однако вычисление углов между векторами по формуле (1.45) сопряжено с различными сложностями, влекущими замедление и неточности при реализации соответствующих вычислительных алгоритмов [1, с. 41]. Поэтому на практике пользуются, например, **октантным критерием**, заключающимся в следующем:

1. Вычисляются векторы  $\overrightarrow{MA_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

2. Определяется принадлежность каждого вектора  $\overrightarrow{MA_i}$  тому или иному **октантному углу**: говорят, что ненулевой вектор  $\vec{a}$  лежит в  $I$ -ом октантном угле,  $I \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , если при откладывании вектора  $\vec{a}$  от начала координат некоторой ПДСК  $Oxy$  для совмещения оси  $Ox$  с этим вектором нужно повернуть её против часовой стрелки на угол  $\alpha$  такой, что  $\frac{(I-1)\pi}{4} \leq \alpha < \frac{I\pi}{4}$ . Для вычисления номера октантного угла достаточно сравнить координаты вектора с нулём и друг с другом (Рисунок 1.33).

3. Для полученных значений  $I_1, I_2, \dots, I_n$  октантных углов векторов  $\overrightarrow{MA_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , вычисляются разности  $\Delta_i = I_{i+1} - I_i$  ( $I_{n+1}$  полагается равным  $I_1$ ). Эти разности показывают, на сколько октантных углов нужно повернуть вектор  $\overrightarrow{MA_i}$ , чтобы он попал в один октантный угол с вектором  $\overrightarrow{MA_{i+1}}$ , причём знак «плюс» этой разности означает поворот против часовой стрелки, «минус» – по часовой стрелке.

4. Чтобы получить информацию о поворотах на углы меньше развёрнутого, нужно полученные разности подвергнуть коррекции:

- если  $|\Delta_i| < 4$ , то такое значение не подлежит корректировке:  $\Delta'_i = \Delta_i$ ,
- если  $|\Delta_i| > 4$ , то в зависимости от знака  $\Delta_i$  нужно к этому числу добавить либо  $+8$ , либо  $-8$  так, чтобы получилась скорректированная разность, по модулю меньшая 4:  $\Delta'_i = \Delta_i - 8 \operatorname{sgn} \Delta_i$ ,

- если  $|\Delta_i| = 4$ , то нужно вычислить знак угла  $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}})$ . Если  $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) > 0$ , то осуществляется поворот от вектора  $\overrightarrow{MA_i}$  к вектору  $\overrightarrow{MA_{i+1}}$  против часовой стрелки, и тогда  $\Delta'_i = +4$ ; при  $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) < 0$  имеет место поворот от вектора  $\overrightarrow{MA_i}$  к  $\overrightarrow{MA_{i+1}}$  по часовой стрелке, и  $\Delta'_i = -4$ ; а если  $\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) = 0$ , то это означает  $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) = \pi$ , что сразу приводит к

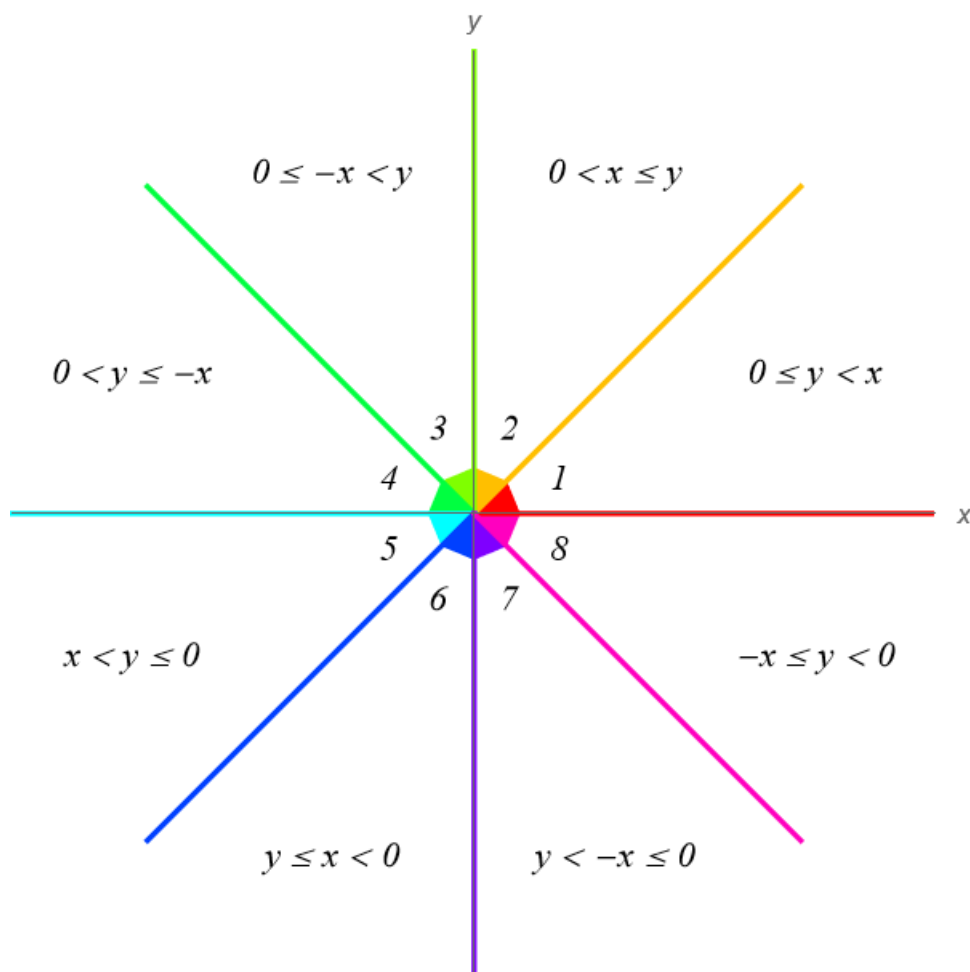


Рисунок 1.33 – Определение октантных углов в заданной ПДСК

тому, что точка  $M$  лежит на ребре  $A_i A_{i+1}$ , и алгоритм завершается. На рисунке 1.34 значение скорректированной разности октантных углов между векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  равно  $+4$ , между векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_3$  равно  $-4$ .

5. В случае, если на предыдущем шаге оказалось, что точка  $M$  не является граничной, вычисляется сумма скорректированных разностей  $\Delta'_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Если  $\sum_{i=1}^n \Delta'_i = 0$ , то это означает, что при повороте от вектора  $\overrightarrow{MA_1}$  к вектору  $\overrightarrow{MA_2}$ , затем от вектора  $\overrightarrow{MA_2}$  к  $\overrightarrow{MA_3}$ , ..., от  $\overrightarrow{MA_n}$  обратно к  $\overrightarrow{MA_1}$  поворот на полный угол не произошёл, что эквивалентно формуле (1.52) и тому, что точка  $M$  является внешней для полигона  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ . Случай  $\sum_{i=1}^n \Delta'_i = \pm 8$  соответствует формуле (1.51) и тому, что точка  $M$  лежит внутри полигона  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ , причём если  $\sum_{i=1}^n \Delta'_i = +8$ , то обход  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  является левосторонним, если  $\sum_{i=1}^n \Delta'_i = -8$ , то тогда  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  – это правосторонний обход.

**Лучевой критерий принадлежности точки самонепересекающемуся полигону.** Ещё один критерий принадлежности некоторой точки  $M$  самонепересекающемуся полигону  $A_1A_2\dots A_nA_1$  основан на следующем свойстве. Проведём из точки  $M$  произвольный луч. Тогда число пересечений (без учёта точек касания, как на рисунке 1.35в) этого луча с контуром полигона нечётно, если точка  $M$  является внутренней (Рисунок 1.35а), либо чётно, если  $M$  – внешняя точка (Рисунок 1.35б). ♦ Действительно, эти точки пересечения делят луч на участки с чередующейся принадлежностью полигону: для внешней точки  $M$  вначале идёт внешний участок, затем внутренний, затем опять внешний, и т.д., пока после последней точки пересечения не достигнем бесконечного участка луча, который, очевидно, является внешним для полигона. Легко видеть, что таких участков чётное количество, а значит, отделяются они друг от друга нечётным числом точек. Для внутренней точки  $M$  первый из таких участков уже будет внутренним, а последний – по-прежнему внешним, т.е. уже имеем чётное число участков и нечётное число точек пересечения. ■

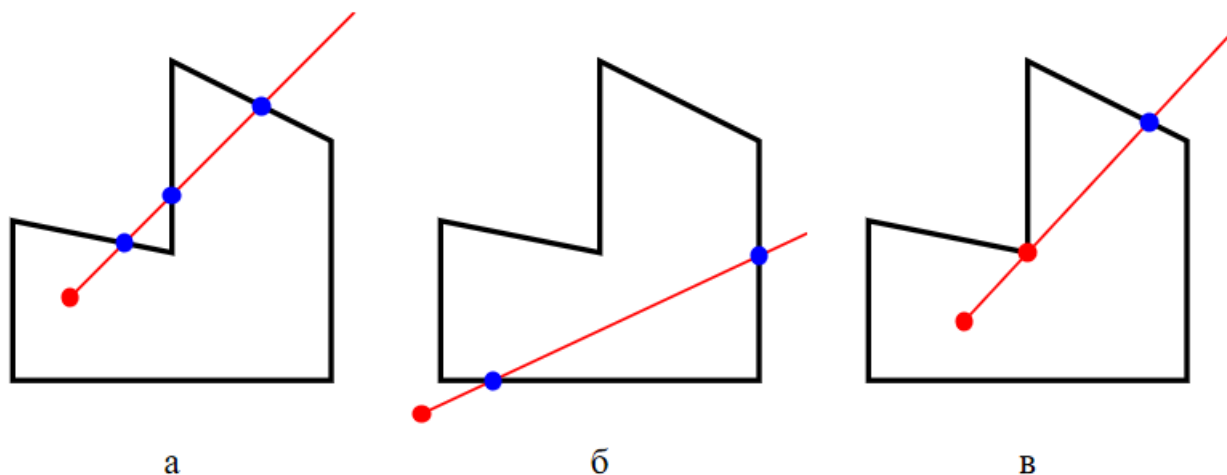


Рисунок 1.35 – Варианты пересечения лучом контура полигона

Таким образом, можно посчитать число пересечений контура полигона с некоторым лучом с началом в точке  $M$ , откуда можно судить о расположении этой точки относительно полигона. Пусть точка  $M$  имеет координаты  $M(x_0, y_0)$ . Проведём, например, луч по направлению, совпадающему с положительным направлением оси абсцисс:

$$\Delta: \begin{cases} y = y_0, \\ x \geq x_0. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторый отрезок  $AB$  с концами в точках с координатами  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$ . Могут иметь место следующие случаи его расположения относительно луча  $\Delta$ :

- Оба конца отрезка расположены либо выше, либо ниже луча. Тогда, очевидно, этот отрезок **не пересекается** с лучом (Рисунок 1.36а).
- Один конец расположен выше луча  $\Delta$ , другой – ниже. Тогда найдём пересечение  $C(x_C, y_C)$  отрезка с прямой  $y = y_0$ , для чего используем параметрическое задание отрезка (1.15):

$$y_C = y_A + (y_B - y_A)t = y_0 \Rightarrow t = \frac{y_0 - y_A}{y_B - y_A},$$

$$x_C = x_A + (x_B - x_A) \frac{y_0 - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x_A(y_B - y_0) + x_B(y_0 - y_A)}{y_B - y_A}.$$

Точка  $C$  с полученными координатами расположена на луче, а значит, луч и отрезок **пересекаются**, если выполняется неравенство

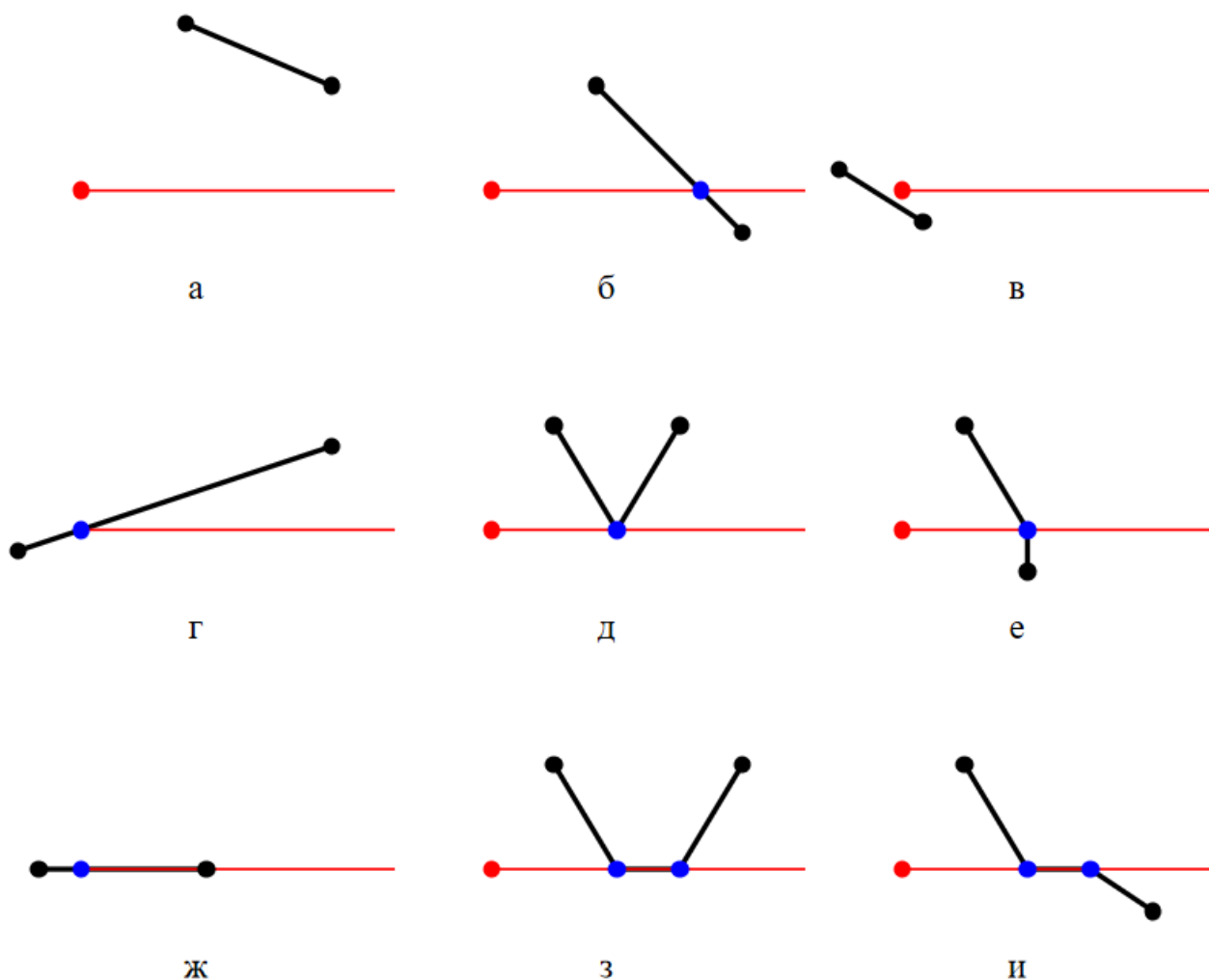


Рисунок 1.36 – Варианты расположения ребра полигона относительно луча: а, в – пересечение отсутствует; б, е, и – луч пересекает контур полигона; д, з – луч касается контура полигона; г, ж – заданная точка является граничной



$$\frac{x_A(y_B - y_0) + x_B(y_0 - y_A)}{y_B - y_A} \geq x_0 \quad (\text{Рисунок 1.36б}), \text{ причём если оно обра-}$$

щается в равенство, то это означает, что **начало луча лежит на отрезке AB** (Рисунок 1.36г).

- Если выполняется ровно одно из равенств  $y_A = y_0$  либо  $y_B = y_0$ , то может иметь место **касание** луча (Рисунок 1.36, д-е). Для этого необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство  $x_A \geq x_0$  либо  $x_B \geq x_0$ .
- При выполнении равенства  $y_A = y_B = y_0$  может иметь место **наложение** отрезка на луч (Рисунок 1.36, ж-и). Для этого необходимо и достаточно выполнения одного из неравенств  $x_A \geq x_0$  или  $x_B \geq x_0$ . Выполнение ровно одного из этих неравенств означает, что **точка M лежит на отрезке AB** (Рисунок 1.36ж).

**Лучевой критерий** принадлежности точки  $M(x_0, y_0)$  **минимальному** (т.е. такому, у которого никакие три последовательные вершины не лежат на одной прямой) полигону  $A_1A_2\dots A_nA_1$  с произвольным направлением обхода может быть реализован следующей последовательностью шагов.

1. Начинается алгоритм с рассмотрения ребра  $A_1A_2$  ( $i := 1$ ). Число пересечений обозначим через  $N := 0$ . Координаты точек  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , обозначим через  $A_i(x_i, y_i)$ .
2. При  $i = n + 1$  алгоритм завершает свою работу: точка  $M$  является **внутренней** при нечётном  $N$  и **внешней** при чётном  $N$ .
3. При выполнении неравенства  $(y_i - y_0)(y_{i+1} - y_0) > 0$  текущее ребро  $A_iA_{i+1}$  не пересекается с лучом  $\Delta$  (Рисунок 1.36а), и происходит переход к шагу 7.
4. Если  $(y_i - y_0)(y_{i+1} - y_0) < 0$ , то проверяется неравенство  $\frac{x_i(y_{i+1} - y_0)}{y_{i+1} - y_i} + \frac{x_{i+1}(y_0 - y_i)}{y_{i+1} - y_i} \geq x_0$ . Если неравенство обратилось в равенство, то алгоритм сразу завершает работу, так как точка  $M$  лежит на ребре  $A_iA_{i+1}$ , и является **граничной** (Рисунок 1.36г); в противном случае если неравенство выполняется, то увеличивается число пересечений:  $N := N + 1$  (Рисунок 1.36б); происходит переход к шагу 7.
5. Если  $y_i = y_{i+1} = y_0$ , то проверяются неравенства  $x_i \leq x_0 \leq x_{i+1}$  и  $x_{i+1} \leq x_0 \leq x_i$ . Если какое-либо из этих двойных неравенств выполняется, то снова имеем  $M \in A_iA_{i+1}$ , и алгоритм завершается – точка  $M$  является **граничной** (Рисунок 1.36ж). В противном случае число пересечений увеличивается ( $N := N + 1$ ) тогда и только тогда, когда имеют ме-

сто неравенства  $x_i \geq x_0$ ,  $x_{i+1} \geq x_0$  и  $(y_{i-1} - y_0)(y_{i+2} - y_0) < 0$ , т.е. когда ребро  $A_i A_{i+1}$  целиком лежит на луче  $\Delta$ , а вершины  $A_{i-1}$  и  $A_{i+2}$  расположены от него по разные стороны (Рисунок 1.36б). Происходит переход к шагу 7.

6. Если выполняется ровно одно из равенств  $y_i = y_0$  либо  $y_{i+1} = y_0$ , то следует проверить соответственно неравенство  $x_i \geq x_0$  либо  $x_{i+1} \geq x_0$ . При его выполнении ребро  $A_i A_{i+1}$  касается луча  $\Delta$  (Рисунок 1.36, д-е), и такое касание нужно считать пересечением контура полигона ( $N := N + 1$ ) тогда и только тогда, когда две смежные точки касания вершины находятся от луча по разные стороны:  $(y_{i-1} - y_0)(y_{i+1} - y_0) < 0$ , если  $y_i = y_0$ , либо  $(y_i - y_0)(y_{i+2} - y_0) < 0$ , если  $y_{i+1} = y_0$  (Рисунок 1.36е).
7. Переход к следующему ребру:  $i := i + 1$ . Переход к шагу 2.

#### 1.4.4. Алгоритмы генерации случайных полигонов

Для проверки работы различных алгоритмов компьютерной графики и вычислительной геометрии важно учесть как можно большее количество вариантов расположения геометрических объектов относительно заданных систем координат и друг друга. Это может быть достигнуто, в частности, путём генерации случайных геометрических объектов, например полигонов.

Для генерации полигона достаточно задать упорядоченное множество точек, которые будут вершинами этого полигона, а ломаная линия, соединяющая их – его границей. Существует два основных алгоритма генерации случайных самонепересекающихся полигонов.

Первый алгоритм генерирует **случайный звёздный полигон** при помощи построения лучей из некоторой, вообще говоря, случайной точки  $O$  и последующим отложением вершин полигона на этих лучах. Перед началом работы этого алгоритма необходимо задать следующие значения:

- $\theta$  – минимальный угол между двумя соседними лучами,
- $\Theta$  – максимальный угол между двумя соседними лучами,
- $a$  – минимальное расстояние от начала лучей до вершины,
- $b$  – максимальное расстояние от начала лучей до вершины.

После этого происходит генерация полигона по следующему алгоритму:

1. Откладывание лучей  $Ox_i$ ,  $x = \overline{0, n-1}$ , образующих с положительным направлением оси  $Ox$  углы  $\varphi_i$ , причём  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i$ , значение  $\Delta\varphi_i$  генерируется как случайная величина, равномерно распределён-

ная на отрезке  $(\theta, \Theta)$ . Откладывание лучей завершается, как только получится  $\varphi_n \geq 2\pi$ , и тем самым определяется количество вершин  $n$ .

2. Для каждого из лучей  $Ox_i$ ,  $x = \overline{0, n-1}$ , генерируется случайная величина  $\delta_i$ , равномерно распределённая на отрезке  $[a, b]$ . После этого на луче  $Ox_i$  откладывается отрезок  $OA_{i+1}$  длиной  $\delta_i$ .
3. Случайная величина  $d$ , равномерно распределённая на отрезке  $[0, 1]$ , определяет направление обхода полигона: при  $d \in [0, 1/2)$  выбирается обход  $A_1A_2\dots A_nA_1$ , а если  $d \in [1/2, 1]$ , то получится полигон с обходом вершин  $A_1A_n\dots A_2A_1$ .

Полученный полигон является самонепересекающимся при  $\theta > 0$  в силу того, что в каждом из углов между соседними лучами  $Ox_i$  и  $Ox_{i+1}$  лежит ровно по одному ребру –  $A_{i+1}A_{i+2}$ , что исключает возможность пересечения несмежных рёбер. В случае  $\theta = 0$  возможно отложение нескольких вершин на одном и том же луче, и тогда во избежание самопересечений и построения фиктивных вершин следует делать дополнительные проверки либо видоизменять алгоритм.

Примеры результатов работы изложенного выше алгоритма представлены на рисунке 1.37. Получается, вообще говоря, невыпуклый полигон, однако если задать параметры  $a = b$ , то можно генерировать выпуклые полигоны, вокруг которых можно описать окружность (Рисунок 1.37б).

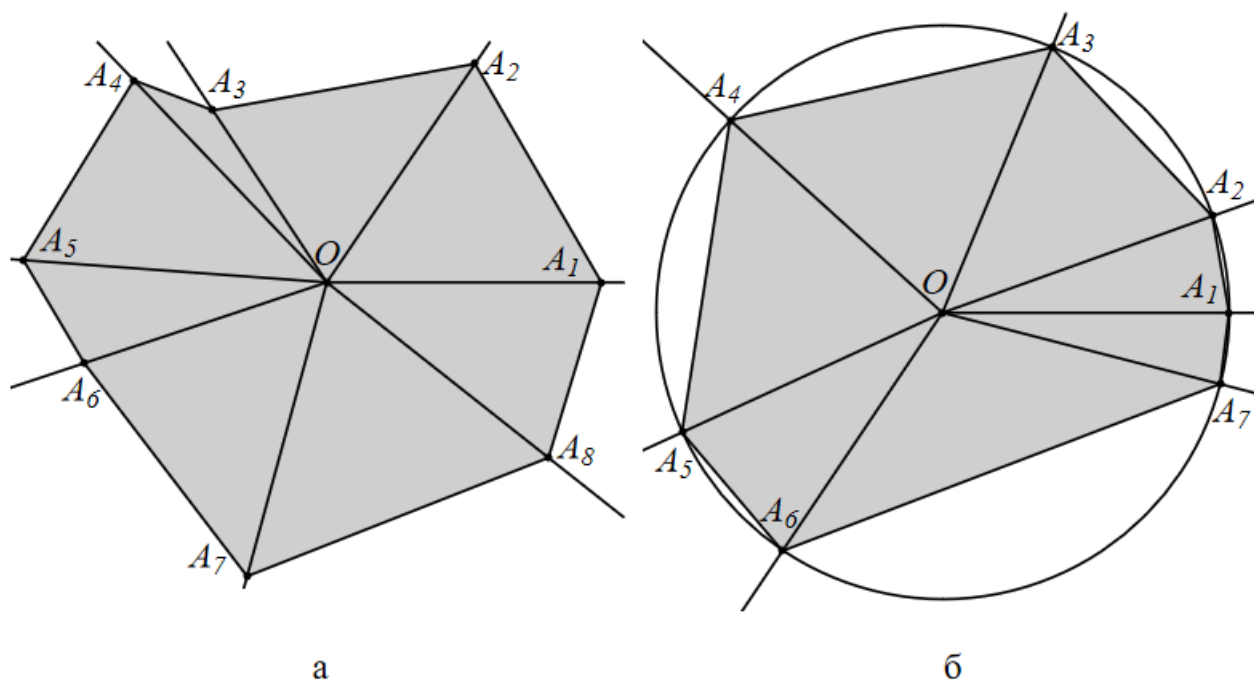


Рисунок 1.37 – Звёздные полигоны, сгенерированные при различных значениях параметров (а –  $\theta = 0$ ,  $\Theta = \pi/2$ ,  $a = 3$ ,  $b = 5$ ; б –  $\theta = 0$ ,  $\Theta = 2\pi/3$ ,  $a = b = 3$ )

Для генерации произвольных самонепересекающихся полигонов может использоваться алгоритм, имитирующий случайные блуждания по плоскости

без пересечения ранее пройденного пути и с возвращением в исходную точку. Перед началом работы этого алгоритма необходимо задать следующие параметры:

$A_1$  – расположение точки начало блуждания, или первой вершины итогового полигона,

$a$  – минимальная длина ребра,

$b$  – максимальная длина ребра,

$m$  – минимальное число вершин итогового полигона,

$M$  – максимальное число шагов случайного блуждания.

**Алгоритм случайного блуждания** состоит из следующих шагов, осуществляющихся циклически при  $i = \overline{1, M}$ :

1. От вершины  $A_i$  откладывается отрезок  $A_i A'_{i+1}$  длиной, равной случайной величине, равномерно распределённой на отрезке  $[a, b]$ , на угол от положительного направления оси  $Ox$ , являющийся равномерно распределённой на отрезке  $[0, 2\pi]$  случайной величиной.
2. Для нового отрезка  $A_i A'_{i+1}$  нужно проверить, не пересекает ли он ранее построенную ломаную линию. Если имеет место пересечение, то шаг 1 повторяется заново (некоторое ограниченное число раз, чтобы избежать закливания). Если самопересечений нет, то полагается  $A_{i+1} = A'_{i+1}$ .
3. При  $i \geq m - 1$  проверяется возможность замыкания ломаной  $A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_i A_{i+1}$  без самопересечений. Если это возможно, то получается полигон  $A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_i A_{i+1} A_1$ . В противном случае происходит переход к новой итерации цикла  $i := i + 1$ .
4. Если при  $i = M$  траектория так и не замкнулась, алгоритм начинает работу с самого начала.

В результате работы этого алгоритма получаются полигоны самой разнообразной формы, имеющие различные свойства и характеристики (Рисунок 1.38). Недостатком этого алгоритма является, очевидно, вероятность вынужденного повторения алгоритма, что сказывается на времени работы. Также сле-

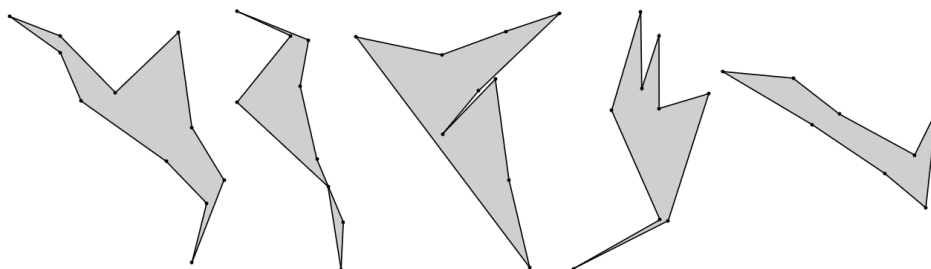


Рисунок 1.38 – Полигоны, полученные в результате алгоритма случайного блуждания при значениях параметров  $A_1 = (0, 0)$ ,  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $m = 8$ ,  $M = 100$

дует отметить, что иногда по этому алгоритму получаются вытянутые полигоны, в которых одна из сторон гораздо длиннее остальных.

## 1.5. Аффинные пространства и преобразования

### 1.5.1. Основные понятия

**Аффинным пространством** называется множество  $S$  (элементы которого называются **точками**), если для него и некоторого векторного пространства  $V$  выполняются следующие условия:

1. задана операция сложения точки и вектора (отложение вектора от точки)  $+: (S, V) \ni (p, \vec{v}) \mapsto p + \vec{v} \in S$ ,
2.  $\forall p \in S: p + \vec{0} = p$ ,
3.  $\forall p \in S, \vec{v}, \vec{w} \in V: p + (\vec{v} + \vec{w}) = (p + \vec{v}) + \vec{w}$ ,
4. для всякой упорядоченной пары точек  $(p, q)$  существует ровно один вектор  $\vec{v}$  такой, что  $p + \vec{v} = q$ . Часто используется обозначение  $\overrightarrow{pq} = \vec{v}$ .

**Свойства операции отложения вектора от точки аффинного пространства.**

1.  $\forall p, q, r \in S: \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ .  
 ♦ По условию 3 из определения имеем  $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r$ . С другой стороны, по условию 4 существует ровно один вектор, который при его отложении от точки  $p$  даёт точку  $r$ :  $p + \overrightarrow{pr} = r$ . Значит, имеет место равенство  $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ . ■
2.  $\forall p, q \in S: \overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$ .  
 ♦ По свойству 1 получается  $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp}$ . Для полученного вектора должно выполняться равенство  $p + \overrightarrow{pp} = p$ . По условиям 2 и 4 из определения аффинного пространства имеем  $\overrightarrow{pp} = \vec{0}$ , откуда  $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$ . ■

**Векторизация аффинного пространства.** В аффинном пространстве  $S$  выберем некоторую точку  $o$ . Тогда всякой точке  $p \in S$  можно поставить в соответствие единственный вектор, который, будучи отложенным от точки  $o$ , даст эту точку  $p$ . Таким образом, можно определить отображение

$$\chi_o: S \rightarrow V, p \mapsto \chi_o(p) = \overrightarrow{op}, \quad (1.53)$$

называемое **векторизацией** аффинного пространства  $S$  относительно точки  $o$ . Результат векторизации для некоторой точки называется **радиус-вектором** этой точки.

Верно и обратное, т.е. всякому вектору  $\vec{v} \in V$  можно поставить в соответствие некоторую, причём единственную, точку  $p \in S$  такую, что  $\chi_o(p) = \vec{v}$ . Значит, отображение (1.53) является биективным, и можно определить обратное отображение  $\chi_o^{-1}: V \rightarrow S, \vec{v} \mapsto \chi_o^{-1}(\vec{v}) = o + \vec{v}$ .

**Размерностью аффинного пространства  $S$**  называется размерность соответствующего векторного пространства  $V$ . На практике обычно рассматриваются аффинные пространства размерности не больше 3: аффинная прямая, аффинная плоскость, аффинное трёхмерное пространство.

**Прямой** в аффинном пространстве  $S$  называется подмножество этого пространства вида

$$\{p_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in U_1\}, \quad (1.54)$$

где  $p_0 \in S$  – заданная точка,  $U_1$  – одномерное подпространство векторного пространства  $V$ , называемое **направляющим подпространством** для прямой (1.54). Всякий ненулевой вектор  $\vec{u} \in U_1$  является **направляющим вектором** прямой (1.54). Легко проверить, что прямая в аффинном пространстве сама также является аффинным пространством.

Аналогично определяется понятие **плоскости** в аффинном пространстве:

$$\{p_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in U_2\}, \quad (1.55)$$

где  $U_2$  является двумерным подпространством пространства  $V$ . Всякие два базисных вектора  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  из  $U_2$  являются направляющими векторами плоскости (1.55). Вообще говоря, если задано произвольное подпространство  $U \subset V$  и точка  $p_0 \in S$ , то можно определить аффинное подпространство, проходящее через точку  $p_0$  параллельно векторам из  $U$ :

$$\{p_0 + \vec{u} \mid \vec{u} \in U\}.$$

**Аффинное евклидово пространство.** Если  $V$  – векторное евклидово пространство, т.е. на нём задана операция скалярного умножения векторов, то можно говорить об аффинном евклидовом пространстве  $S$ . Такое пространство легко сделать метрическим, т.е. определить в нём операцию нахождения **расстояния между двумя точками** как длину отложенного между ними вектора:

$$d : S \times S \rightarrow [0, +\infty), (p, q) \mapsto d(p, q) = |\overrightarrow{pq}| = \sqrt{\overrightarrow{pq}^2}.$$

Введение операции скалярного умножения векторов пространства  $V$  позволяет определить и другие характеристики, например расстояние от точки до подпространств аффинного пространства, углы между подпространствами и т.д.

### 1.5.2. Декартовы системы координат

Рассмотрим некоторое аффинное пространство  $S$  с соответствующим векторным пространством  $V$ ,  $\dim S = \dim V = n$ . **Декартовой системой координат** плоскости  $S$  называется система  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$ , состоящая из точки  $o \in S$  – **начала координат**, и базиса  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  пространства  $V$ . Если пространство  $S$  является евклидовым, а система векторов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  – ортонормированной, т.е.  $|\vec{e}_i| = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  при  $i \neq j$ , то декартова система координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  называется **прямоугольной**.

**Координатами** точки  $p \in S$  в ДСК  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  называются координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  вектора  $\overrightarrow{op}$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ :

$$p = o + \overrightarrow{op} = o + x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n. \quad (1.56)$$

Из единственности разложения произвольного вектора по заданному базису, а также однозначной определённости векторизации произвольной точки следует единственность координат  $x_i$  из формулы (1.56). Из этой формулы нетрудно видеть, что при отложении некоторого вектора  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$  от точки  $p$  получится точка с координатами  $x_i + v_i$ , равными сумме соответствующих координат исходной точки и отложенного вектора. Также имеем, что координаты вектора  $\overrightarrow{pq}$  равны разности координат конца и координат начала этого вектора:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pq} &= \overrightarrow{po} + \overrightarrow{oq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} = (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n) - (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) = \\ &= (y_1 - x_1) \vec{e}_1 + (y_2 - x_2) \vec{e}_2 + \dots + (y_n - x_n) \vec{e}_n. \end{aligned}$$

**Координатным столбцом** точки  $p \in S$  в ДСК  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  называется столбец  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , удовлетворяющий равенству (1.56), записанному в матричном виде:

$$p = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что координатный столбец точки  $p$  в ДСК  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  совпадает с координатным столбцом вектора  $\overrightarrow{op}$  в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  векторного пространства  $V$ . Отсюда следует, что координатный столбец точки в заданной ДСК определяется однозначно.

**Связь между разными ДСК аффинного пространства.** Рассмотрим в аффинном пространстве  $S$  две ДСК  $OE = (o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  и  $O'E' = (o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n))$ . Через  $S_{E \rightarrow E'}$  обозначим матрицу перехода от базиса  $E$  к базису  $E'$ , т.е. такую матрицу, что выполняется следующее равенство:

$$(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) S_{E \rightarrow E'}. \quad (1.57)$$

Пусть также известен координатный столбец точки  $o'$  в ДСК  $OE$ , равный  $O'_{OE}$ :

$$o' = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) O'_{OE}. \quad (1.58)$$

Рассмотрим некоторую точку  $p \in S$  и её координатные столбцы в этих ДСК, равные соответственно  $P_{OE} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и  $P_{O'E'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$ . Справедливы следующие равенства:

$$p = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) P_{OE} = o' + (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) P_{O'E'}. \quad (1.59)$$

Подставим сюда равенства (1.57) и (1.58):

$$\begin{aligned} p &= o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) O'_{OE} + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) S_{E \rightarrow E'} P_{O'E'} = \\ &= o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) (S_{E \rightarrow E'} P_{O'E'} + O'_{OE}). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Сравнивая (1.59) и (1.60) и учитывая единственность вектора  $\overrightarrow{op}$ , а также единственность разложения произвольного вектора по заданному базису, полу-



чим равенство, описывающее связь между координатными столбцами одной и той же точки  $p$  в разных ДСК  $OE$  и  $O'E'$ :

$$P_{OE} = S_{E \rightarrow E'} P_{O'E'} + O'_{OE}. \quad (1.61)$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{P}_{OE} = S_{OE \rightarrow O'E'} \tilde{P}_{O'E'},$$

где

$$S_{OE \rightarrow O'E'} = \left( \begin{array}{c|c} S_{E \rightarrow E'} & O'_{OE} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}_{n+1, n+1} \quad (1.62)$$

– **матрица перехода** от ДСК  $OE$  к ДСК  $O'E'$ , состоящая из матрицы перехода  $S_{E \rightarrow E'}$  и координатного столбца  $O'_{OE}$  начала координат новой ДСК, записанного в старой ДСК;  $\tilde{P}_{OE} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)^T$  и  $\tilde{P}_{O'E'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n, 1)^T$  – **координатные столбцы точки  $p$  в однородных координатах**, записанных соответственно в ДСК  $OE$  и  $O'E'$ . Матрица перехода от одной ДСК к другой обладает свойствами, аналогичными матрице перехода от одного базиса векторного пространства к другому:

1.  $\det S_{OE \rightarrow O'E'} \neq 0$ ,
2.  $S_{OE \rightarrow OE} = E_n$ ,
3.  $S_{O'E' \rightarrow OE} = S_{OE \rightarrow O'E'}^{-1}$ ,
4.  $S_{OE \rightarrow O''E''} = S_{OE \rightarrow O'E'} S_{O'E' \rightarrow O''E''}$ .

### 1.5.3. Аффинные преобразования и их свойства

Рассмотрим некоторое аффинное пространство  $S$ . Преобразование  $f: S \rightarrow S$  называется **аффинным**, если выполняется следующее:

$$\forall p \in S, \vec{v} \in V: f(p + \vec{v}) = f(p) + \varphi(\vec{v}), \quad (1.63)$$

где  $\varphi: V \rightarrow V$  – линейное преобразование соответствующего векторного пространства, называемое **дифференциалом аффинного преобразования  $f$**  и иногда обозначаемое  $df$ . По формуле (1.63) получается, что для определения аффинного преобразования достаточно знать дифференциал  $\varphi$  и образ некоторой

точки  $p \mapsto f(p)$ . Тогда для произвольной точки  $q \in S$  образ при этом преобразовании будет равен

$$f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}).$$

Верно и обратное, т.е. если известно аффинное преобразование, то можно найти его дифференциал  $\varphi$ :

$$f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}) = f(q) \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

Заметим также, что для проверки, является ли некоторое преобразование  $f: S \rightarrow S$  аффинным, достаточно проверить выполнение (1.63) для некоторой одной точки  $p \in S$  и всякого вектора  $\vec{v} \in V$ , если известно, что  $\varphi: V \rightarrow V$  – это линейное преобразование. Действительно, для произвольной точки  $q \in S$  имеем

$$\begin{aligned} f(q + \vec{v}) &= f((p + \overrightarrow{pq}) + \vec{v}) = f(p + (\overrightarrow{pq} + \vec{v})) = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq} + \vec{v}) = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}) + \\ &+ \varphi(\vec{v}) = f(q) + \varphi(\vec{v}). \end{aligned}$$

### Примеры аффинных преобразований.

1. **Тождественное преобразование**  $f(p) = p$  является аффинным, так как для него справедливо следующее:

$$\begin{cases} f(p) = p, \\ f(q) = q \end{cases} \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pq},$$

то есть имеем тождественное преобразование векторов пространства  $V$ , которое, как известно, является линейным преобразованием.

2. **Параллельный перенос** на некоторый вектор  $\vec{v}$ , определяемый следующим образом:

$$t_{\vec{v}}(p) = p + \vec{v}.$$

Это преобразование является аффинным, так как преобразование векторного пространства  $\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{(p + \vec{v})(q + \vec{v})} = \overrightarrow{pq}$ , как несложно видеть, является линейным. В частности, при  $\vec{v} = \vec{0}$  имеем тождественное преобразование.

3. **Поворот** вокруг некоторой точки  $o$  на угол  $\alpha$  против часовой стрелки. Он определяется следующей формулой:

$$f(p) = o + \varphi(\overrightarrow{op}), \quad (1.64)$$

где  $\varphi$  – это поворот вектора на угол  $\alpha$  против часовой стрелки. Преобразование  $f$  является аффинным, так как преобразование  $\varphi$  является линейным, и выполняется формула (1.63) при  $p = o$ :

$$f(p) = f(o + \overrightarrow{op}) = f(o) + \varphi(\overrightarrow{op}),$$

а при подстановке  $p = o$  в равенство (1.64) получается  $f(o) = o + \varphi(\overrightarrow{oo}) = o$ , поэтому окончательно имеем  $f(o + \overrightarrow{op}) = o + \varphi(\overrightarrow{op})$  для произвольного вектора  $\overrightarrow{op} \in V$ .

4. **Масштабирование** в окрестности точки  $o$  на коэффициент  $a > 0$  выражается следующей формулой:

$$f(p) = o + a \cdot \overrightarrow{op}. \quad (1.65)$$

Нетрудно видеть, что преобразование, выражаемое формулой (1.65), является аффинным. При  $0 < a < 1$  имеет место отдаление от точки  $o$ ,  $a = 1$  соответствует тождественному преобразованию, при  $a > 1$  формула (1.65) описывает приближение к точке  $o$ .

5. **Симметрия относительно точки  $o$** , обладающая следующим свойством:

$$\forall p \in S : \overrightarrow{of(p)} = -\overrightarrow{op},$$

откуда следует

$$f(p) = o - \overrightarrow{op}.$$

По этой формуле получается, что симметрия относительно точки  $o$  также является аффинным преобразованием.

6. В евклидовых аффинных пространствах можно также рассматривать **симметрии относительно аффинных подпространств** (например, прямых, плоскостей). Такие преобразования можно выразить следующей формулой:

$$\overrightarrow{(\text{пр}_{S'} p) f(p)} = -\overrightarrow{(\text{пр}_{S'} p) p},$$

где  $S'$  – аффинное подпространство,  $\text{пр}_{S'} p$  – ортогональная проекция точки  $p$  на это аффинное подпространство. Для нахождения ортогональной проекции положим, что аффинное подпространство  $S'$  задаётся некоторой точкой  $o$  и линейной независимой системой векторов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ , которые служат направляющими векторами этого подпространства. Тогда для некоторых  $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}$  выполняется равенство:

$$\text{пр}_{S'} p = o + p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + \dots + p_k \vec{e}_k.$$

Вектор  $\overline{(\text{пр}_{S'} p)p}$  должен быть ортогонален каждому из векторов  $\vec{e}_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ :

$$\begin{aligned} \overline{(\text{пр}_{S'} p)p} &= \overline{op} - p_1 \vec{e}_1 - p_2 \vec{e}_2 - \dots - p_k \vec{e}_k, \\ \overline{(\text{пр}_{S'} p)p} \perp \vec{e}_i &\Leftrightarrow \overline{(\text{пр}_{S'} p)p} \cdot \vec{e}_i = 0 \Leftrightarrow (\overline{op} - p_1 \vec{e}_1 - p_2 \vec{e}_2 - \dots - p_k \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_i = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_i + p_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_i + \dots + p_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i = \overline{op} \cdot \vec{e}_i. \end{aligned}$$

В матричном виде эти равенства можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1^2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_k \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2^2 & \dots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{e}_k \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{op} \cdot \vec{e}_1 \\ \overline{op} \cdot \vec{e}_2 \\ \dots \\ \overline{op} \cdot \vec{e}_k \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

В левой части полученного равенства получилась **матрица Грама**, которая является невырожденной для любой линейно независимой системы векторов  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k)$ . Значит, система (1.66) имеет единственное решение, и ортогональная проекция  $\text{пр}_{S'} p$  определяется однозначно. Значит, симметрию относительно аффинного подпространства  $S'$  можно задать следующей формулой:

$$\begin{aligned} f(p) &= \text{пр}_{S'} p - \overline{(\text{пр}_{S'} p)p} = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k) P_{S'} - \\ &- (\overline{op} - (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k) P_{S'}) = o - \overline{op} + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k) P_{S'}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

где столбец  $P_{S'} = (p_1, \dots, p_k)^T$  определяется исходя из уравнения (1.66). Преобразование, определяемое формулой (1.67), является аффинным, так как преобразование  $df(\overline{op}) = -\overline{op} + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k) P_{S'}$  является линейным в силу свойств век-

торных операций, в том числе скалярного умножения векторов. Геометрическая интерпретация формулы (1.67) дана на рисунке 1.39.

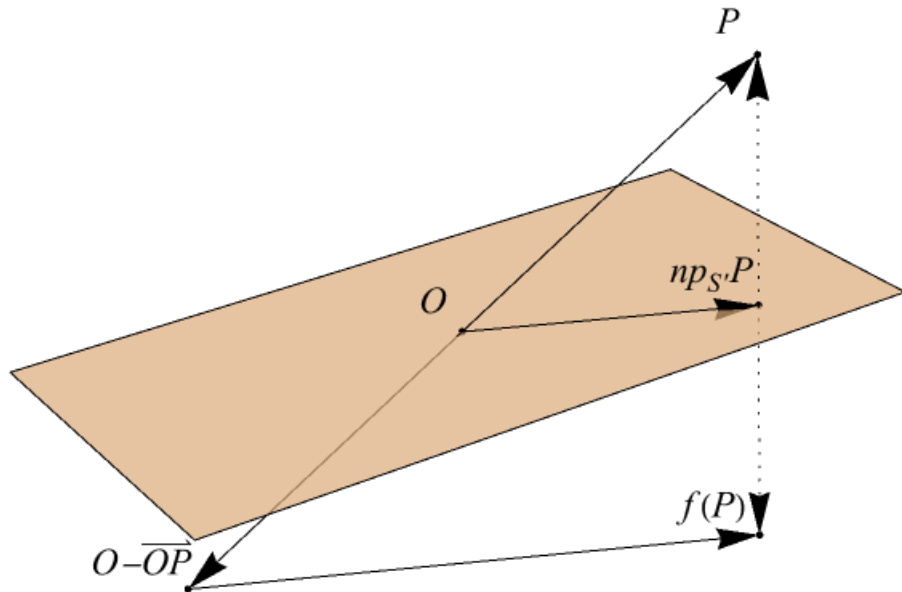


Рисунок 1.39 – Построение в пространстве точки  $f(P)$ , симметричной точке  $P$  относительно некоторой плоскости  $S'$ . Треугольники  $\triangle OP(\text{пр}_{S'}P)$  и  $\triangle(O - \overline{OP})Pf(P)$  подобны, причём второй треугольник больше первого в 2 раза.

### Свойства аффинных преобразований.

1. Композиция аффинных преобразований является аффинным преобразованием, причём дифференциал этой композиции равен композиции дифференциалов исходных аффинных преобразований:  $d(g \circ f) = dg \circ df$ .

◆ Для произвольной точки  $p \in S$  и вектора  $\vec{v} \in V$  имеем следующее:

$$\begin{aligned} g(f(p + \vec{v})) &= g(f(p) + df(\vec{v})) = g(f(p)) + dg(df(\vec{v})) = \\ &= (g \circ f)(p) + (dg \circ df)(\vec{v}). \end{aligned}$$

Так как композиция линейных преобразований векторного пространства – это также линейное преобразование, то отсюда получим, что  $g \circ f$  – аффинное преобразование с дифференциалом  $dg \circ df$ . ■

2. Аффинное преобразование является биективным тогда и только тогда, когда биективен его дифференциал.

◆ Рассмотрим векторизацию пространства  $S$  относительно некоторой точки  $o \in S$   $\chi_o$ . Векторизация, как было показано ранее, является би-

екцией. Рассмотрим также аффинное преобразование  $f : S \rightarrow S$ , для которого по определению справедливо равенство

$$f(p) = f(o + \chi_o(p)) = f(o) + df(\chi_o(p)).$$

Применим к обеим частям этого равенства векторизацию  $\chi_{f(o)}$  :

$$\chi_{f(o)}(f(p)) = \chi_{f(o)}(f(o) + df(\chi_o(p))) = df(\chi_o(p)),$$

откуда имеем  $\chi_{f(o)} \circ f = df \circ \chi_o$ . Итак, если  $f$  – биекция, то  $df = \chi_{f(o)} \circ f \circ \chi_o^{-1}$  также является биекцией как композиция биекций, а если  $df$  – биекция, то  $f = \chi_{f(o)}^{-1} \circ df \circ \chi_o$  – также биекция. ■

3. Если  $f : S \rightarrow S$  – биективное аффинное преобразование, то  $f^{-1}$  также является аффинным, причём  $df^{-1} = (df)^{-1}$ .

◆ С одной стороны, для произвольных точек  $p, q \in S$  выполняется равенство

$$f(q) = f(p) + df(\overrightarrow{pq}).$$

С другой стороны, с учётом доказанного выше свойства  $df$  также является биекцией, и для него существует обратное преобразование  $(df)^{-1}$ .

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} q = p + \overrightarrow{pq} &\Rightarrow f^{-1}(f(q)) = f^{-1}(f(p) + df(\overrightarrow{pq})) = \\ &= f^{-1}(f(p)) + (df)^{-1}(df(\overrightarrow{pq})) = \\ &= f^{-1}(f(p)) + (df)^{-1}(\overrightarrow{f(p)f(q)}). \end{aligned}$$

Обозначая  $f(p) = p'$ ,  $f(q) = q'$ , окончательно получим  $f^{-1}(q') = f^{-1}(p') + (df)^{-1}(\overrightarrow{p'q'})$ . Это равенство выполняется для любых точек  $p', q' \in S$ , так как по свойствам биекций для них всегда найдутся точки  $p$  и  $q$  такие, что  $f(p) = p'$ ,  $f(q) = q'$ , значит,  $f^{-1}$  – аффинное преобразование с дифференциалом  $(df)^{-1}$ . ■

### 1.5.4. Матрица аффинного преобразования

Рассмотрим некоторое аффинное пространство  $S$ , в котором задана ДСК  $OE = (o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$ , а также аффинное преобразование  $f : S \rightarrow S$ . Как было отмечено ранее, для его задания достаточно определить образ некоторой одной точки, а также линейное преобразование  $df$ , в свою очередь определяемое образом некоторого базиса векторного пространства  $V$ . Пусть известны координаты точки  $f(o)$  и векторов  $df(\vec{e}_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , в ДСК  $OE$  и базисе  $E$  соответственно:

$$\begin{aligned} df(\vec{e}_1) &= e_{11}\vec{e}_1 + e_{21}\vec{e}_2 + \dots + e_{n1}\vec{e}_n, \\ df(\vec{e}_2) &= e_{12}\vec{e}_1 + e_{22}\vec{e}_2 + \dots + e_{n2}\vec{e}_n, \\ &\dots \\ df(\vec{e}_n) &= e_{1n}\vec{e}_1 + e_{2n}\vec{e}_2 + \dots + e_{nn}\vec{e}_n, \\ f(o) &= o + o_1\vec{e}_1 + o_2\vec{e}_2 + \dots + o_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Матрица  $\Phi_E = (e_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , по определению является матрицей линейного преобразования  $df$ , записанной в базисе  $E$ . Обозначая через  $O_{OE}^F = (o_1, o_2, \dots, o_n)^T$  координатный столбец точки  $f(o)$  в ДСК  $OE$ , запишем формулу для образа произвольной точки  $p \in S$ , имеющей координаты  $P_{OE} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , при аффинном преобразовании  $f$ :

$$\begin{aligned} f(p) &= f(o) + df(\vec{op}) = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)O_{OE}^F + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)\Phi_E P_{OE} = \\ &= o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)(\Phi_E P_{OE} + O_{OE}^F). \end{aligned}$$

Таким образом, получили координаты точки  $f(p)$  в ДСК  $OE$ , равные

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix}.$$

Эту формулу можно также записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cccc|c} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} & o_1 \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} & o_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} & o_n \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Матрица

$$F_{OE} = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_E & O_{OE}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right) \quad (1.69)$$

из формулы (1.68) называется **матрицей аффинного преобразования**  $f$ , записанной в ДСК  $OE$ .

**Связь между матрицами аффинного преобразования в разных ДСК.** Рассмотрим две ДСК  $OE = (o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  и  $O'E' = (o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n))$ . Пусть некоторая точка  $p \in S$  имеет координатные столбцы  $P_{OE}$  и  $P_{O'E'}$  в этих ДСК:

$$p = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)P_{OE} = o' + (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)P_{O'E'}. \quad (1.70)$$

После применения ко всем частям равенств (1.70) аффинного преобразования  $f$  получится следующее:

$$f(p) = f(o) + df((\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)P_{OE}) = f(o') + df((\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)P_{O'E'}). \quad (1.71)$$

Если точка  $f(o)$  в ДСК  $OE$  имеет координатный столбец  $O_{OE}^F$ ,  $f(o')$  в ДСК  $O'E'$  имеет координатный столбец  $O_{O'E'}^F$ , а линейное преобразование  $df$  в базисах  $E$  и  $E'$  имеет соответственно матрицы  $\Phi_E$  и  $\Phi_{E'}$ , то тогда равенство (1.71) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(p) &= o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)O_{OE}^F + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)\Phi_E P_{OE} = \\ &= o' + (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)O_{O'E'}^F + (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)\Phi_{E'} P_{O'E'}, \\ f(p) &= o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)(\Phi_E P_{OE} + O_{OE}^F) = o' + (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)(\Phi_{E'} P_{O'E'} + O_{O'E'}^F). \end{aligned}$$

Если точка  $o'$  в ДСК  $OE$  имеет координатный столбец  $O_{OE}'$ , а матрица перехода от базиса  $E$  к базису  $E'$  равна  $S_{E \rightarrow E'}$ , то тогда имеют место равенства



$$\begin{aligned}
& o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)(\Phi_E P_{OE} + O_{OE}^F) = \\
& = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)O'_{OE} + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)S_{E \rightarrow E'}(\Phi_{E'} P_{O'E'} + O_{O'E'}^F), \\
& o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)(\Phi_E P_{OE} + O_{OE}^F) = o + (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)(S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} P_{O'E'} + O'_{OE} + S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F).
\end{aligned}$$

В силу единственности вектора  $\overrightarrow{of(p)}$ , а также единственности разложения произвольного вектора по базису  $E$  имеет место равенство:

$$\Phi_E P_{OE} + O_{OE}^F = S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} P_{O'E'} + O'_{OE} + S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F.$$

Сюда вместо столбца  $P_{OE}$  подставляется равенство (1.61), описывающее связь координатных столбцов одной и той же точки в разных ДСК:

$$\begin{aligned}
\Phi_E (S_{E \rightarrow E'} P_{O'E'} + O'_{OE}) + O_{OE}^F &= S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} P_{O'E'} + O'_{OE} + S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F, \\
\Phi_E S_{E \rightarrow E'} P_{O'E'} + \Phi_E O'_{OE} + O_{OE}^F &= S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} P_{O'E'} + O'_{OE} + S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F, \\
(\Phi_E S_{E \rightarrow E'} - S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'}) P_{O'E'} + (\Phi_E O'_{OE} + O_{OE}^F - O'_{OE} - S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F) &= \mathbf{0}_{n,1}.
\end{aligned}$$

Так как точка  $p \in S$  была выбрана произвольно, то последнее равенство должно выполняться для всякого столбца  $P_{O'E'}$ , откуда имеем систему равенств

$$\begin{cases} \Phi_E S_{E \rightarrow E'} = S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'}, \\ \Phi_E O'_{OE} + O_{OE}^F = O'_{OE} + S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F. \end{cases} \quad (1.72)$$

Докажем теперь следующее равенство, связующее матрицы  $F_{OE}$  и  $F_{O'E'}$  аффинного преобразования  $f$ , записанные соответственно в ДСК  $OE$  и  $O'E'$ :

$$F_{OE} S_{OE \rightarrow O'E'} = S_{OE \rightarrow O'E'} F_{O'E'}. \quad (1.73)$$

Составим эти матрицы по формулам (1.62) и (1.69):

$$F_{OE} = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_E & O_{OE}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right), F_{O'E'} = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_{E'} & O_{O'E'}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right), S_{OE \rightarrow O'E'} = \left( \begin{array}{c|c} S_{E \rightarrow E'} & O'_{OE} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right)$$

и перемножим по правилу умножения блочных матриц:

$$F_{OE} S_{OE \rightarrow O'E'} = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_E & O_{OE}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} S_{E \rightarrow E'} & O'_{OE} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_E S_{E \rightarrow E'} + O_{OE}^F \mathbf{0}_{1,n} & \Phi_E O'_{OE} + O_{OE}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} S_{E \rightarrow E'} + \mathbf{0}_{1,n} & \mathbf{0}_{1,n} O'_{OE} + 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \begin{array}{c|c} \Phi_E S_{E \rightarrow E'} & \Phi_E O'_{OE} + O_{OE}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right), \\
S_{OE \rightarrow O'E'} F_{O'E'} &= \left( \begin{array}{c|c} S_{E \rightarrow E'} & O'_{OE} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \Phi_{E'} & O_{O'E'}^F \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} + O'_{OE} \mathbf{0}_{1,n} & S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F + O'_{OE} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} \Phi_{E'} + \mathbf{0}_{1,n} & \mathbf{0}_{1,n} O_{O'E'}^F + 1 \end{array} \right) = \\
&= \left( \begin{array}{c|c} S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} & S_{E \rightarrow E'} O_{O'E'}^F + O'_{OE} \\ \hline \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Сравнивая эти матрицы, приходим к выводу об их равенстве, так как их соответственные блоки равны согласно системе (1.72).

Матрицы одного и того же линейного преобразования  $\Phi_E$  и  $\Phi_{E'}$ , записанные в разных базисах, а также матрицы одного и того же аффинного преобразования  $F_{OE}$  и  $F_{O'E'}$ , записанные в разных ДСК, обладают рядом полезных свойств. Матрицы  $A, B \in \mathbb{R}_{n,n}$  называются **подобными**, если найдётся некоторая невырожденная матрица  $T$  (её иногда называют **трансформирующей**), для которой выполняется равенство

$$B = T^{-1}AT.$$

Нетрудно видеть, что матрицы  $\Phi_E$  и  $\Phi_{E'}$  являются подобными, так как матрица  $S_{E \rightarrow E'}$  перехода от базиса  $E$  к базису  $E'$  из первого равенства системы (1.72) является невырожденной, и это равенство равносильно равенству

$$\Phi_{E'} = S_{E \rightarrow E'}^{-1} \Phi_E S_{E \rightarrow E'}.$$

Аналогично, матрицы  $F_{OE}$  и  $F_{O'E'}$  являются подобными, так как в силу невырожденности матрицы  $S_{OE \rightarrow O'E'}$  и равенства (1.73) имеем

$$F_{O'E'} = S_{OE \rightarrow O'E'}^{-1} F_{OE} S_{OE \rightarrow O'E'}.$$

### Свойства подобных матриц.

1. Всякая матрица подобна самой себе, ведь  $\forall A \in \mathbb{R}_{n,n} : A = E_n^{-1} A E_n$ .
2. Если матрица  $A$  подобна матрице  $B$ , то и матрица  $B$  подобна матрице  $A$ , ведь  $B = T^{-1}AT \Rightarrow TBT^{-1} = T(T^{-1}AT)T^{-1} = TT^{-1}ATT^{-1} = A$ . Отсюда также следует, что если трансформирующая матрица  $T$  переводит  $A$  в  $B$ , то трансформирующая матрица, переводящая  $B$  в  $A$ , равна  $T^{-1}$ .

3. Если матрица  $A$  подобна  $B$ , а  $B$  подобна  $C$ , то  $A$  подобна  $C$ . Действительно, если  $B = T_1^{-1}AT_1$ ,  $C = T_2^{-1}BT_2$ , то  $C = (T_1T_2)^{-1}A(T_1T_2)$ .
4. Всякая скалярная матрица (в том числе единичная) подобна только самой себе, так как  $\forall T \in \mathbb{R}_{n,n}, \det T \neq 0, \alpha \in \mathbb{R} : T^{-1}(\alpha E_n)T = \alpha T^{-1}E_nT = \alpha E_n$ .
5. Определители подобных матриц равны:  $B = T^{-1}AT \Rightarrow \det B = \det(T^{-1}A \times T) = \det(T^{-1}) \det A \det T = (\det T)^{-1} \det A \det T = \det A$ .

### 1.5.5. Геометрические свойства аффинных преобразований

В некотором аффинном пространстве  $S$  рассмотрим  $f : S \rightarrow S$  – биективное аффинное преобразование.

1. При преобразовании  $f$  прямые переходят в прямые, причём образы параллельных прямых являются параллельными прямыми.

◆ Всякая прямая может быть задана уравнением вида  $p = p_0 + t\vec{a}$ , где  $p_0$  – некоторая точка на этой прямой,  $\vec{a} \neq \vec{0}$  – направляющий вектор. Под действием аффинного преобразования  $f$  прямая переводится во множество точек, задаваемых уравнением

$$p' = f(p) = f(p_0) + df(t\vec{a}) = f(p_0) + t \cdot df(\vec{a}),$$

которое описывает прямую, проходящую через точку  $f(p_0)$  параллельно вектору  $df(\vec{a})$ , если только  $df(\vec{a}) \neq \vec{0}$ . Это неравенство действительно выполняется в силу инъективности преобразования  $f$ :  $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow df(\vec{a}) \neq df(\vec{0}) = \vec{0}$ .

Для двух различных параллельных прямых  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , заданных уравнениями  $p = p_1 + t\vec{a}$  и  $p = p_2 + t\vec{a}$ , должно выполняться  $\overrightarrow{p_1p_2} \nparallel \vec{a}$ . Образы этих прямых задаются соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} f(\Delta_1) : p'_1 &= f(p_1) + t \cdot df(\vec{a}), \\ f(\Delta_2) : p'_2 &= f(p_2) + t \cdot df(\vec{a}). \end{aligned}$$

Докажем, что эти прямые не совпадают, что равносильно  $\overrightarrow{f(p_1)f(p_2)} \nparallel df(\vec{a})$ . Отрицание этого утверждения означает, что найдётся некоторое действительное число  $t_0$ , для которого  $\overrightarrow{f(p_1)f(p_2)} = t_0 \cdot df(\vec{a})$ . Тогда справедливо равенство

$$f(p_2) = f(p_1) + df(\overrightarrow{p_1 p_2}) = f(p_1) + \overrightarrow{f(p_1) f(p_2)} = f(p_1) + t_0 \cdot df(\vec{a}).$$

Применяя к нему обратное преобразование  $f^{-1}$ , получим  $p_2 = p_1 + t_0 \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} = t_0 \vec{a}$ . Таким образом, получено противоречие тому, что  $\overrightarrow{p_1 p_2} \nparallel \vec{a}$ , значит, на самом деле  $\overrightarrow{f(p_1) f(p_2)} \nparallel df(\vec{a})$ , что доказывает, что образы двух разных параллельных прямых при преобразовании  $f$  – это тоже две разные параллельные прямые. ■

2. Отрезок под воздействием  $f$  переходит в отрезок.

◆ Отрезок  $p_1 p_2$  в аффинном пространстве задаётся следующим уравнением:

$$p = p_1 + t \overrightarrow{p_1 p_2}, t \in [0, 1].$$

Применяя к этому уравнению преобразование  $f$ , получим

$$f(p) = f(p_1) + t \cdot \overrightarrow{f(p_1) f(p_2)}, t \in [0, 1].$$

$f(p_1) \neq f(p_2)$ , если  $p_1 \neq p_2$ , т.е. получили уравнение, которое тоже задаёт отрезок с концами в точках  $f(p_1)$  и  $f(p_2)$ . ■

Перед формулированием следующего свойства введём несколько новых понятий.

В метрическом аффинном пространстве (т.е. в таком, где задана функция расстояния между двумя точками:  $d : S \times S \rightarrow [0, +\infty), (p, q) \mapsto d(p, q) = |\overrightarrow{pq}|$ ) определим понятие стремления последовательности точек к некоторому пределу следующим образом: будем говорить, что **последовательность точек**  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  **стремится к точке**  $p \in S$  (**пределу** этой последовательности) и записывать  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ , если найдётся некоторый номер  $N$  (возможно, очень большой), после которого все точки данной последовательности будут находиться на ничтожно малом расстоянии от точки  $p$ . Строгая формулировка на языке эпсилон-дельта:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : d(p_n, p) < \varepsilon.$$

Аналогично, **последовательность векторов**  $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$  метрического векторного пространства (т.е. такого, на котором задана функция длины вектора:  $d : V \rightarrow [0, +\infty), \vec{v} \mapsto d(\vec{v}) = |\vec{v}|$ ) **стремится к вектору**  $\vec{v}$ , если начиная с некоторого

номера  $N$  разность каждого вектора последовательности с вектором  $\vec{v}$  имеет ничтожно малую длину:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : d(\vec{v}_n - \vec{v}) < \varepsilon.$$

**Пределом отображения  $f : S \rightarrow S$  аффинного пространства** при стремлении к точке  $p_0 \in S$  называется точка  $q_0 \in S$ , обозначаемая  $q_0 = \lim_{p \rightarrow p_0} f(p)$ , если для всякой последовательности  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ , последовательность из образов этих точек стремится к  $q$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = q_0$ . Если при этом  $q_0 = f(p_0)$ , то преобразование  $f$  называется **непрерывным в точке  $p_0$** . Можно также дать определение непрерывного в точке  $p_0$  отображения на языке эпсилон-дельта:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall p \in S, d(p, p_0) \leq \delta : d(f(p), f(p_0)) \leq \varepsilon.$$

Если преобразование  $f$  непрерывно во всякой точке некоторого открытого множества точек аффинного пространства (в т.ч. всего пространства), то преобразование  $f$  называется **непрерывным на этом множестве**. Аналогично определяются понятия предела и непрерывности для преобразований векторных пространств.

**3. Основная теорема аффинной геометрии.** Пусть теперь  $f : S \rightarrow S$  — биективное непрерывное на всём пространстве  $S$  преобразование аффинного пространства  $S$  такое, что для всяких трёх точек  $p_1, p_2, p_3$ , лежащих на одной прямой, их образы  $q_i = f(p_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , также лежат на одной прямой. Тогда  $f$  — это аффинное преобразование.

♦ Докажем теорему в случае  $\dim S = 2$ . Из условия теоремы следует, что всякая прямая под воздействием преобразования  $f$  отображается, вообще говоря, на часть некоторой прямой. Докажем, что образом любой прямой будет некоторая другая прямая (т.е. вся прямая, а не её часть).

От противного: пусть на прямой, проходящих через точки  $q_1 = f(p_1)$  и  $q_2 = f(p_2)$ , найдётся некоторая точка  $q_3$ , которая не является образом ни для какой точки прямой  $p_1 p_2$ . Это означает, что в силу биективности преобразования  $f$  существует точка  $p_3 = f^{-1}(q_3)$ , и она не лежит на прямой  $p_1 p_2$ . Обозначим прямые:  $\Delta_1 = p_1 p_2$ ,  $\Delta_2 = p_2 p_3$ .

Рассмотрим произвольную точку  $r \in S$ . Ясно, что если  $r \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ , то точка  $f(r)$  лежит на одной прямой с точками  $q_1, q_2$  и  $q_3$ . Если это не так, то через точку  $r$  можно провести третью прямую  $\Delta_3$ , пересекающие две другие

прямые в точках  $p'_1 = \Delta_3 \cap \Delta_1$ ,  $p'_2 = \Delta_3 \cap \Delta_2$ , причём  $p'_1 \neq p_1$ ,  $p'_2 \neq p_2$  (Рисунок 1.40). Тогда если точки  $f(p_1)$ ,  $f(p_2)$ ,  $f(p_3)$  лежат на одной прямой, то должны лежать на этой же прямой точки  $f(p'_1)$  (так как  $p'_1 \in \Delta_1$ ),  $f(p'_2)$  (в силу  $p'_2 \in \Delta_2$ ), а образ точки  $r$  лежит на одной прямой с точками  $f(p'_1)$  и  $f(p'_2)$ , так как точки  $r$ ,  $p'_1$  и  $p'_2$  лежат на одной прямой  $\Delta_3$ . Таким образом, имеем, что точка  $f(r)$  для произвольной  $r \in S$  лежит на одной прямой с  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , т.е. образ всего аффинного пространства  $f(S)$  лежит на этой прямой. Это противоречит тому, что  $f$  – биективное отображение. Итак, доказано, что под воздействием преобразования  $f$  прямая переходит в прямую.

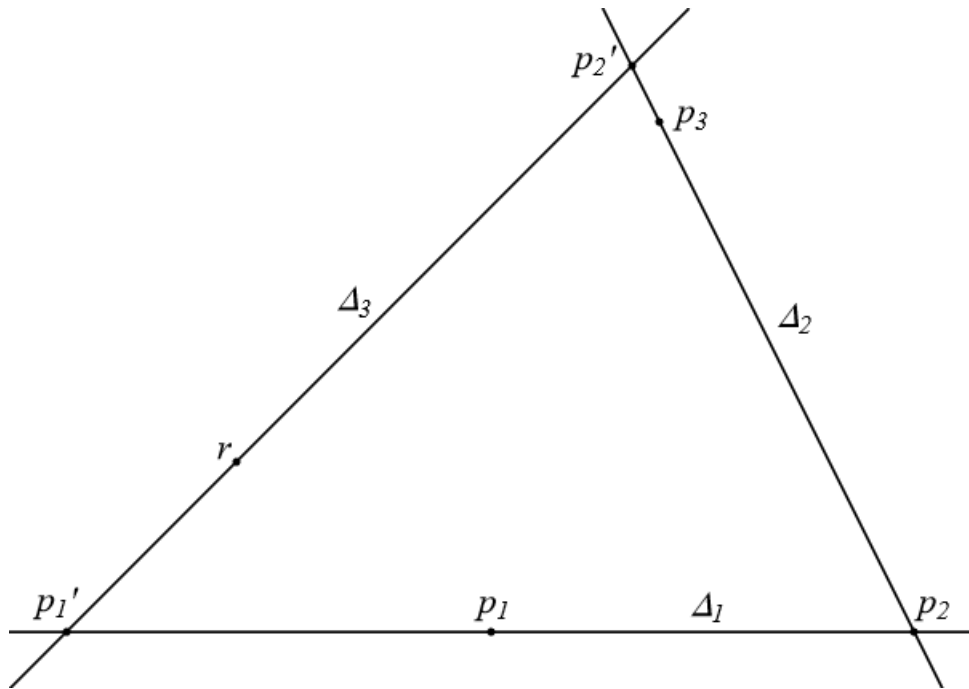


Рисунок 1.40 – Если образы точек  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  лежат на одной прямой, то на этой же прямой лежит образ произвольной точки  $r$ .

Теперь покажем, что для параллельных прямых  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  будет выполняться  $f(\Delta_1) \parallel f(\Delta_2)$ . Отрицанием этого утверждения является то, что прямые  $f(\Delta_1)$  и  $f(\Delta_2)$  пересекаются в некоторой точке  $q$ . Если это так, то точка  $f^{-1}(q)$  должна лежать на пересечении прямых  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , которое в силу их параллельности является пустым множеством. То есть всё-таки  $f(\Delta_1) \parallel f(\Delta_2)$ .

Определим отображение  $\tilde{f} : S \times S \rightarrow V, (p, q) \mapsto \tilde{f}(p, q) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ . Докажем, что по такому отображению можно корректно задать преобразование векторного пространства  $V$   $\varphi(\vec{v}) = \varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ , которое не зависит от способа откладывания вектора  $\vec{v}$  на аффинном пространстве  $S$ . Для этого нужно показать, что если для некоторых точек  $p, q, p', q' \in S$   $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'}$ , то  $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(p')f(q')}$ . Равенство  $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p'q'}$  означает, что четырёхугольник

$pqq'p'$  – параллелограмм (так как две его противоположные стороны параллельны и равны), значит, прямые  $pq$  и  $p'q'$ , а также  $pp'$  и  $qq'$  параллельны (Рисунок 1.41а). Под воздействием преобразования  $f$  они переводятся в параллельные прямые  $f(p)f(q)$  и  $f(p')f(q')$ ,  $f(p)f(p')$  и  $f(q)f(q')$ . Из параллельности этих прямых следует, что четырёхугольник  $f(p)f(q)f(q')f(p')$  является параллелограммом, значит,  $|\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{f(p')f(q')}|$  (Рисунок 1.41б). Это вкпе с сонаправленностью двух векторов и даёт равенство  $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(p')f(q')}$ .

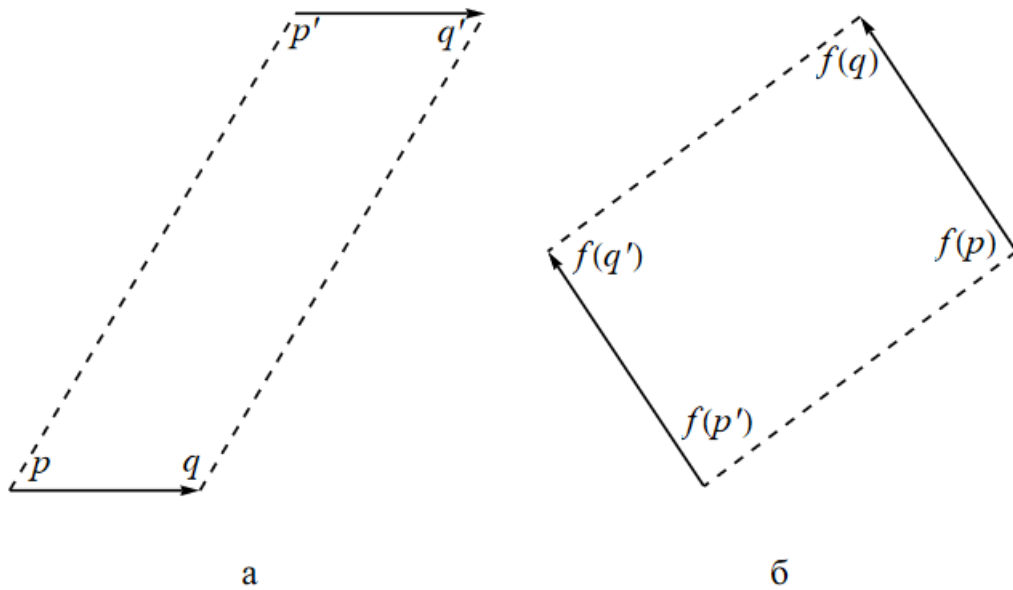


Рисунок 1.41 – Параллелограмм  $pqq'p'$  (а) и его образ при преобразовании  $f$  (б)

Отметим, что сказанное выше справедливо для точек  $p'$  и  $q'$ , не лежащих на прямой  $pq$ . Но для точек  $p''$  и  $q''$ , лежащих на  $pq$ , утверждение также выполняется, что нетрудно проверить, рассматривая два параллелограмма (Рисунок 1.42).

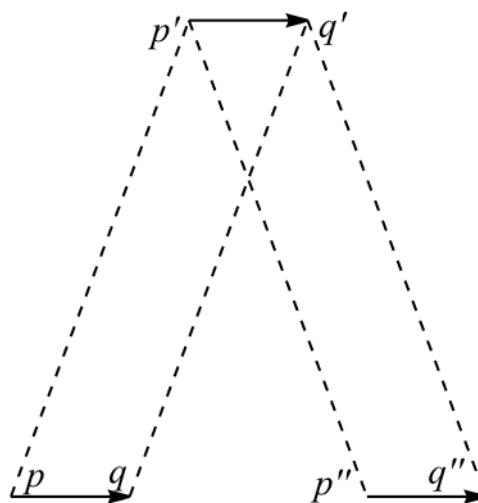


Рисунок 1.42 – Случай отложения равных отрезков на одной прямой

Осталось показать, что преобразование  $\varphi: V \rightarrow V$  является линейным. Во-первых, если  $\vec{v}, \vec{w} \in V$  – произвольные векторы, то полагая  $\vec{v} = \overrightarrow{pq}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{qr}$  для некоторых точек  $p, q, r \in S$ , получим следующее:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v} + \vec{w}) &= \varphi(\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = \varphi(\overrightarrow{pr}) = \overline{f(p)f(r)} = \overline{f(p)f(q)} + \\ &+ \overline{f(q)f(r)} = \varphi(\overrightarrow{pq}) + \varphi(\overrightarrow{qr}). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Доказательство равенства  $\varphi(\alpha\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{v})$  проведём по порядку для случаев  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$  и, наконец, для  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Случай  $\alpha \in \mathbb{N}$  равносильно повторному сложению векторов:

$$\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(\alpha\vec{v}) = \varphi(\underbrace{\vec{v} + \dots + \vec{v}}_{\alpha \text{ слагаемых}}) = \underbrace{\varphi(\vec{v}) + \dots + \varphi(\vec{v})}_{\alpha \text{ слагаемых}} = \alpha\varphi(\vec{v}). \quad (1.75)$$

Для перехода к множеству целых чисел вначале докажем  $\varphi(-\vec{v}) = -\varphi(\vec{v})$ . Подставим в (1.74)  $\vec{v} = \overrightarrow{pq}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{qp}$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp}) &= \overline{f(p)f(q)} + \overline{f(q)f(p)} = \varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{w}), \\ \varphi(\vec{0}) &= \vec{0} = \varphi(\vec{v}) + \varphi(-\vec{v}), \\ \varphi(-\vec{v}) &= -\varphi(\vec{v}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.75) следует  $\varphi(\alpha\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{v})$  при  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Для перехода к множеству рациональных чисел в (1.75) подставим  $\vec{v} = \frac{1}{n}\vec{w}$ ,  $\alpha = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\varphi(\vec{w}) = \varphi\left(n \cdot \frac{1}{n}\vec{w}\right) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\vec{w}\right) \Rightarrow \varphi(\vec{w}) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\vec{w}\right) \Rightarrow \frac{1}{n}\varphi(\vec{w}) = \varphi\left(\frac{1}{n}\vec{w}\right),$$

т.е. из-под функции  $\varphi$  можно выносить множитель вида  $1/n$ . Вместе с правомочностью вынесения целочисленных множителей получим выполнение равенства  $\varphi(\alpha\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{v})$  для  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

Наконец, для доказательства этого равенства для действительного множителя  $\alpha$  воспользуемся непрерывностью преобразования  $f$ . Для доказательства непрерывности преобразования  $\varphi$  вначале покажем непрерывность векторизации  $\chi_o: S \rightarrow V$  аффинного пространства  $S$  относительно произвольной точки  $o \in S$ , т.е. всякая последовательность точек  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ , стремящаяся к некоторой



точке  $p$ , под воздействием векторизации отображается в последовательность  $\{\chi_o(p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ , стремящуюся к  $\chi_o(p)$ . Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : |\overrightarrow{p_n p}| < \varepsilon,$$

$$|\overrightarrow{p_n p}| = |\overrightarrow{op} - \overrightarrow{op_n}| = |\chi_o(p) - \chi_o(p_n)| < \varepsilon.$$

Похожим образом доказывается непрерывность отображения, обратного векторизации относительно некоторой точки. Тогда получается, что  $\varphi(\overrightarrow{op}) = \varphi \circ \chi_o(p) = \overrightarrow{f(o)f(p)} = \chi_{f(o)} \circ f(p)$ , и если  $\overrightarrow{op} = \vec{v}$ , то  $p = \chi_o^{-1}(\vec{v})$ , и  $\varphi(\vec{v}) = \chi_{f(o)} \circ f \circ \chi_o^{-1}(\vec{v})$  является непрерывным отображением как композиция непрерывных отображений.

Исходя из непрерывности преобразования  $\varphi$  покажем непрерывность преобразования

$$g : \mathbb{R} \rightarrow V, \alpha \mapsto g(\alpha) = \varphi(\alpha \vec{v}) - \alpha \varphi(\vec{v})$$

для произвольного вектора  $\vec{v} \in V$ . Для этого рассмотрим последовательность действительных чисел  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ , стремящуюся к  $\alpha$ . Применение к ней отображения  $g$  даст последовательность  $\{g(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\varphi(\alpha_n \vec{v}) - \alpha_n \varphi(\vec{v})\}_{n=1}^{\infty}$ . Последовательность  $\{\alpha_n \vec{v}\}_{n=1}^{\infty}$  стремится к  $\alpha \vec{v}$ , так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon,$$

$$|\alpha_n \vec{v} - \alpha \vec{v}| = |(\alpha_n - \alpha) \vec{v}| = |\alpha_n - \alpha| |\vec{v}| < \varepsilon |\vec{v}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon_1 = \varepsilon |\vec{v}| > 0 \exists N \forall n > N : |\alpha_n \vec{v} - \alpha \vec{v}| < \varepsilon_1,$$

значит,  $\{\varphi(\alpha_n \vec{v})\}_{n=1}^{\infty}$  в силу непрерывности  $\varphi$  стремится к  $\varphi(\alpha \vec{v})$ . Аналогично  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \varphi(\vec{v}) = \alpha \varphi(\vec{v})$ , и тогда<sup>1</sup>  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(\alpha_n \vec{v}) - \alpha_n \varphi(\vec{v})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_n \vec{v}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \varphi(\vec{v}) = \varphi(\alpha \vec{v}) - \alpha \varphi(\vec{v})$ .

Из непрерывности функции  $g(\alpha) = \varphi(\alpha \vec{v}) - \alpha \varphi(\vec{v})$  получается, что можно вычислить её значение для произвольного  $\alpha \in \mathbb{R}$  по последовательности  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  из рациональных чисел, стремящейся к  $\alpha$ <sup>2</sup>:

<sup>1</sup> Предел суммы последовательностей векторов равен сумме пределов этих последовательностей. Доказывается аналогично тому же свойству числовых последовательностей.

<sup>2</sup> Таковую последовательность всегда можно построить, например, используя десятичную запись числа  $\alpha$  и осуществляя округления до всё большего и большего количества значащих цифр.

$$g(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(\alpha_n \vec{v}) - \alpha_n \varphi(\vec{v})) = 0.$$

Значит, равенство  $\varphi(\alpha \vec{v}) = \alpha \varphi(\vec{v})$  выполнено для  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Отсюда и из (1.74) следует линейность преобразования  $\varphi: V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$ .

Окончательно получим, что исходное преобразование  $f: S \rightarrow S$  аффинного пространства расписывается в виде

$$\forall p, q \in S: f(p + \overrightarrow{pq}) = f(q) = f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)} = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq}),$$

где  $\varphi$  – это линейное преобразование. Обозначая  $\vec{v} = \overrightarrow{pq}$ , получим формулу (1.63), т.е. преобразование  $f$  – аффинное. ■

Замечание. Приведено доказательство для аффинной плоскости  $S$ . Для аффинных пространств большей размерности будут по-другому выглядеть части доказательства про образ прямой и образы параллельных прямых: надо доказывать, что прямая переходит в прямую (при помощи индукции по размерности  $S$ ), а плоскость – в плоскость (так как пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые). Отсюда будет следовать, что параллельные прямые переходят в параллельные (а не скрещивающиеся) прямые. Дальнейшее доказательство выглядит так же.

### 1.5.6. Движения аффинных пространств

Аффинное преобразование  $f: S \rightarrow S$  евклидова пространства  $S$  называется **движением**, если оно не изменяет расстояния между точками, т.е.  $\forall p, q \in S: |\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{pq}|$ .

Покажем, что аффинное преобразование  $f$  является движением тогда и только тогда, когда его дифференциал  $df$  – это ортогональное преобразование векторного пространства  $V$ . ♦ **Необходимость.** Из равенства  $|\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |\overrightarrow{pq}|$  и аффинности преобразования  $f$  следует, что  $|df(\overrightarrow{pq})| = |\overrightarrow{pq}|$ , т.е. преобразование  $df$  сохраняет длину вектора, а также то, что  $df$  – это линейное преобразование. Отсюда следует ортогональность  $df$ , так как  $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$  выполняется следующее:

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}(|\vec{v} + \vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2 - |\vec{w}|^2) = \quad (1.76)$$

$$= \frac{1}{2} \left( |df(\vec{v} + \vec{w})|^2 - |df(\vec{v})|^2 - |df(\vec{w})|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( |df(\vec{v}) + df(\vec{w})|^2 - |df(\vec{v})|^2 - |df(\vec{w})|^2 \right) = df(\vec{v}) \cdot df(\vec{w}). \quad (1.76)$$

Достаточность легко вытекает из того факта, что ортогональное преобразование сохраняет длину вектора:  $|\overrightarrow{f(p)f(q)}| = |df(\overrightarrow{pq})| = |\overrightarrow{pq}|$ . ■

Преобразование  $f : S \rightarrow S$ , сохраняющее расстояние между точками, назовём **изометриями**. Покажем, что всякая изометрия является аффинным преобразованием, и можно отождествить понятия изометрии и движения евклидова аффинного пространства. ♦ Очевидно, что параллельный перенос  $t_{\vec{v}} : S \rightarrow S$  на некоторый вектор  $\vec{v} \in V$  является изометрией. Также ясно, что композиция изометрий сама является изометрией. Пусть задана некоторая изометрия  $f : S \rightarrow S$ . Для некоторой точки  $o \in S$  обозначим  $\vec{v} = \overrightarrow{f(o)o}$ . Тогда  $g = t_{\vec{v}} \circ f$  – изометрия такая, что  $g(o) = o$ . Введём в рассмотрение векторизацию  $\chi_o$  пространства  $S$  относительно точки  $o$ . Обозначим через  $\tilde{g} = \chi_o \circ g \circ \chi_o^{-1}$  преобразование векторного пространства  $V$ , переводящее вектор  $\overrightarrow{op}$  в вектор  $\overrightarrow{og(p)}$ . Покажем, что  $\tilde{g}$  – это линейное преобразование. Для этого вначале докажем его ортогональность, для чего, в свою очередь, достаточно доказать, что  $\tilde{g}$  сохраняет длину вектора. Для всяких векторов  $\vec{u} = \overrightarrow{op}$  и  $\vec{w} = \overrightarrow{oq}$  справедливо следующее:

$$|\vec{w} - \vec{u}| = |\overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op}| = |\overrightarrow{pq}| = |\overrightarrow{g(p)g(q)}| = |\overrightarrow{og(q)} - \overrightarrow{og(p)}| = |\tilde{g}(\vec{w}) - \tilde{g}(\vec{u})|.$$

Если сюда теперь подставить  $\vec{u} = \vec{0} = \overrightarrow{oo}$ , тогда имеем  $\tilde{g}(\vec{u}) = \overrightarrow{og(o)} = \overrightarrow{oo} = \vec{0}$ , откуда  $|\tilde{g}(\vec{w})| = |\vec{w}|$  для произвольного  $\vec{w} \in V$ . Тогда аналогично (1.76) получим, что  $\tilde{g}$  – ортогональное преобразование, а отсюда следует его линейность, ведь

$$\begin{aligned} \forall \vec{u}, \vec{w} \in V : |\tilde{g}(\vec{u} + \vec{w}) - \tilde{g}(\vec{u}) - \tilde{g}(\vec{w})|^2 &= |\tilde{g}(\vec{u} + \vec{w})|^2 + |\tilde{g}(\vec{u})|^2 + |\tilde{g}(\vec{w})|^2 - \\ &- 2\tilde{g}(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \tilde{g}(\vec{u}) - 2\tilde{g}(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \tilde{g}(\vec{w}) + 2\tilde{g}(\vec{u}) \cdot \tilde{g}(\vec{w}) = |\vec{u} + \vec{w}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{w}|^2 - \\ &- 2(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{w} + 2\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u} + \vec{w} - \vec{u} - \vec{w}|^2 = 0 \Rightarrow \tilde{g}(\vec{u} + \vec{w}) - \tilde{g}(\vec{u}) - \tilde{g}(\vec{w}) = \\ &= \vec{0} \Rightarrow \tilde{g}(\vec{u} + \vec{w}) = \tilde{g}(\vec{u}) + \tilde{g}(\vec{w}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in V : |\tilde{g}(\alpha\vec{u}) - \alpha\tilde{g}(\vec{u})|^2 &= |\tilde{g}(\alpha\vec{u})|^2 + |\alpha\tilde{g}(\vec{u})|^2 - 2\tilde{g}(\alpha\vec{u}) \cdot (\alpha\tilde{g}(\vec{u})) = |\tilde{g}(\alpha\vec{u})|^2 + \\ &+ \alpha^2 |\tilde{g}(\vec{u})|^2 - 2\alpha\tilde{g}(\alpha\vec{u}) \cdot \tilde{g}(\vec{u}) = |\alpha\vec{u}|^2 + \alpha^2 |\vec{u}|^2 - 2\alpha \cdot \alpha\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \tilde{g}(\alpha\vec{u}) - \alpha\tilde{g}(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(\alpha \vec{u}) = \alpha \tilde{g}(\vec{u}).$$

Теперь покажем, что преобразование  $g : S \rightarrow S$  является аффинным. Для этого достаточно доказать равенство

$$\forall p, q \in S : g(q) = g(p) + \tilde{g}(\overrightarrow{pq}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} g(p) + \tilde{g}(\overrightarrow{pq}) &= g(p) + \tilde{g}(\overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op}) = g(p) + \tilde{g}(\overrightarrow{oq}) - \tilde{g}(\overrightarrow{op}) = g(p) + \overrightarrow{og(q)} - \overrightarrow{og(p)} = \\ &= g(p) + \overrightarrow{g(p)o} + \overrightarrow{og(q)} = g(q). \end{aligned}$$

Наконец, имеем, что преобразование  $f = t_{\vec{v}}^{-1} \circ g = t_{-\vec{v}} \circ g$  является аффинным как композиция аффинных преобразований. ■

**Матрицы ортогональных линейных преобразований и движений.** В евклидовом векторном пространстве  $V$  рассмотрим некоторый базис  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ . Для задания операции векторного умножения достаточно задать значения векторных произведений базисных векторов, по которым можно построить матрицу Грама системы  $E$ :

$$G_E = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_k \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2^2 & \dots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{e}_k \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_k^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для произвольных векторов  $\vec{a}, \vec{b} \in V$  и их координатных столбцов в базисе  $E$ , равных соответственно  $A_E = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  и  $B_E = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , имеем следующее:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + \dots + b_n \vec{e}_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_E^T G_E B_E.$$

Для ортогонального преобразования  $\varphi : V \rightarrow V$ , которое в базисе  $E$  имеет матрицу  $\Phi_E$ , выполняются следующие равенства:

$$\varphi(\vec{a}) \cdot \varphi(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow (\Phi_E A_E)^T G_E (\Phi_E B_E) = A_E^T G_E B_E \Rightarrow A_E^T \Phi_E^T G_E \Phi_E B_E = A_E^T G_E B_E.$$

Это равенство выполняется для произвольных координатных столбцов  $A_E$  и  $B_E$ , поэтому  $\Phi_E^T G_E \Phi_E = G_E$ . Если базис  $E$  является ортонормированным, т.е.  $|\vec{e}_i| = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  при  $i \neq j$ , то тогда матрица Грама равна единичной матрице, а матрица ортогонального преобразования  $\varphi$  удовлетворяет следующему равенству:

$$\Phi_E^T \Phi_E = E_n. \quad (1.77)$$

Матрица  $\Phi_E$ , удовлетворяющая равенству (1.77), называется **ортогональной**. Перечислим свойства ортогональной матрицы  $\Phi$ :

1.  $\det \Phi = \pm 1$ . Это свойство следует из равенства (1.77) и из равенства определителей матриц  $\Phi$  и  $\Phi^T$ . Отсюда следует, что всякое ортогональное преобразование  $\varphi$  является невырожденным, а матрица обратного преобразования получается путём транспонирования матрицы исходного преобразования, записанной в том же базисе.
2. Если матрица  $\Phi$  ортогональна, то также является ортогональной матрица  $\Phi^{-1} = \Phi^T$ , так как  $(\Phi^{-1})^T \Phi^{-1} = (\Phi^T)^T \Phi^T = \Phi \Phi^T = \Phi \Phi^{-1} = E_n$ . Отсюда следует, что если преобразование  $\varphi$  ортогонально, то обратное преобразование  $\varphi^{-1}$  также является ортогональным.
3. Если матрицы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  ортогональны, то ортогонально и их произведение:  $(\Phi_1 \Phi_2)^T \Phi_1 \Phi_2 = \Phi_2^T \Phi_1^T \Phi_1 \Phi_2 = \Phi_2^T E_n \Phi_2 = E_n$ . Отсюда получается, что композиция ортогональных преобразований является ортогональным преобразованием.
4. Столбцы ортогональной матрицы  $\Phi = (\varphi_{ij})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , образуют ортонормированную систему столбцов:  $\sum_{k=1}^n \varphi_{ki} \varphi_{kj} = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$  — символ Кронекера.

Рассмотрим некоторое движение  $f: S \rightarrow S$  аффинной плоскости  $S$ . Её матрица в ДСК  $OE = (o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$  с ортонормированным базисом  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  имеет вид

$$F_{OE} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & o_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & o_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} = \Phi_E$  – матрица дифференциала  $df$  в базисе  $E$ , которая является ортогональной,  $(o_1, o_2)^T$  – координатный столбец точки  $f(o)$  в ДСК  $OE$ . Выясним, какой вид могут иметь элементы матрицы  $F_{OE}$ . Для начала рассмотрим матрицу  $\Phi_E$ , для которой должно выполняться равенство (1.77):

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 & \varphi_{11}\varphi_{12} + \varphi_{21}\varphi_{22} \\ \varphi_{12}\varphi_{11} + \varphi_{22}\varphi_{21} & \varphi_{12}^2 + \varphi_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Распишем это матричное равенство как систему равенств:

$$\begin{cases} \varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 = 1, \\ \varphi_{12}^2 + \varphi_{22}^2 = 1, \\ \varphi_{11}\varphi_{12} + \varphi_{21}\varphi_{22} = 0. \end{cases}$$

Из первых двух равенств этой системы следует, что найдутся такие числа  $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$ , что  $\varphi_{11} = \cos \alpha$ ,  $\varphi_{21} = \sin \alpha$ ,  $\varphi_{12} = \cos \beta$ ,  $\varphi_{22} = \sin \beta$ . Подставим эти значения в третье равенство:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta &= 0, \\ \cos(\alpha - \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $\alpha - \beta \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \right\}$ . Возможны два случая:

- $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$  либо  $\beta = \alpha - \frac{3\pi}{2}$ . Тогда получим  $\cos \beta = -\sin \alpha$ ,  $\sin \beta = \cos \alpha$ .
- В случае  $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$  либо  $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$  имеем  $\cos \beta = \sin \alpha$ ,  $\sin \beta = -\cos \alpha$ .

Значит, матрица дифференциала  $df$  в базисе  $E$  и матрица  $f$  в ДСК  $OE$  выглядят следующим образом:

$$\Phi_E = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}, F_{OE} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha & o_1 \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha & o_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in (-\pi, \pi]. \quad (1.78)$$

Далее покажем, что матрицу всякого движения, записанную в ДСК с ортонормированным базисом, можно представить в следующем виде:

$$F_{OE} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha & o_1 \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha & o_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & o'_1 \\ 0 & 1 & o'_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.79)$$

или что всякое движение можно представить в виде композиции либо тождественного преобразования (знак «+» у самой правой матрицы в (1.79)), либо симметрического отражения относительно оси  $Oe_1$  (знак «-») с параллельным переносом на некоторый вектор с координатами  $(o'_1, o'_2)^T$  и поворотом вокруг начала координат на угол  $\alpha$  против часовой стрелки. ♦ Для этого обозначим знак в самой правой матрице через  $\sigma \in \{-1, 1\}$  и вычислим правую часть равенства (1.79):

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & o'_1 \\ 0 & 1 & o'_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & o'_1 \cos \alpha - o'_2 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & o'_1 \sin \alpha + o'_2 \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sigma \sin \alpha & o'_1 \cos \alpha - o'_2 \sin \alpha \\ \sin \alpha & \sigma \cos \alpha & o'_1 \sin \alpha + o'_2 \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, знак  $\sigma$  равен знаку числа  $(F_{OE})_{22} = \pm \cos \alpha$ . Осталось определить вектор  $(o'_1, o'_2)^T$ , задающий параллельный перенос:

$$\begin{cases} \cos \alpha \cdot o'_1 - \sin \alpha \cdot o'_2 = o_1, \\ \sin \alpha \cdot o'_1 + \cos \alpha \cdot o'_2 = o_2. \end{cases}$$

В этой системе основная матрица  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  является невырожденной, значит, система имеет единственное решение, которое может быть найдено, скажем, по правилу Крамера. Таким образом, показано, что для матрицы

движения  $F_{OE}$ , записанной в некоторой ДСК с ортонормированным базисом и задающейся формулой (1.78), существуют простейшие движения (симметрия, параллельный перенос и поворот, либо только параллельный перенос с поворотом), композиция которых даёт заданное движение. ■

## 1.6. Проективные преобразования

Центральное место в научных и производственных направлениях, связанных с моделированием и построением компьютерной графики, занимают **проективные преобразования** трёхмерного пространства, т.е. отображения, действующее из трёхмерного пространства на некоторую плоскость в этом же пространстве, иногда называемую **картинной плоскостью**. Из этого определения следует, что проективные преобразования не являются биекциями (так как они не сюръективны, т.е. не для всех точек пространства найдутся прообразы при таких преобразованиях), соответственно, вообще говоря, нельзя по проекции некоторого объекта восстановить координаты его геометрических элементов в пространстве. Тем не менее, используя наиболее подходящее проективное преобразование, можно добиться как можно более реалистичного изображения некоторого объекта на плоскости, по которому можно судить о тех или иных свойствах и характеристиках этого объекта.

При рассмотрении трёхмерного аффинного пространства  $S$  и его преобразований обычно пользуются следующими декартовыми системами координат:

- **мировая система координат (МСК)**, считающейся неподвижной и общей для всех рассматриваемых сцен и объектов на них;
- **экранная система координат** используется для описания проекций различных объектов (например, на экран компьютера или другого устройства для вывода графики);
- **система координат сцены** вводится при рассмотрении конкретной сцены, т.е. некоторого отдельного участка пространства, в рамках которого рассматриваются объекты, так или иначе взаимодействующие друг с другом;
- **объектная система координат (ОСК)** вводится для описания геометрических свойств конкретного объекта и является подвижной относительно системы координат сцены и/или МСК.

Будем рассматривать МСК  $Oxyz$ , у которой ось  $Ox$  направлена вправо,  $Oy$  – вверх,  $Oz$  – вперёд (Рисунок 1.43). Картинная плоскость обычно совпадает с какой-нибудь из координатных плоскостей МСК, которые будем обозначать следующим образом:  $Oxy = f$  – **фронтальная плоскость**,  $Ozx = h$  – **горизон-**



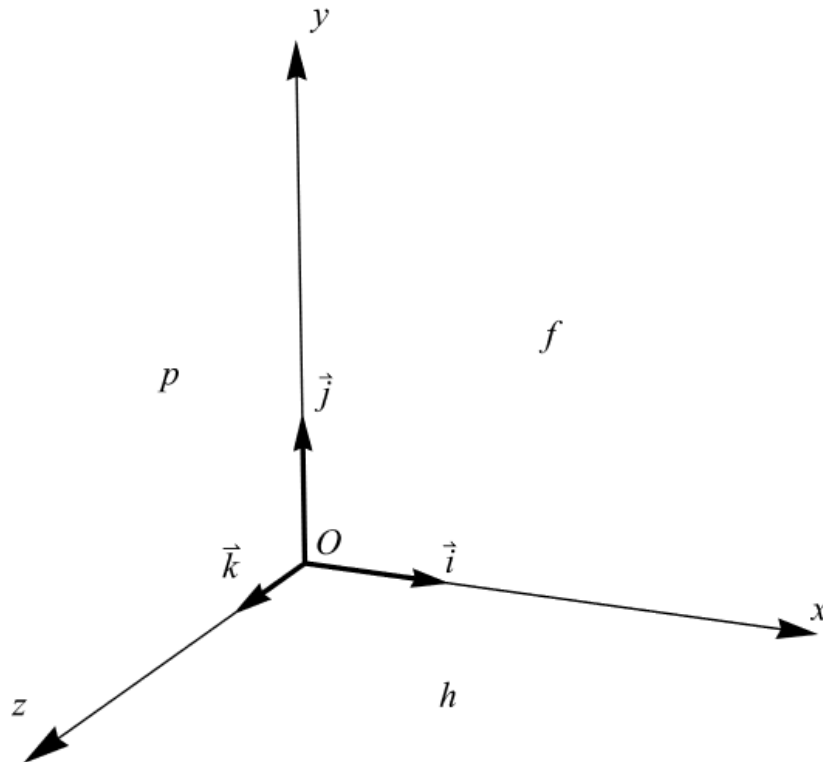


Рисунок 1.43 – Мировая система координат  $Oxyz$ , её координатные плоскости  $f = Oxy$ ,  $h = Ozx$ ,  $p = Oyz$  и базисные векторы  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**тальная плоскость**,  $Oyz = p$  – **профильная плоскость**. Орты, сонаправленные осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , будем обозначать соответственно  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Проекции осей других систем координат на картинную плоскость будем обозначать  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$ .

Различают **параллельное** и **центральное** проектирование и, соответственно, параллельные и центральные проективные преобразования. Они отличаются тем, что построение параллельных проекций осуществляется путём проведения от точек объекта лучей, параллельных некоторому заданному направлению (в случае удалённого наблюдения), в то время как при построении центральных проекций лучи проводятся от некоторой точки в пространстве, называемой **проектором**, через ключевые точки рассматриваемого объекта (при достаточной близости наблюдателя к наблюдаемым объектам и сценам).

Простейшим примером параллельного проективного преобразования является **ортографическое проектирование**, которое заключается в проецировании некоторого объекта на фронтальную, горизонтальную и/или профильную плоскости МСК перпендикулярно этим плоскостям. В результате ортографического проектирования на плоскости  $f$ ,  $h$ ,  $p$  получаются соответственно **передний**, **верхний** и **правый** виды этого объекта (Рисунок 1.44).

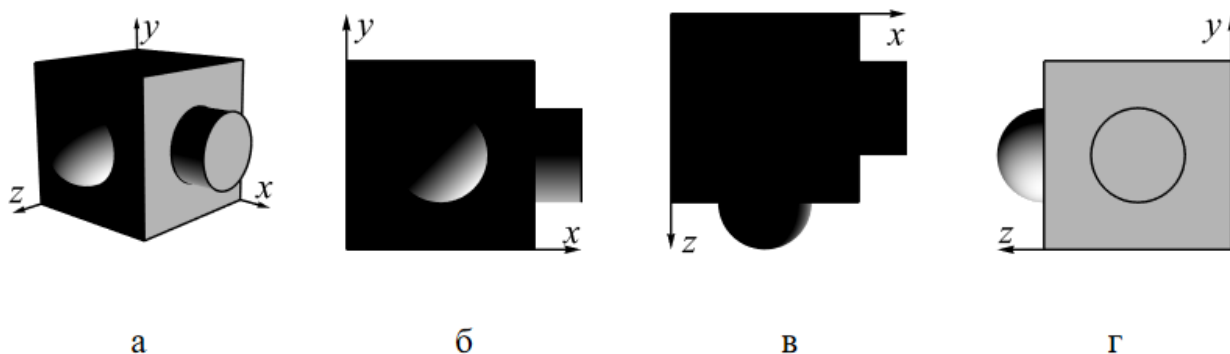


Рисунок 1.44 – Ортогографические проекции объекта в МСК (а): фронтальная (передний вид, б), горизонтальная (верхний вид, в), профильная (правый вид, г)

Иногда для достаточно сложных объектов рассматривают также задний, нижний и левый виды. У таких видов, в отличие от приведённых на рисунке 1.44, системы координат  $Oxy$ ,  $Ozx$  и  $Oyz$  являются левыми. Матрицы аффинных преобразований, осуществляющих ортогографическое проектирование, выглядят следующим образом:

$$F_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При ортогографическом проектировании часто используются все три основных вида, так как нельзя восстановить изначальные координаты точек только по одному из них. Кроме ортогографических проекций, часто используются другие виды параллельного проектирования, позволяющие получить одну проекцию, по которой можно судить об основных характеристиках объекта: форме, взаимном расположении его элементов и т.д.

### 1.6.1. Аксонометрические проекции

**Аксонометрическое проектирование** некоторого объекта осуществляется путём ортогонального проектирования объекта, повернутого конкретным образом относительно МСК, на фронтальную плоскость МСК (Рисунок 1.45). Будем задавать поворот объекта и его ОСК относительно МСК композицией следующих ортогональных линейных преобразований:

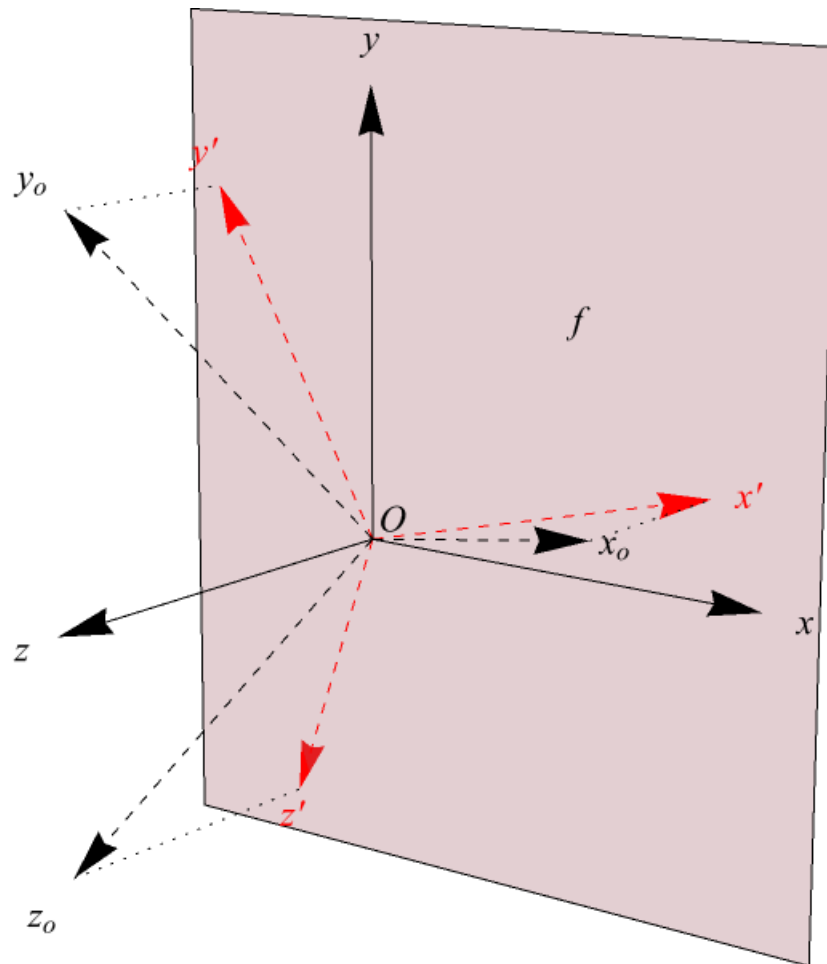


Рисунок 1.45 – Построение проекций (отмечены красным) для осей ОСК  $Ox_o y_o z_o$  на фронтальную плоскость  $f$  мировой системы координат  $Oxyz$

- поворот вокруг оси  $Oy$  на угол  $\beta$  против часовой стрелки, которая в ба-

зисе  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  обладает матрицей  $\Phi_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$ ,

- поворот вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha$ :  $\Phi_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ,

- поворот вокруг оси  $Oz$  на угол  $\gamma$ :  $\Phi_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Композиция этих поворотов даёт преобразование со следующей матрицей:

$$\Phi_{\text{пов}} = \Phi_z(\gamma)\Phi_x(\alpha)\Phi_y(\beta) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Значит, базисные векторы  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  МСК переводятся в базисные векторы  $(\vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$  ОСК с координатными столбцами, как у матрицы (1.80):

$$(\vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\Phi_{\text{пов}}.$$

Таким образом, матрица поворота  $\Phi_{\text{пов}}$  также является матрицей перехода от базисных векторов МСК к базисным векторам ОСК, и по координатам произвольной точки в ОСК можно найти её координаты в МСК:

$$\begin{cases} p = o + (\vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)P_{\text{ОСК}}, \\ p = o + (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})P_{\text{МСК}} \end{cases} \Rightarrow P_{\text{МСК}} = \Phi_{\text{пов}}P_{\text{ОСК}}. \quad (1.81)$$

Зная координаты некоторой точки в мировой системе координат, несложно её спроектировать на плоскость  $f$  при помощи ортографического фронтального проектирования:

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{\text{МСК}}.$$

Таким образом, окончательно получим следующую матрицу линейного преобразования, осуществляющего аксонометрическое проектирование:

$$\Phi_{\text{акс}} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Под воздействием этого преобразования базисные векторы  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  переводятся в проекции  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  базисных векторов  $(\vec{i}_o, \vec{j}_o, \vec{k}_o)$  ОСК.

**Основные характеристики аксонометрических проективных преобразований.** Зная матрицы  $\Phi_{\text{пов}}$  и  $\Phi_{\text{акс}}$ , описывающие аксонометрическое проектирование, можно вычислить некоторые полезные числовые характеристики, позволяющие строить искомые проекции. Часто решается и обратная задача: по желаемым характеристикам аксонометрической проекции восстановить матрицы соответствующих линейных преобразований.

**Вектор направления на наблюдателя.** Как и всякое параллельное проективное преобразование, аксонометрическое проектирование характеризуется вектором направления на дальнего наблюдателя  $\vec{s}$  (Рисунок 1.46). Так как происходит ортогональное проектирование на фронтальную плоскость МСК, то в МСК вектор  $\vec{s}$  должен иметь координатный столбец  $S_{\text{МСК}} = (0, 0, z)^T$ ,  $z > 0$ . Координатный столбец  $S_{\text{ОСК}} = (s_x, s_y, s_z)^T$ , записанный в ОСК, легко получить исходя из равенства (1.81):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \Phi_{\text{пов}} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \Phi_{\text{пов}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

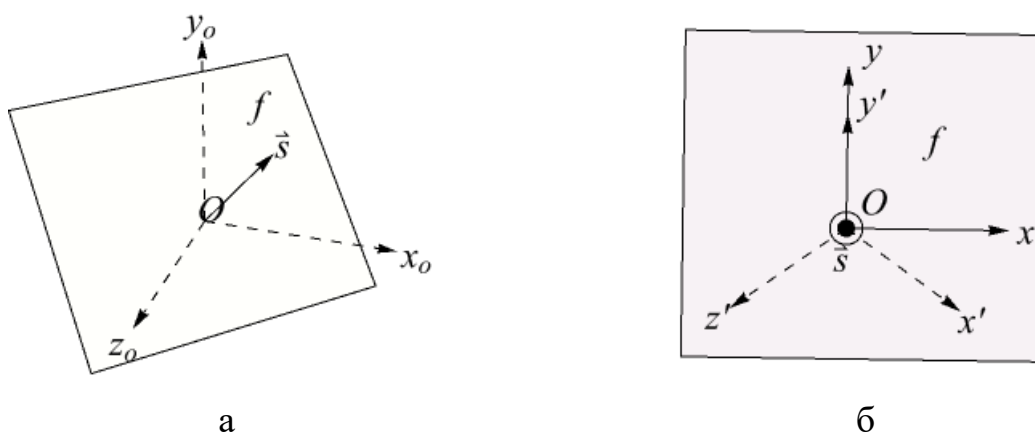


Рисунок 1.46 – При заданном направлении на дальнего наблюдателя для получения аксонометрической проекции нужно осуществить ортогональное проектирование на плоскость  $f \perp \vec{s}$ , проходящую через начало координат

Матрица  $\Phi_{\text{пов}}$  была получена как матрица композиции поворотов, которые являются ортогональными преобразованиями. Значит,  $\Phi_{\text{пов}}$  является ортогональной матрицей, и  $\Phi_{\text{пов}}^{-1} = \Phi_{\text{пов}}^T$ . Отсюда получаем

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \Phi_{\text{пов}}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при заданных углах поворота  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  направление на наблюдателя выражается вектором  $\vec{s}$  единичной длины, координаты в ОСК которого находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} s_x &= -\cos \alpha \sin \beta, \\ s_y &= \sin \alpha, \\ s_z &= \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Этот вектор может быть домножен на произвольное значение  $z > 0$ .

Если же, напротив, по известному вектору  $\vec{s}$  произвольной длины нужно построить аксонометрическую проекцию, то углы  $\alpha$  и  $\beta$  находятся по следующим формулам:

$$\alpha = \arcsin \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}, \quad (1.82)$$

$$\beta = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{s_x}{s_z}, s_z > 0, \\ -\operatorname{sgn} s_x \cdot \pi - \operatorname{arctg} \frac{s_x}{s_z}, s_z < 0, \\ -\operatorname{sgn} s_x \cdot \frac{\pi}{2}, s_z = 0, \end{cases}$$

а угол  $\gamma$  выбирается произвольно. При значениях  $\gamma = 0$  и  $\cos \alpha > 0$  проекция  $Oy'$  сонаправлена исходной вертикальной оси  $Oy$ . Условие  $\cos \alpha > 0$  автоматически выполняется при использовании формулы (1.82).

**Углы наклона** осей ОСК к плоскости  $f$  находятся исходя из формулы (1.42):

$$\begin{aligned} \sin \psi_x &= \sin \angle(Ox_o, f) = \frac{|\vec{n}_f \cdot \vec{i}_o|}{|\vec{n}_f| |\vec{i}_o|} = |\vec{k} \cdot \vec{i}_o| = |\cos \alpha \sin \beta|, \\ \sin \psi_y &= \sin \angle(Oy_o, f) = |\vec{k} \cdot \vec{j}_o| = |\sin \alpha|, \\ \sin \psi_z &= \sin \angle(Oz_o, f) = |\vec{k} \cdot \vec{k}_o| = |\cos \alpha \cos \beta|. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Из этих равенств следует  $\sin^2 \angle(Ox_o, f) + \sin^2 \angle(Oy_o, f) + \sin^2 \angle(Oz_o, f) = 1$ .

Решая обратную задачу, т.е. по значениям углов  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  и  $\psi_z$  найти углы поворота ОСК, получим следующие формулы для нахождения углов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha \in \{\psi_y - \pi, -\psi_y, \psi_y, \pi - \psi_y\},$$

$$\beta \in \left\{ \arcsin \frac{\sin \psi_x}{\cos \psi_y} - \pi, -\arcsin \frac{\sin \psi_x}{\cos \psi_y}, \arcsin \frac{\sin \psi_x}{\cos \psi_y}, \pi - \arcsin \frac{\sin \psi_x}{\cos \psi_y} \right\} =$$

$$= \left\{ \arccos \frac{\sin \psi_z}{\cos \psi_y} - \pi, -\arccos \frac{\sin \psi_z}{\cos \psi_y}, \arccos \frac{\sin \psi_z}{\cos \psi_y}, \pi - \arccos \frac{\sin \psi_z}{\cos \psi_y} \right\},$$

а угол  $\gamma$  выбирается произвольно.

**Масштабные коэффициенты осевых искажений** показывают, как соотносятся длины проекций отрезков, отложенных на осях ОСК, с длинами этих исходных отрезков. Они равны длинам проекций  $(\vec{i}, \vec{j}', \vec{k}')$ , вычисляемым исходя из матрицы  $\Phi_{\text{акс}}$ :

$$m_x = |\vec{i}'| = \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta},$$

$$m_y = |\vec{j}'| = |\cos \alpha|, \quad (1.84)$$

$$m_z = |\vec{k}'| = \sqrt{\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}.$$

С другой стороны, как известно, длина проекции вектора на плоскость равна произведению длины исходного вектора на косинус угла между исходным вектором и этой плоскостью. Значит, получим следующие равенства, описывающие связь масштабных коэффициентов осевых искажений с углами наклона  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_z$ :

$$m_x = |\cos \psi_x|, m_y = |\cos \psi_y|, m_z = |\cos \psi_z|. \quad (1.85)$$

Отсюда следует равенство  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2$ .

Если для некоторой аксонометрической проекции дано отношение масштабных коэффициентов осевых искажений  $m_x : m_y : m_z = k_x : k_y : k_z$ , то, во-первых, можно восстановить точные значения этих коэффициентов:

$$m_x = \frac{\sqrt{2}k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}, m_y = \frac{\sqrt{2}k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}, m_z = \frac{\sqrt{2}k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}},$$

во-вторых, по формулам (1.84) и (1.85) восстанавливаются остальные характеристики аксонометрической проекции:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm m_y, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - m_y^2}, \\ \cos \beta &= \pm \frac{\sqrt{1 - m_z^2}}{m_y}, \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{1 - m_x^2}}{m_y}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\psi_x = \arccos m_x, \psi_y = \arccos m_y, \psi_z = \arccos m_z.$$

Знаки в этих формулах выбираются произвольно, от чего зависит искомая проекция.

Важной характеристикой также являются **углы между проекциями осей** ОСК, так как позволяют рисовать эти проекции, просто откладывая нужные углы. Например, можно рассматривать углы  $\delta_y$  – угол между исходной осью  $Oy$  и проекцией оси  $Oy'$  ОСК,  $\delta_{yx}$  – угол между проекциями  $Oy'$  и  $Ox'$ ,  $\delta_{yz}$  – угол между проекциями  $Oy'$  и  $Oz'$  (Рисунок 1.47). Вычислим эти углы как углы между ортами этих осей:

$$\delta_y = \angle(\vec{j}, \vec{j}') = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \end{vmatrix} \arccos \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{|\cos \alpha|} = \operatorname{sgn}(\cos \alpha \sin \gamma) \times \\ \times \arccos(\operatorname{sgn}(\cos \alpha) \cos \gamma),$$

$$\delta_{yx} = \angle(\vec{j}', \vec{i}') = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \end{vmatrix} \times \\ \times \arccos \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \beta}{|\cos \alpha| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}} = -\operatorname{sgn}(\cos \alpha \cos \beta) \arccos \frac{\operatorname{sgn}(\cos \alpha) \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}},$$

$$\delta_{yz} = \angle(\vec{j}', \vec{k}') = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{vmatrix} \times \\ \times \arccos \frac{-\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta}{|\cos \alpha| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} = -\operatorname{sgn}(\cos \alpha \sin \beta) \arccos \frac{-\operatorname{sgn}(\cos \alpha) \cos \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}.$$

Обозначая  $\alpha_x = \operatorname{sgn}(\cos \alpha)$ ,  $\alpha_y = \operatorname{sgn}(\sin \alpha)$ ,  $\beta_x = \operatorname{sgn}(\cos \beta)$ ,  $\beta_y = \operatorname{sgn}(\sin \beta)$ ,  $\gamma_y = \operatorname{sgn}(\sin \gamma)$  и пользуясь формулами (1.84) и (1.86), получим следующие формулы:



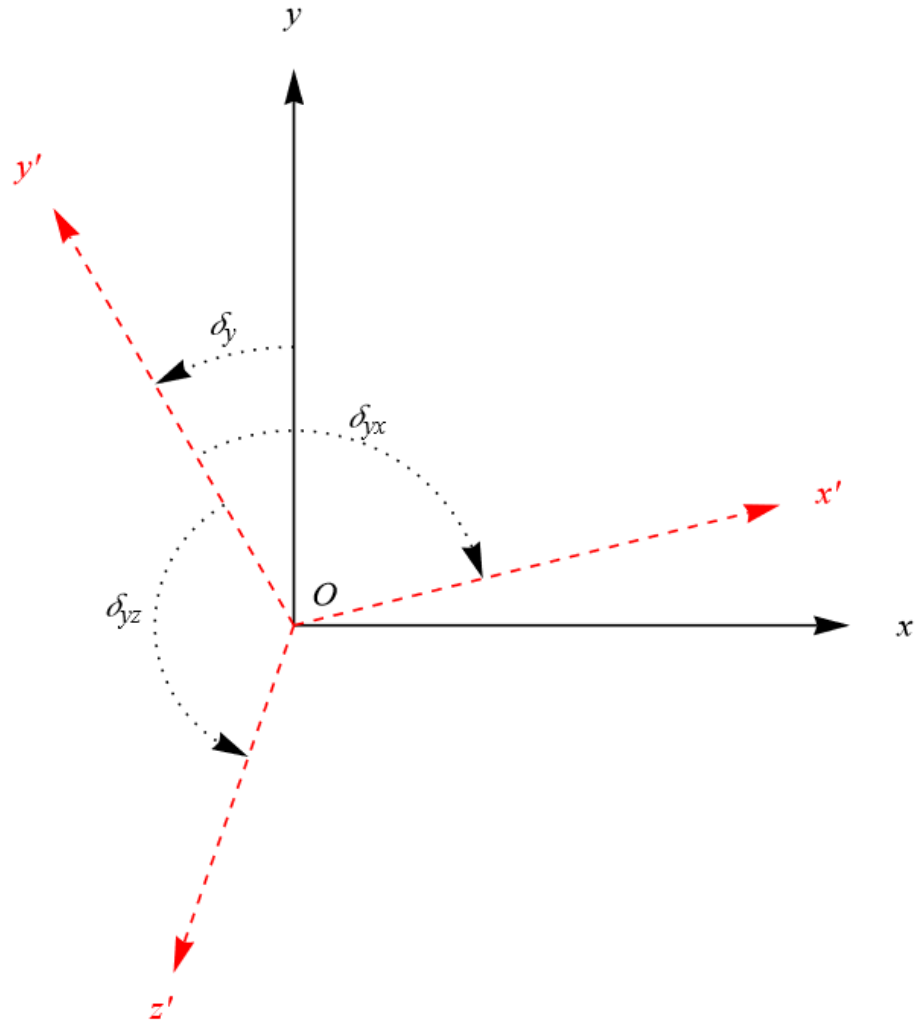


Рисунок 1.47 – Откладывание проекций осей ОСК (красные пунктирные стрелки) на фронтальной плоскости  $f$  по углам поворота  $\delta_y$ ,  $\delta_{yx}$ ,  $\delta_{yz}$ . Чёрными стрелками отмечены оси МСК  $Ox$  и  $Oy$ .

$$\begin{aligned} \delta_y &= \alpha_x \gamma_y \arccos(\alpha_x \cos \gamma), \\ \delta_{yx} &= -\alpha_x \beta_x \arccos \frac{\alpha_x \alpha_y \beta_y \sqrt{1-m_y^2} \sqrt{1-m_x^2}}{m_y m_x}, \\ \delta_{yz} &= -\alpha_x \beta_y \arccos \frac{-\alpha_x \alpha_y \beta_x \sqrt{1-m_y^2} \sqrt{1-m_z^2}}{m_y m_z}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Таким образом, имеем, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  поворота ОСК соответственно вокруг осей МСК  $Ox$  и  $Oy$  влияют на значения углов между осями ОСК и проективной плоскостью (формулы (1.83)), масштабных коэффициентов осевых искажений (1.84) и углов между проекциями осей ОСК (1.87), а угол  $\gamma$  поворота ОСК вокруг оси МСК  $Oz$  влияет только на угол  $\delta_y$  поворота оси  $Oy'$  относительно оси  $Oy$ . Поэтому часто используются аксонометрические проекции с уг-

лом  $\gamma = 0$ . При этом матрицы соответствующих линейных преобразований переписываются в следующем виде:

$$\Phi_{\text{пов}} = \Phi_z(0)\Phi_x(\alpha)\Phi_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{\text{акс}} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для сонаправленности осей  $Oy$  и  $Oy'$  необходимо потребовать также  $\cos \alpha > 0 \Rightarrow \alpha_x = 1$ , и тогда можно полагать  $\delta_y = 0$ .

### 1.6.2. Косоугольные проекции

Параллельное **косоугольное проецирование** осуществляется путём проецирования точек объекта вдоль некоторого направления, которое, вообще говоря, не является перпендикулярным картинной плоскости. При этом часто ОСК выбирается совпадающей с МСК.

Косоугольное проективное преобразование задаётся вектором  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$ , который указывает направление от начала координат к удалённому наблюдателю. В зависимости от выбора проективной плоскости ( $f$ ,  $h$  или  $p$ ) проведём через некоторую точку  $p(x, y, z)$  прямую параллельно вектору  $\vec{s}$ , а затем найдём пересечение этой прямой с проективной плоскостью:

$$\Delta_p : p' = p + t\vec{s}, t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} x' = x + s_x t, \\ y' = y + s_y t, \\ z' = z + s_z t. \end{cases}$$

В случае фронтального, горизонтального и профильного проектирования получим соответственно уравнения  $z' = 0$ ,  $y' = 0$  и  $x' = 0$ , откуда получим следующие значения параметра  $t$ :

$$t_f = -\frac{z}{s_z}, t_h = -\frac{y}{s_y}, t_p = -\frac{x}{s_x},$$

откуда находятся остальные координаты проекций:

$$\begin{pmatrix} x'_f \\ y'_f \\ z'_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s_x t_f \\ y + s_y t_f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{s_x}{s_z} z \\ y - \frac{s_y}{s_z} z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{s_x}{s_z} \\ 0 & 1 & -\frac{s_y}{s_z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_h \\ y'_h \\ z'_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s_x t_h \\ 0 \\ z + s_z t_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{s_x}{s_y} y \\ 0 \\ z - \frac{s_z}{s_y} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s_z}{s_y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y + s_y t_p \\ z + s_z t_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y - \frac{s_y}{s_x} x \\ z - \frac{s_z}{s_x} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{s_y}{s_x} & 1 & 0 \\ -\frac{s_z}{s_x} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получены матрицы линейных преобразований, осуществляющих соответственно фронтальное, горизонтальное и профильное косоугольное проектирование:

$$\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z \\ 0 & 1 & -s_y/s_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -s_x/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_z/s_y & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -s_y/s_x & 1 & 0 \\ -s_z/s_x & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Масштабные коэффициенты осевых искажений (верхний индекс соответствует картинной плоскости, нижний – проецируемой оси) при таких преобразованиях равны

$$\begin{array}{lll}
m_x^f = 1, & m_y^f = 1, & m_z^f = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{|s_z|} = \operatorname{tg} \lambda_f, \\
m_x^h = 1, & m_y^h = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_z^2}}{|s_y|} = \operatorname{tg} \lambda_h, & m_z^h = 1, \\
m_x^p = \frac{\sqrt{s_y^2 + s_z^2}}{|s_x|} = \operatorname{tg} \lambda_p, & m_y^p = 1, & m_z^p = 1,
\end{array}$$

где  $\lambda_f$ ,  $\lambda_h$ ,  $\lambda_p$  – углы между вектором  $\vec{s}$  и соответственно фронтальной, горизонтальной и профильной плоскостью. Углы между проекциями осей вычисляются по тому же принципу, что и для аксонометрической проекции.

Оси МСК, не подверженные искажениям в результате косоугольного проектирования, обычно строятся так, как показано на рисунке 1.48а. Это соответствует случаям, когда наблюдение проводится спереди ( $s_z > 0$ ), сверху ( $s_y > 0$ ) и/или справа ( $s_x > 0$ ) соответственно от плоскостей  $f$ ,  $h$  и  $p$ . Если какая-то из координат вектора  $\vec{s}$  отрицательна, то это означает, что происходит наблюдение по другую сторону от соответственной проективной плоскости, и тогда при построении нужных проекций используются левые системы координат  $Ox'y'$ ,  $Oz'x'$  и/или  $Oy'z'$  (как, например, на рисунке 1.48б).

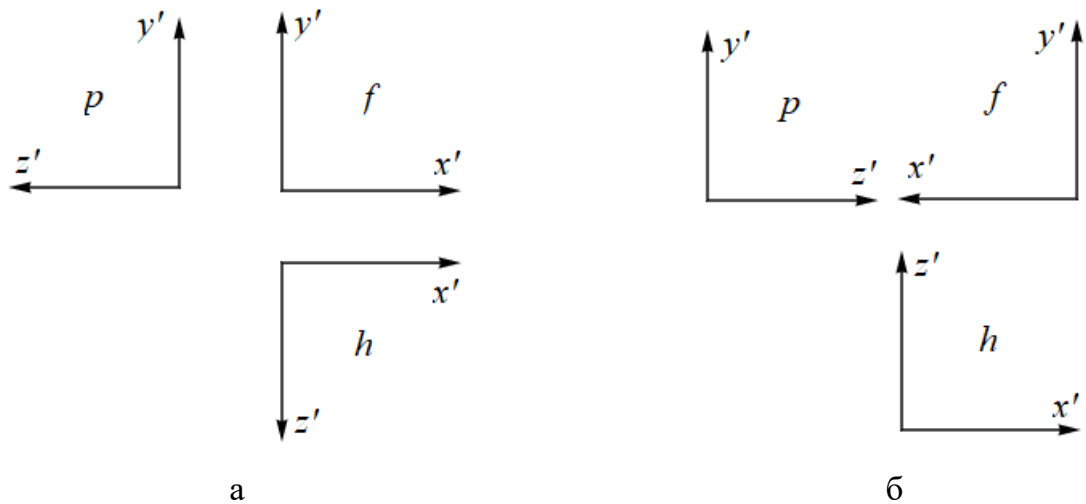


Рисунок 1.48 – Рисование проекций неискажённых осей в зависимости от положения наблюдения: а – спереди, сверху, справа от проективных плоскостей  $f$ ,  $h$  и  $p$  соответственно, б – сзади, снизу, слева от них

**Стандартные косоугольные проекции.** Наиболее часто встречаются следующие типы косоугольных проекций, которые задаются конкретными значениями вектора  $\vec{s}$  и выбором картинной плоскости:

- **Кабинетная проекция** (косоугольная фронтальная диметрия) получается при построении фронтальной проекции вдоль вектора  $\vec{s} = (1, 1, 2\sqrt{2})$  (Рисунок 1.49а). Такая проекция является естественной для визуального восприятия и простой для построения. Отношение масштабных коэффициентов осевых искажений у неё равно  $m_x : m_y : m_z = 2 : 2 : 1$ , угол поворота  $\delta_{yz} = 3\pi / 4$ .
- **Кавальерная, или военная проекция** (косоугольная фронтальная изометрия) образуется при выборе вектора  $\vec{s} = (1, 1, \sqrt{2})$  (Рисунок 1.49б). Для неё выполняются равенства  $m_x : m_y : m_z = 1 : 1 : 1$ ,  $\delta_{yz} = 3\pi / 4$ . В отличие от кабинетной проекции, на кавальерной проекции отрезки, расположенные вдоль оси аппликата, кажутся растянутыми и неестественными. Вместе с тем она удобна для измерения неискажённых длин по направлениям, параллельным координатным осям.
- **Зенитная проекция** (косоугольная горизонтальная изометрия) образуется при горизонтальном проектировании вдоль вектора  $\vec{s} = (1, \sqrt{2}, 1)$  (Рисунок 1.49в). Данная проекция представляет собой наклонный вид сверху наблюдаемого объекта. Её характеристики:  $m_x : m_y : m_z = 1 : 1 : 1$ , угол поворота от проекции  $Ox'$  оси абсцисс к проекции  $Oy'$  оси ординат равен  $\delta_{xy} = 3\pi / 4$ .
- **Зенитная диметрия** (Рисунок 1.49г) может задаваться в случае наблюдения с большой высоты. Для этого нужно определить отношение масштабных коэффициентов осевых искажений:  $m_x : m_y : m_z = 1 : k_y : 1$ , причём  $k_y \ll 1$  (на рисунке 1.49г  $k_y = 1/5$ ). Таким образом, отрезки равных длин, отложенные вдоль оси ординат, на зенитной диметрии изображены гораздо короче горизонтальных отрезков, что позволяет изобразить проекции объектов с высотой, намного превышающей их остальные габариты (например, небоскрёбы, горы).

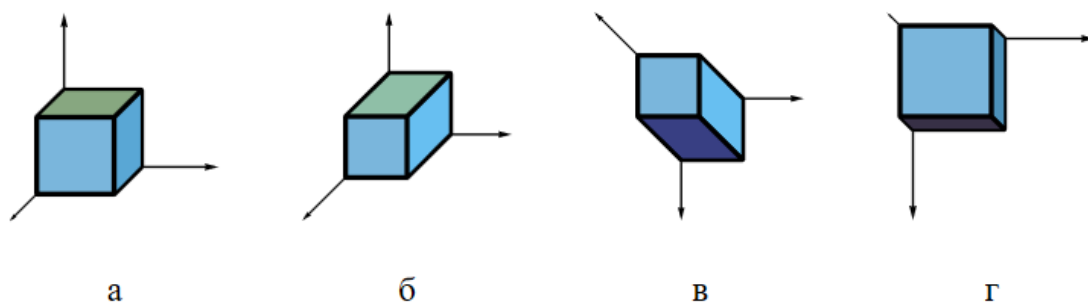


Рисунок 1.49 – Стандартные косоугольные проекции куба с противоположными вершинами в точках с координатами  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1)$

### 1.6.3. Центральные проекции

Построение **центральных проекций** используется в ситуациях, когда наблюдатель находится достаточно близко к сцене, и разные точки сцены или объекта наблюдаются в разных направлениях. Именно при центральных проективных преобразованиях получаются реалистичные, кажущиеся объёмными изображения.

Рассмотрим центральную проекцию на фронтальную плоскость МСК, задаваемую **проектором**, находящимся в точке  $s(s_x, s_y, s_z)$ . Проведём луч от этой точки к некоторой точке пространства  $p(x, y, z)$ . Он задаётся следующей системой:

$$\Delta_p : \begin{cases} x' = s_x + t(x - s_x), \\ y' = s_y + t(y - s_y), \\ z' = s_z + t(z - s_z), \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Центральной проекцией точки  $p$  является точка пересечения этого луча с фронтальной плоскостью, задаваемой уравнением  $z = 0$ . Отсюда имеем уравнение  $s_z + t'(z - s_z) = 0 \Rightarrow t' = \frac{s_z}{s_z - z}$ . Предположим, что проектор не лежит на проективной плоскости:  $s_z \neq 0$ . Тогда возможны следующие ситуации:

- $t' > 0 \Rightarrow$  луч  $\Delta_p$  пересекает плоскость  $f$  в точке  $p' \left( \frac{s_z x - s_x z}{s_z - z}, \frac{s_z y - s_y z}{s_z - z}, 0 \right)$  – точка  $p$  обладает **действительной проекцией**. Такая ситуация имеет место, когда точка  $p$  находится по ту же сторону, что и плоскость  $f$ , относительно плоскости  $f'$  такой, что  $s \in f' \wedge f \parallel f'$  (на рисунке 1.50 этот случай имеет место для синей точки).
- $t' < 0 \Rightarrow$  луч  $\Delta_p$  плоскость  $f$  не пересекает, но есть пересечение продолжения этого луча с фронтальной плоскостью в точке  $p' \left( \frac{s_z x - s_x z}{s_z - z}, \frac{s_z y - s_y z}{s_z - z}, 0 \right)$ , которая является **мнимой проекцией** точки  $p$ . Это возможно тогда и только тогда, когда точка  $p$  лежит от плоскости  $f'$  по другую сторону, нежели плоскость  $f$  (красная точка на рисунке 1.50).

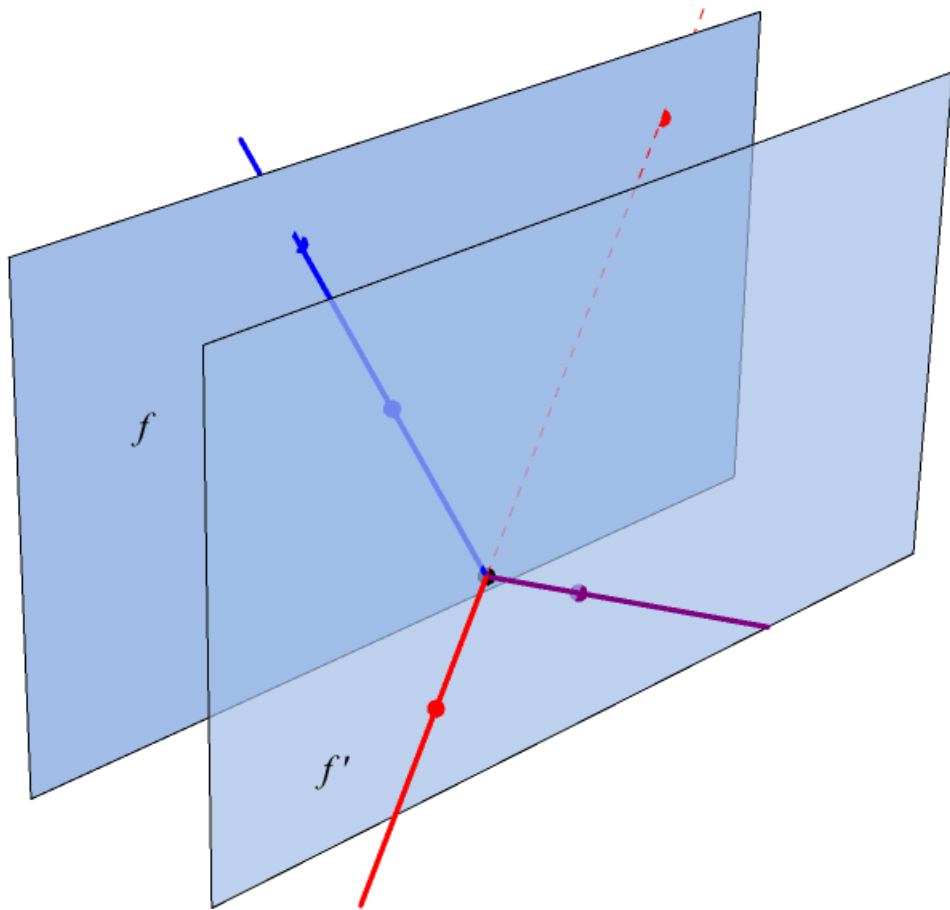


Рисунок 1.50 – Действительные, мнимые и вырожденные проекции при центральном проектировании (чёрной точкой изображён проектор)

- Если ни сам луч, ни его продолжение не пересекают точки  $f$ , то не существует и самой проекции. Это возможно тогда и только тогда, когда  $z = s_z$ , что равносильно тому, что  $p \in f'$  (фиолетовая точка на рисунке 1.50). Иногда говорят, что имеет место **вырожденная проекция** точки  $p$ .

Центральное проектирование можно задать в матричном виде, используя **однородные координаты** точек пространства: всякой точке  $p(x, y, z)$  можно поставить в соответствие координатный столбец  $(x, y, z, 1)^T$ . Домножение этого столбца на любой ненулевой множитель  $\omega$  даст столбец  $(\omega x, \omega y, \omega z, \omega)^T$ , который также является координатным столбцом той же точки  $p$  в однородных координатах. Выведем формулу для получения точки  $p' \left( \frac{s_z x - s_x z}{s_z - z}, \frac{s_z y - s_y z}{s_z - z}, 0 \right)$ :

$$\tilde{P}' = \begin{pmatrix} \frac{s_z x - s_x z}{s_z - z} \\ s_z - z \\ \frac{s_z y - s_y z}{s_z - z} \\ s_z - z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\sim} \begin{pmatrix} x - \frac{s_x}{s_z} z \\ s_z \\ y - \frac{s_y}{s_z} z \\ s_z \\ 0 \\ \frac{s_z - z}{s_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/s_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = F_{\text{цф}} \tilde{P}.$$

Заметим, что последний элемент столбца  $F_{\text{цф}} \tilde{P}$  оказался равным  $t'^{-1}$ . Значит, по нему можно судить о типе проекции для точки  $p$ : она имеет действительную проекцию, если  $\omega = \frac{s_z - z}{s_z} > 0$ ; мнимую проекцию, если  $\omega < 0$ ; вырожденную проекцию, если  $\omega = 0$ . Иногда число  $\omega$  называют **индикатором центрального проектирования**.

Аналогичным образом определяются матрицы горизонтального и профильного проектирования:

$$F_{\text{wh}} = \begin{pmatrix} 1 & -s_x/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_z/s_y & 1 & 0 \\ 0 & -1/s_y & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_{\text{цп}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_y/s_x & 1 & 0 & 0 \\ -s_z/s_x & 0 & 1 & 0 \\ -1/s_x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Матрица центрального проектирования задаётся с точностью до ненулевого множителя:  $(\alpha F_{\text{цф}}) \tilde{P} = \alpha (F_{\text{цф}} \tilde{P}) \sim F_{\text{цф}} \tilde{P}$ . Домножение матрицы центрального проектирования может позволить избежать операций деления, что особенно актуально в случае очень близкого расположения проектора к проективной плоскости. Рекомендуется использовать положительный множитель для того, чтобы не менялся знак индикатора  $\omega$ .

Замечание 2. Центральное проектирование точек пространства не является аффинным преобразованием пространства. ♦ Во-первых, это следует из того, что существуют точки, для которых вообще не существует центральной проекции на заданную плоскость. Во-вторых, если всё же предположить, что отображение  $f: S \rightarrow S$ , осуществляющее центральное проектирование, является аффинным, то для всяких трёх точек  $p_1, p_2$  и  $p_3$ , имеющих действительные проекции и не лежащих на одной плоскости с проектором  $s$ , а также для точек  $q_i, i = \overline{1,3}$ , лежащих на лучах  $sp_i$ , должны выполняться следующие равенства:



$$f(q_i) = f(p_i) \text{ (по определению центрального проектирования),}$$

$$f(q_i) = f(p_i) + df(\overrightarrow{p_i q_i}) \text{ (так как } f \text{ – это аффинное преобразование),}$$

откуда  $df(\overrightarrow{p_i q_i}) = \vec{0}$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Значит, так как по построению точек  $p_i$  векторы  $\overrightarrow{p_i q_i}$  образуют базис векторного пространства  $V$ , с которым ассоциируется аффинное пространство  $S$ , то получим  $\forall \vec{v} \in V : df(\vec{v}) = \vec{0}$  – нулевое векторное преобразование, а  $\forall p \in S : f(p) = f(p_i) + df(\overrightarrow{p_i p}) = f(p_i)$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Но этого быть не может, так как точки  $p_i$ , не лежащие с точкой  $s$  на одной плоскости, очевидно, имеют различные проекции. ■

**Центральная проекция прямой.** Рассмотрим некоторую прямую  $\Delta: p = p_0 + t\vec{a}$ , определяемую точкой  $p_0(x_0, y_0, z_0)$  и направляющим вектором  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ . Произвольная точка  $p \in \Delta$  имеет координаты  $(x_0 + a_x t, y_0 + a_y t, z_0 + a_z t)$ , а под воздействием фронтального центрального проектирования она преобразуется в точку  $p_{\text{пр}} \left( s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - (z_0 + a_z t)}, s_y + \frac{s_z(y_0 - s_y + a_y t)}{s_z - (z_0 + a_z t)}, 0 \right)$ . Таким образом, для всех  $t \in \mathbb{R}$  получим образ всей прямой, описываемый следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_{\text{пр}} = s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - (z_0 + a_z t)}, \\ y_{\text{пр}} = s_y + \frac{s_z(y_0 - s_y + a_y t)}{s_z - (z_0 + a_z t)}, \\ z_{\text{пр}} = 0. \end{cases} \quad (1.88)$$

◆ Докажем, что уравнения (1.88) определяют некоторую прямую на плоскости  $f$ . В случае  $a_z = 0$ , т.е. когда  $\Delta \parallel f$ , получается, что  $x_{\text{пр}} = s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - z_0} = s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x)}{s_z - z_0} + \frac{s_z a_x}{s_z - z_0} t$ ,  $y_{\text{пр}} = s_y + \frac{s_z(y_0 - s_y + a_y t)}{s_z - z_0} = s_y + \frac{s_z(y_0 - s_y)}{s_z - z_0} + \frac{s_z a_y}{s_z - z_0} t$ , т.е. координаты точки проекции задаются параметрическими уравнениями некоторой прямой, причём направляющий вектор этой прямой  $\vec{a}_{\text{пр}} \left( \frac{s_z a_x}{s_z - z_0}, \frac{s_z a_y}{s_z - z_0}, 0 \right)$ , как несложно видеть, коллинеарен  $\vec{a}$ , а следовательно, проекция параллельна исходной прямой.

Рассмотрим случай  $a_z \neq 0$ . Дадим параметру  $t$  некоторое приращение  $\Delta t$ . Оно породит приращения  $\Delta x_{\text{пр}}$  и  $\Delta y_{\text{пр}}$  абсциссы и ординаты проекции точки,

лежащей на прямой  $\Delta$  в окрестности исходной точки. При  $\Delta x_{\text{пр}} \neq 0$  угловой коэффициент прямой не должен зависеть от этих приращений:  $\frac{\Delta y_{\text{пр}}}{\Delta x_{\text{пр}}} = \text{const}$ . Если

же  $\Delta x_{\text{пр}} = 0$ , то при  $\Delta y_{\text{пр}} \neq 0$  можно аналогично рассматривать отношение  $\frac{\Delta x_{\text{пр}}}{\Delta y_{\text{пр}}}$ .

Равенство же нулю обоих приращений равносильно следующему<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{пр}} = 0 &\Leftrightarrow x_{\text{пр}} = \text{const} \Leftrightarrow \cancel{s_x} + \frac{\cancel{s_z}(x_0 - s_x + a_x(t + \Delta t))}{s_z - (z_0 + a_z(t + \Delta t))} = \cancel{s_x} + \frac{\cancel{s_z}(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - (z_0 + a_z t)}, \\ (s_z - z_0 - a_z t)(x_0 - s_x + a_x(t + \Delta t)) &= (s_z - z_0 - a_z(t + \Delta t))(x_0 - s_x + a_x t), \\ \cancel{(s_z - z_0)(x_0 - s_x)} + a_x(s_z - z_0)(t + \Delta t) - \cancel{a_z(x_0 - s_x)t} - \cancel{a_x a_z(t + \Delta t)t} &= \\ = \cancel{(s_z - z_0)(x_0 - s_x)} + \cancel{a_x(s_z - z_0)t} - a_z(x_0 - s_x)(t + \Delta t) - \cancel{a_x a_z(t + \Delta t)t}, & \\ a_x(s_z - z_0)\Delta t = -a_z(x_0 - s_x)\Delta t, & \\ a_x(s_z - z_0) = -a_z(x_0 - s_x), & \\ \Delta x_{\text{пр}} = 0 \Leftrightarrow x_{\text{пр}} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{s_x - x_0}{a_x} = \frac{s_z - z_0}{a_z}, & \\ \Delta y_{\text{пр}} = 0 \Leftrightarrow y_{\text{пр}} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{s_y - y_0}{a_y} = \frac{s_z - z_0}{a_z}, & \end{aligned}$$

т.е. имеет место каноническое уравнение прямой  $\frac{s_x - x_0}{a_x} = \frac{s_y - y_0}{a_y} = \frac{s_z - z_0}{a_z}$ , ука-

зывающее на то, что проектор лежит на прямой  $\Delta$ . Несложно видеть, что в такой ситуации проекция прямой действительно вырождается в точку.

Пусть теперь  $\Delta x_{\text{пр}} \neq 0$ . На промежутках  $t \in \left(-\infty, \frac{s_z - z_0}{a_z}\right)$  и  $t \in \left(\frac{s_z - z_0}{a_z}, +\infty\right)$

функции (1.88) являются непрерывными и дифференцируемыми. Значит, согласно определению производной и дифференциала на каждом из указанных промежутков имеют место равенства

$$\Delta x_{\text{пр}} = x'_{\text{пр}} \Delta t + \alpha_1(\Delta t) \Delta t, \quad (1.89)$$

---

<sup>1</sup> Нужно обратить внимание на то, что в конце получаются формулы, которые выполняются, строго говоря, для  $a_x \neq 0$  и  $a_y \neq 0$ , однако аналогично каноническому уравнению прямой (1.16) в них допускается равенство знаменателя любой дроби нулю. При этом следует полагать числитель такой дроби также равным нулю.

$$\Delta y_{\text{пр}} = y'_{\text{пр}} \Delta t + \alpha_2(\Delta t) \Delta t, \quad (1.89)$$

где  $x'_{\text{пр}} = x'_{\text{пр}}(t)$ ,  $y'_{\text{пр}} = y'_{\text{пр}}(t)$  – производные проекций  $x_{\text{пр}}$  и  $y_{\text{пр}}$  как функций от параметра  $t$ ,  $\alpha_1(\Delta t)$  и  $\alpha_2(\Delta t)$  – некоторые бесконечно малые функции. Строго говоря, приращения  $\Delta x_{\text{пр}}$  и  $\Delta y_{\text{пр}}$  зависят как от самого параметра  $t$ , так и от приращения  $\Delta t$ . Вычислим требуемое отношение исходя из формул (1.89):

$$\frac{\Delta y_{\text{пр}}}{\Delta x_{\text{пр}}} = \frac{y'_{\text{пр}} \Delta t + \alpha_2(\Delta t) \Delta t}{x'_{\text{пр}} \Delta t + \alpha_1(\Delta t) \Delta t} = \frac{y'_{\text{пр}} + \alpha_2(\Delta t)}{x'_{\text{пр}} + \alpha_1(\Delta t)}.$$

В этом равенстве перейдём к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и докажем  $\frac{\Delta y_{\text{пр}}}{\Delta x_{\text{пр}}} = \text{const}$

при произвольном  $t$ . Тем самым будет показано, что для любого значения параметра  $t = t_0$  найдётся участок линии (1.88), соответствующий значениям параметра  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , который является прямой, а все такие участки в совокупности дадут два участка некоторых двух прямых, соответствующих промежуткам  $t \in \left(-\infty, \frac{s_z - z_0}{a_z}\right)$  и  $t \in \left(\frac{s_z - z_0}{a_z}, +\infty\right)$ .

$$\frac{\Delta y_{\text{пр}}}{\Delta x_{\text{пр}}} = \frac{y'_{\text{пр}} + \alpha_2(\Delta t)}{x'_{\text{пр}} + \alpha_1(\Delta t)} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y'_{\text{пр}}}{x'_{\text{пр}}} = *$$

$$\begin{aligned} x'_{\text{пр}}(t) &= \left( s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - (z_0 + a_z t)} \right)' = s_z \frac{a_x(s_z - (z_0 + a_z t)) - (-a_z)(x_0 - s_x + a_x t)}{(s_z - (z_0 + a_z t))^2} = \\ &= s_z \frac{a_x s_z - a_x z_0 - a_x a_z t + a_z x_0 - a_z s_x + a_x a_z t}{(s_z - (z_0 + a_z t))^2} = \frac{s_z(a_x s_z - a_x z_0 + a_z x_0 - a_z s_x)}{(s_z - (z_0 + a_z t))^2}, \end{aligned}$$

$$y'_{\text{пр}}(t) = \frac{s_z(a_y s_z - a_y z_0 + a_z y_0 - a_z s_y)}{(s_z - (z_0 + a_z t))^2},$$

$$* = \frac{a_y s_z - a_y z_0 + a_z y_0 - a_z s_y}{a_x s_z - a_x z_0 + a_z x_0 - a_z s_x} = \text{const.}$$

Значит, при  $t \in \left(-\infty, \frac{s_z - z_0}{a_z}\right)$  и  $t \in \left(\frac{s_z - z_0}{a_z}, +\infty\right)$  получим, вообще говоря,

два участка некоторых прямых. Показать, что эти два участка принадлежат од-

ной прямой, можно, рассмотрев пределы координат  $x_{\text{np}}$  и  $y_{\text{np}}$  на концах этих промежутков. Вычислим пределы  $\lim_{t \rightarrow t_{\text{lim}}} x_{\text{np}}$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_{\text{lim}}} y_{\text{np}}$  при  $t_{\text{lim}} \in \left\{ -\infty, \frac{s_z - z_0}{a_z}, +\infty \right\}$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{np}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - (z_0 + a_z t)} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( s_x + \frac{s_z \left( \frac{x_0 - s_x}{t} + a_x \right)}{\frac{s_z - z_0}{t} - a_z} \right) = s_x - \frac{s_z}{a_z} a_x,$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{s_z - z_0}{a_z} \pm 0} x_{\text{np}} = \lim_{t \rightarrow \frac{s_z - z_0}{a_z} \pm 0} \left( s_x + \frac{s_z(x_0 - s_x + a_x t)}{s_z - (z_0 + a_z t)} \right) = \mp \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{np}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( s_y + \frac{s_z(y_0 - s_y + a_y t)}{s_z - (z_0 + a_z t)} \right) = s_y - \frac{s_z}{a_z} a_y,$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{s_z - z_0}{a_z} \pm 0} y_{\text{np}} = \lim_{t \rightarrow \frac{s_z - z_0}{a_z} \pm 0} \left( s_y + \frac{s_z(y_0 - s_y + a_y t)}{s_z - (z_0 + a_z t)} \right) = \begin{cases} s_y - \frac{s_z}{a_z} a_y, & \frac{s_y - y_0}{a_y} = \frac{s_z - z_0}{a_z}, \\ \mp \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как видно, при  $t \rightarrow \infty$  способ вычисления этих пределов не зависит от знака параметра  $t$ , значит, всякая сколь угодно малая окрестность точки с координатами  $\left( s_x - \frac{s_z}{a_z} a_x, s_y - \frac{s_z}{a_z} a_y, 0 \right)$  содержит два участка двух прямых с одина-

ковыми угловыми коэффициентами  $\frac{\Delta y_{\text{np}}}{\Delta x_{\text{np}}} = \frac{a_y s_z - a_y z_0 + a_z y_0 - a_z s_y}{a_x s_z - a_x z_0 + a_z x_0 - a_z s_x}$ , откуда сле-

дует, что два участка сливаются в один. При  $t \rightarrow \frac{s_z - z_0}{a_z}$  имеет место стремле-

ние этого участка в бесконечность (по одной либо по обеим координатам), таким образом, он представляет собой целую прямую. ■

Итак, точки, координаты которых задаются уравнениями (1.88), лежат на одной прямой (рисунки 1.51, а-б, чёрные пунктирные линии). При этом если  $a_z \neq 0$ , то множеством значений функций (1.88) является вся прямая, кроме одной точки. Эта точка называется **точкой схода** прямой  $\Delta$  и равна, как уже было вычислено,  $s_{\text{cx}} \left( s_x - \frac{s_z}{a_z} a_x, s_y - \frac{s_z}{a_z} a_y, 0 \right)$  (на рисунке 1.51а отмечена красным цветом). Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$s_{\text{cx}} = s - \frac{s_z}{a_z} \vec{a},$$

которое указывает на геометрический смысл точки схода: точка схода есть точка пересечения прямой, проведённой через проектор параллельно заданной прямой, и проективной плоскости (красная пунктирная прямая на рисунке 1.51). Также отметим, что точка схода не зависит от выбора начальной точки на прямой  $\Delta$ , таким образом, является единой для всех параллельных прямых с направляющим вектором  $\vec{a}$  – проекции параллельных прямых сходятся в точке  $s_{cx}$ . Точка схода делит всю прямую (1.88) на луч действительных проекций и луч мнимых проекций. Если  $s \in \Delta$ , то проекция прямой вырождается именно в точку  $s_{cx}$ .

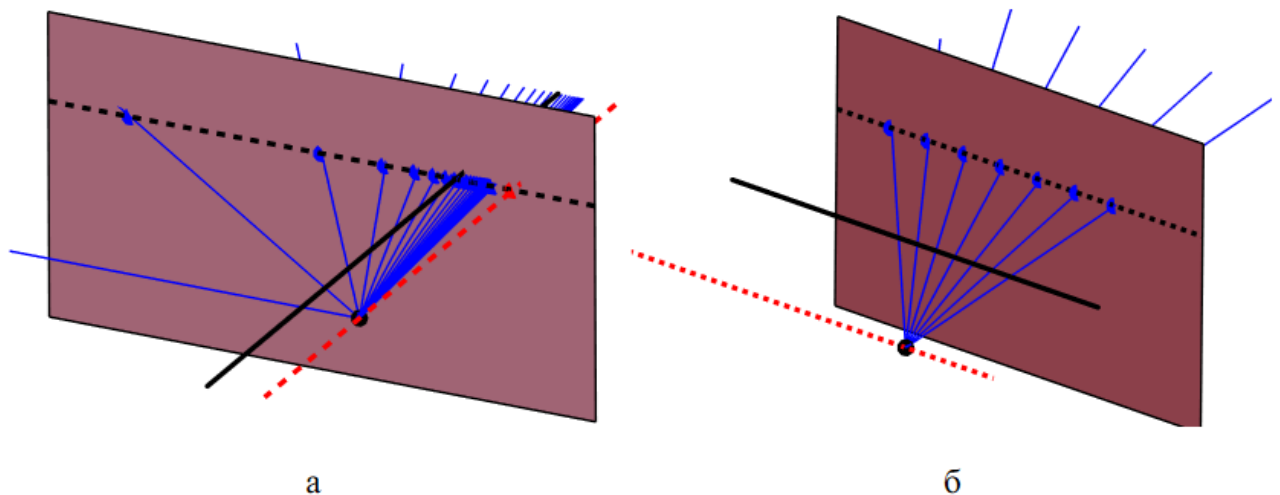


Рисунок 1.51 – Центральные проекции прямых: а – для прямой, не параллельной проективной плоскости, существует точка схода, делящая проекцию прямой на луч действительных проекций и луч мнимых проекций точек исходной прямой; б – для прямой, параллельной проективной плоскости, точки схода нет.

**Центральная проекция отрезка.** Отрезок, будучи частью некоторой прямой, при центральном проецировании перейдёт в некоторую часть центральной проекции этой прямой. Вид центральной проекции отрезка зависит от типа проекций концов этого отрезка:

- Если оба конца отрезка имеют действительные проекции, то проекцией отрезка является некоторый **отрезок** на проективной плоскости. Так, на рисунке 1.52 при центральном проектировании из точки  $S$  отрезок  $A_1B_1$  проектируется в отрезок  $A'_1B'_1$ .

- Если оба конца имеют мнимые и/или вырожденные проекции, то это означает, что весь отрезок лежит за пределами видимости проектора, соответственно, отрезок **не проецируется** на проективную плоскость (отрезок  $A_2B_2$  на рисунке 1.52).

- Если один конец отрезка имеет действительную проекцию, а другой – мнимую либо вырожденную, то первый конец отрезка находится перед проектором, второй – за ним, значит, найдётся точка отрезка с вырожденной проек-

цией. При стремлении вдоль отрезка от конца с действительной проекцией к этой точке проекция стремится в бесконечность, таким образом, получается луч с началом в действительной проекции одного из конца точек в направлении, противоположном точке схода для этого отрезка. На рисунке 1.52 для отрезка  $A_3B_3$  получилась проекция в виде луча с началом в точке  $A'_3$  – центральной проекции точки  $A_3$  – и направляющим лучом  $\overrightarrow{C'_3A'_3}$ , где  $C'_3$  – точка схода прямой  $A_3B_3$  при центральном проектировании из точки  $S$ .

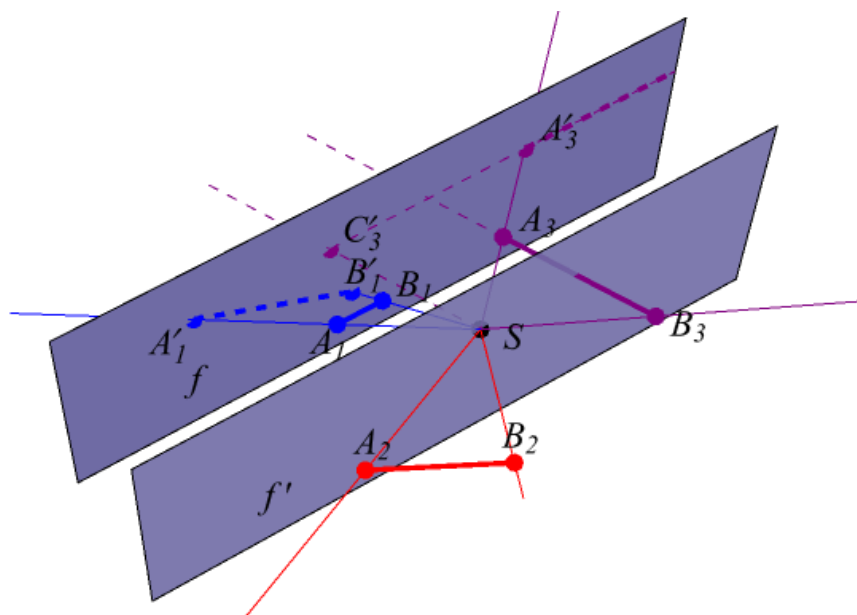


Рисунок 1.52 – Центральные проекции отрезков

## 2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

### 2.1. Модели прямой и плоскости

Данная тема представляет собой повторение материала, пройденного студентами ранее при изучении дисциплины «Аналитическая геометрия». Рекомендуется решение задач из сборников [2, гл. 3; 3, разд. II-3].

### 2.2. Определение свойств полигонов

#### 2.2.1. Определение выпуклости самонепересекающегося полигона

Рассмотрим плоский полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$ . Критерий выпуклости полигонов гласит, что полигон  $A_1A_2\dots A_nA_1$  является выпуклым тогда и только тогда, когда он является самонепересекающимся, а также выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) &= \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}) = \dots = \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}) = \\ &= \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{cases} +1 \text{ при левостороннем обходе,} \\ -1 \text{ при правостороннем обходе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вычисляется по следующей формуле:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, & \vec{a} \not\parallel \vec{b}, \\ 0, & \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, \\ \pi, & \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}. \end{cases} \quad (2.1)$$

На практике в задачах на определение свойств полигонов (как и многих других в компьютерной графике) точное значение угла вычислять нецелесообразно. Например, чтобы вычислить знак угла между двумя векторами, достаточно вычислить знак определителя из формулы (2.1).

**Пример 2.1.** Выяснить, является ли самонепересекающийся полигон  $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$  выпуклым, если известны координаты его вершин:  $A_1(1,2)$ ,  $A_2(3,3)$ ,  $A_3(5,1)$ ,  $A_4(3,-2)$ ,  $A_5(0,0)$ .

Так как уже известно, что полигон является самонепересекающимся, то достаточно вычислить знаки углов между векторами  $\overrightarrow{A_1A_2}(2,1)$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3}(2,-2)$ ,  $\overrightarrow{A_3A_4}(-2,-3)$ ,  $\overrightarrow{A_4A_5}(-3,2)$ ,  $\overrightarrow{A_5A_1}(1,2)$ :

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-4 - 2) = -1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-6 - 4) = -1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-4 - 9) = -1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-6 - 2) = -1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_5A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(1 - 4) = -1.$$

Все знаки совпали, значит, этот полигон выпуклый (Рисунок 2.1).

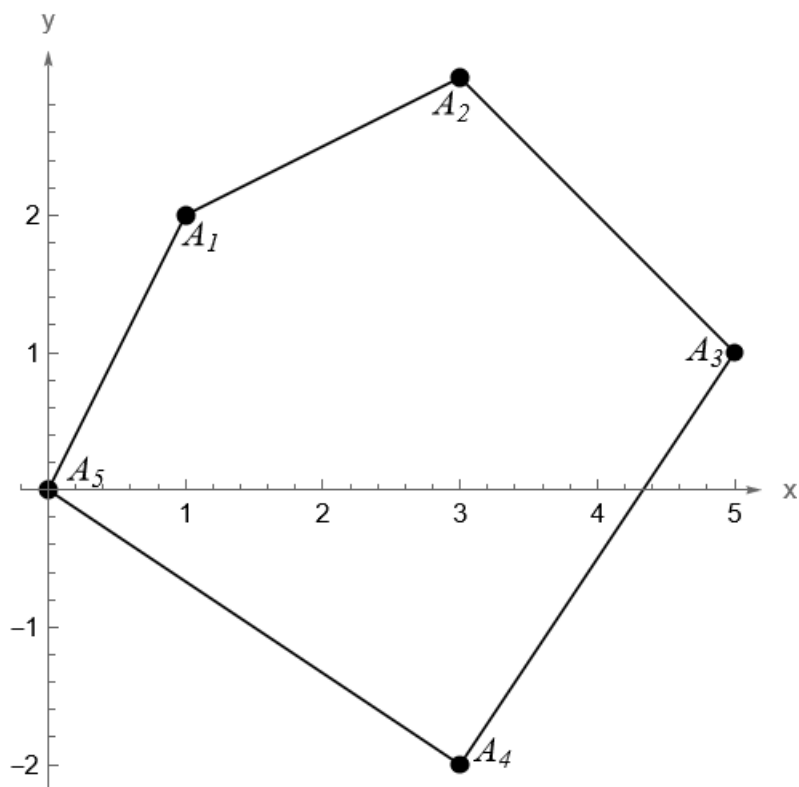


Рисунок 2.1 – Выпуклый полигон



**Пример 2.2.** Выяснить, является ли самонепересекающийся полигон  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$  выпуклым, если известны координаты его вершин:  $A_1(-1,1)$ ,  $A_2(-2,3)$ ,  $A_3(-3,1)$ ,  $A_4(-1,-1)$ ,  $A_5(1,-3)$ ,  $A_6(2,0)$ .

Снова вычисляем углы между направляющими векторами рёбер, равными в данном примере  $\overrightarrow{A_1A_2}(-1,2)$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3}(-1,-2)$ ,  $\overrightarrow{A_3A_4}(2,-2)$ ,  $\overrightarrow{A_4A_5}(2,-2)$ ,  $\overrightarrow{A_5A_6}(1,3)$ ,  $\overrightarrow{A_6A_1}(-3,1)$ :

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(2 + 2) = +1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(2 + 4) = +1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Получили, что два направляющих вектора смежных рёбер являются сонаправленными. Этот факт никак не влияет на выпуклость полигона, вычисляем дальше:

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_6}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(6 + 2) = +1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_5A_6}, \overrightarrow{A_6A_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(1 + 9) = +1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_6A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(-6 + 1) = -1.$$

Равенство знаков углов нарушено, таким образом, приходим к выводу о невыпуклости полигона (Рисунок 2.2). Отметим также, что в результате выполнения данного алгоритма обнаружено, что вершина  $A_4$  является фиктивной, т.к. смежные рёбра  $A_3A_4$  и  $A_4A_5$  лежат на одной прямой, таким образом, эту вершину можно исключить. Полигоны с такими фиктивными вершинами называются **неминимальными**, после исключения фиктивных вершин они становятся **минимальными**.

**Пример 2.3. Плоский полигон в трёхмерном пространстве.** На плоскости  $x + z = 0$  лежит самонепересекающийся полигон  $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$  с вершинами в точках с координатами  $A_1(0,3,0)$ ,  $A_2(1,2,-1)$ ,  $A_3(1,1,-1)$ ,  $A_4(2,2,-2)$  и  $A_5(1,3,-1)$ . Выяснить, является ли он выпуклым или нет.

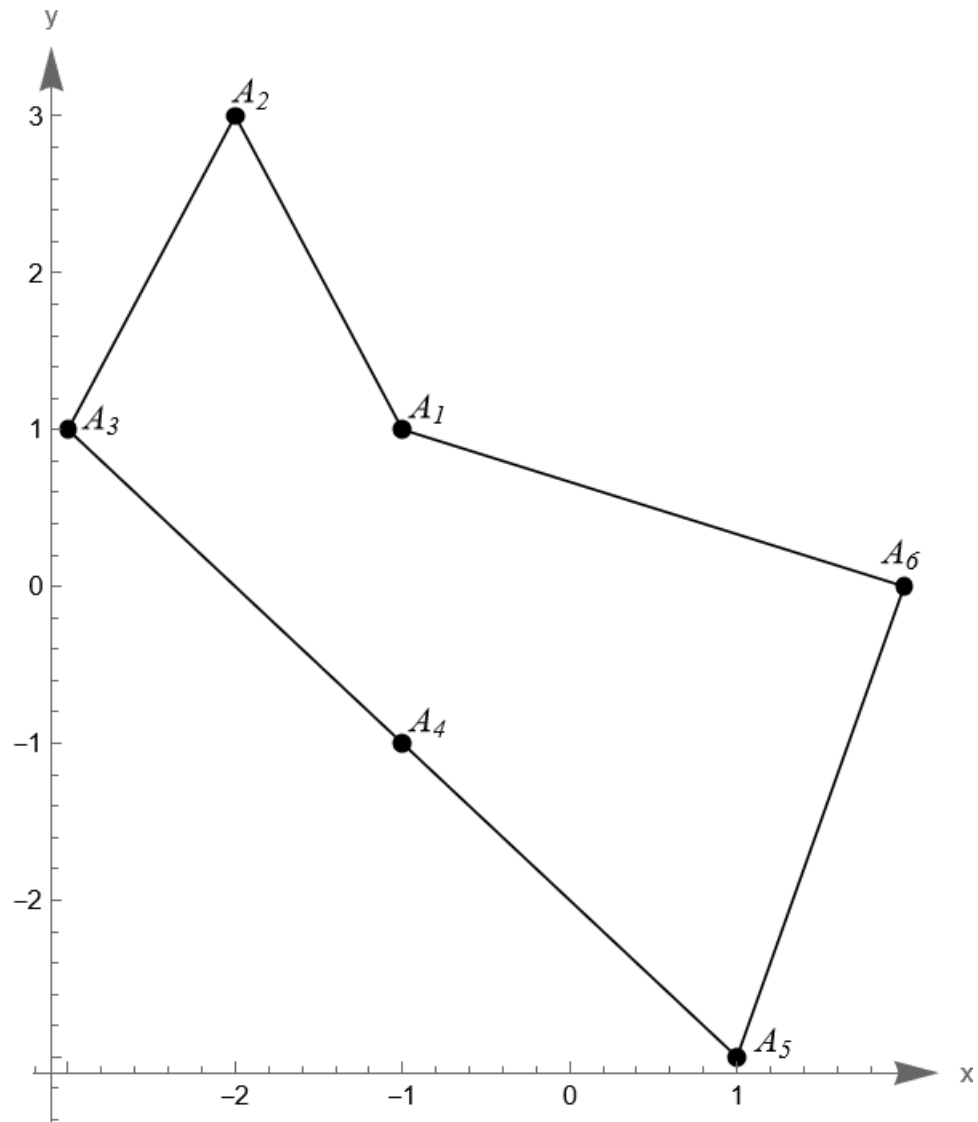


Рисунок 2.2 – Невыпуклый полигон с фиктивной вершиной

Для вычисления угла между двумя векторами в пространстве также можно использовать формулу (2.1). В этом случае согласно этой формуле получается, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является положительным (отрицательным), если они образуют правую (левую) тройку вместе с нормальным вектором плоскости с положительной аппликатой, или, что то же самое, если их векторное произведение имеет положительную аппликату (Рисунок 2.3а). На рисунке 2.3б угол между синим и красным вектором положителен, а на рисунке 2.3в угол между жёлтым и бирюзовым вектором является отрицательным.

Итак, вычисляем знаки углов между векторами  $\overrightarrow{A_1A_2}(1, -1, -1)$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3}(0, -1, 0)$ ,  $\overrightarrow{A_3A_4}(1, 1, -1)$ ,  $\overrightarrow{A_4A_5}(-1, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{A_5A_1}(-1, 0, 1)$ :

$$\text{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}) = \text{sgn} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

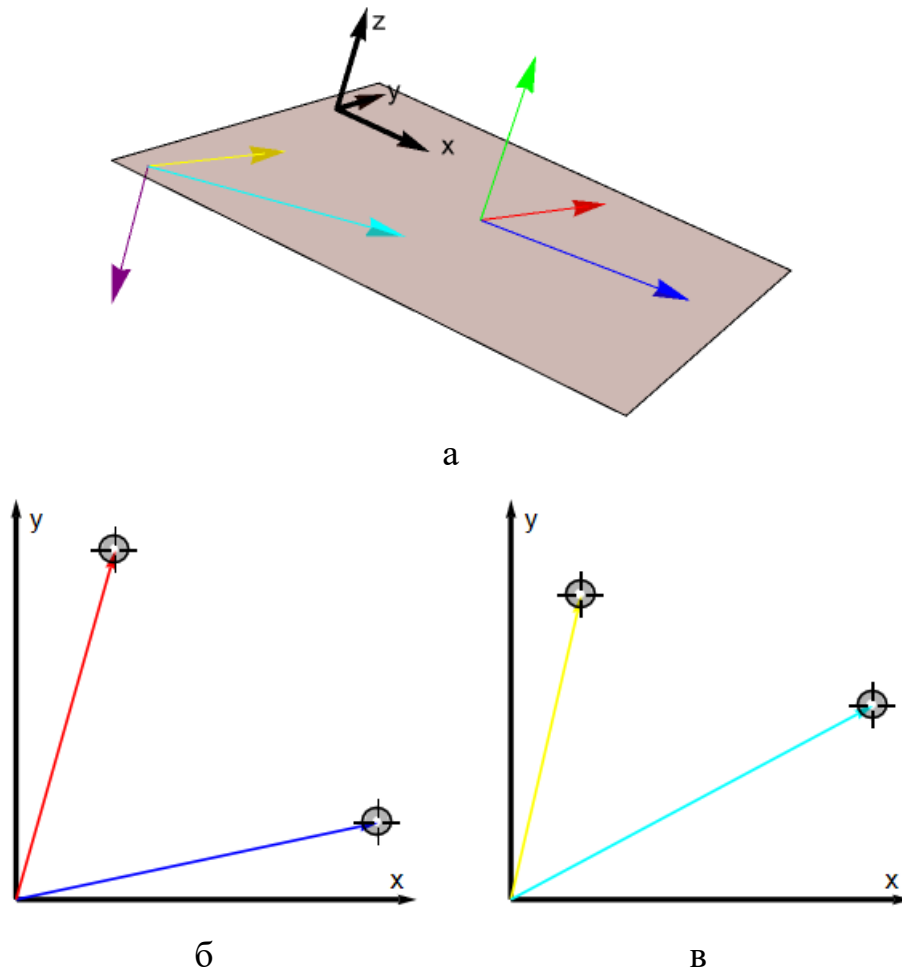


Рисунок 2.3 – Связь взаимного положения векторов и направления их векторных произведений

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_2 A_3}, \overrightarrow{A_3 A_4}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Равенство знаков нарушено, значит, имеем дело с невыпуклым полигоном (Рисунок 2.4).

Замечание 1. Строго говоря, на знак угла между векторами в трёхмерном пространстве влияет положение наблюдения. В этом примере полагается, что имеет место наблюдение, направление на которого может быть задано вектором  $\vec{k}(0,0,1)$ . Если это направление заменить на противоположное, что эквивалентно перемещению наблюдения в другую сторону от плоскости, тогда знаки между всеми векторами, проведёнными в этой плоскости, также меняются на противоположные.

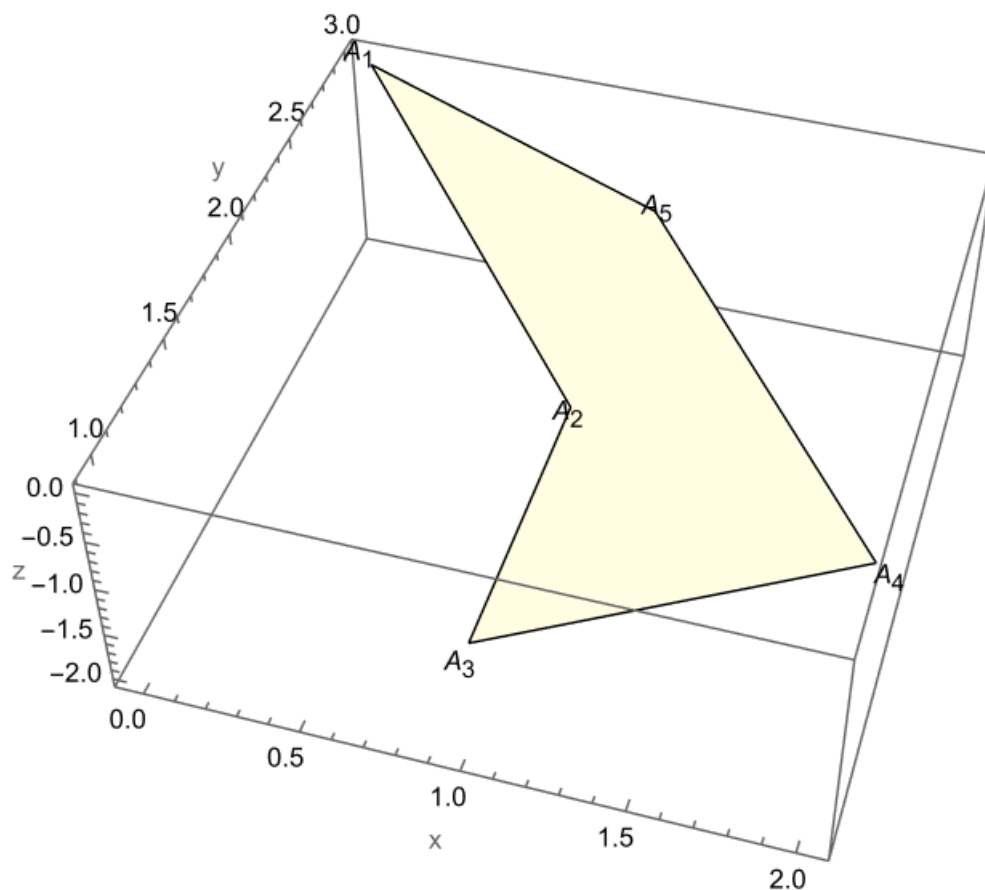


Рисунок 2.4 – Невыпуклый плоский полигон в трёхмерном пространстве

Замечание 2. В общем случае для вычисления знака угла между трёхмерными векторами  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$  и  $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$  при заданном направлении на наблюдателя  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$  можно воспользоваться следующей формулой:

$$\operatorname{sgn} \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \operatorname{sgn}((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{s}) = \operatorname{sgn}(\vec{a} \vec{b} \vec{s}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}.$$

### 2.2.2. Определение свойств произвольного полигона

В случае, когда дан произвольный полигон (самопересекающийся или самонепересекающийся), для выяснения его выпуклости нужно вначале определить, является ли он самонепересекающимся. Самопересекающимся полигон  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  является в том и только в том случае, если для некоторых несмежных рёбер  $A_i A_{i+1}$  и  $A_j A_{j+1}$ , которые лежат на прямых  $B_1 x + C_1 y + D_1 = 0$  и

$B_2x + C_2y + D_2 = 0$  соответственно, выполняются система следующих неравенств<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} (B_1x_j + C_1y_j + D_1)(B_1x_{j+1} + C_1y_{j+1} + D_1) \leq 0, \\ (B_2x_i + C_2y_i + D_2)(B_2x_{i+1} + C_2y_{i+1} + D_2) \leq 0, \end{cases}$$

где  $(x_k, y_k)$  – координаты точки  $A_k$ ,  $k \in \{i, i+1, j, j+1\}$ . Если для каких-то несмежных рёбер выполняется ровно одно из этих неравенств, то это означает, что исходный полигон является невыпуклым, так как есть ребро, по разные стороны от которого лежат точки этого же полигона.

Отметим, что общее уравнение прямой  $Ax + By + C = 0$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} B & -A \\ x & y \end{vmatrix} = -C. \quad (2.2)$$

Таким образом, если известен направляющий вектор прямой, равный  $\vec{a}(a_x, a_y) = \vec{a}(B, -A)$ , то для определения того, находятся ли две точки по одну либо разные стороны от неё, достаточно вначале вычислить число  $C$ , подставив в формулу (2.2) некоторую точку этой прямой, а затем вычислить определитель

$$f(\vec{a}, M) = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ M_x & M_y \end{vmatrix} \text{ для двух заданных точек и сравнить с } -C.$$

**Пример 2.4.** Выяснить, является ли полигон с вершинами в точках  $A_1(1,1)$ ,  $A_2(2,2)$ ,  $A_3(3,0)$ ,  $A_4(2,-2)$ ,  $A_5(0,-2)$ ,  $A_6(1,-1)$  сапонепересекающимся и выпуклым.

Вычислим направляющие векторы рёбер этого полигона:  $\overrightarrow{A_1A_2}(1,1)$ ,  $\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$ ,  $\overrightarrow{A_3A_4}(-1,-2)$ ,  $\overrightarrow{A_4A_5}(-2,0)$ ,  $\overrightarrow{A_5A_6}(1,1)$ ,  $\overrightarrow{A_6A_1}(0,2)$ . После этого для каждого ребра  $A_iA_{i+1}$  определяется положение остальных вершин относительно него следующим образом. Вначале вычисляется значение  $f(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, A_i) = f(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, A_{i+1})$ , равное для всех точек прямой, проходящей через ребро  $A_iA_{i+1}$ . Потом вычисляются значения  $f(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, A_j)$ ,  $j = i+2, i+3, \dots, n, 1, \dots, i-1$ . Для точек, находящихся по некоторую сторону от этой прямой, значение этой функции

---

<sup>1</sup> Строго говоря, случай, когда оба неравенства обращаются в равенство, нужно рассматривать отдельно: отрезки, лежащие на одной прямой, могут пересекаться, лежать один на другом, иметь общую вершину или же не иметь общих точек.

будет больше полученного числа, для точек по другую сторону от этой же прямой – меньше. Все данные будем оформлять в виде таблицы:

	$A_1(1,1)$	$A_2(2,2)$	$A_3(3,0)$	$A_4(2,-2)$	$A_5(0,-2)$	$A_6(1,-1)$
$\overrightarrow{A_1A_2}(1,1)$						
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$						
$\overrightarrow{A_3A_4}(-1,-2)$						
$\overrightarrow{A_4A_5}(-2,0)$						
$\overrightarrow{A_5A_6}(1,1)$						
$\overrightarrow{A_6A_1}(0,2)$						

Так, для первого ребра получаем следующую строку:

	$A_1(1,1)$	$A_2(2,2)$	$A_3(3,0)$	$A_4(2,-2)$	$A_5(0,-2)$	$A_6(1,-1)$
$\overrightarrow{A_1A_2}(1,1)$	0	0	-3	-4	-2	-2

Сравнивая все значения этой строки с числами  $f(\overrightarrow{A_1A_2}, A_1) = f(\overrightarrow{A_1A_2}, A_2) = 0$ , приходим к выводу, что все остальные вершины лежат по одну сторону от ребра  $A_1A_2$ , и определения самонепересекаемости и выпуклости полигона пока не нарушены.

Аналогично вычисляем значения  $f(\overrightarrow{A_2A_3}, A_i)$ , начиная с  $i = 2$ :

	$A_1(1,1)$	$A_2(2,2)$	$A_3(3,0)$	$A_4(2,-2)$	$A_5(0,-2)$	$A_6(1,-1)$
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$	3	6	6	2	-2	1

Все числа в этой строке получились меньше  $f(\overrightarrow{A_2A_3}, A_2) = f(\overrightarrow{A_2A_3}, A_3) = 6$ , то есть от ребра  $A_2A_3$  все остальные вершины лежат по одну сторону.

Результаты дальнейших вычислений выглядят следующим образом:

	$A_1(1,1)$	$A_2(2,2)$	$A_3(3,0)$	$A_4(2,-2)$	$A_5(0,-2)$	$A_6(1,-1)$
$\overrightarrow{A_3A_4}(-1,-2)$	1	2	6	6	2	3
$\overrightarrow{A_4A_5}(-2,0)$	-2	-4	0	4	4	2
$\overrightarrow{A_5A_6}(1,1)$	0	0	-3		-2	-2

Отсюда видно, что для ребра  $A_5A_6$  уже нарушено определение выпуклости, так как исходя из неравенства  $f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_3) < f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_5) < f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_2)$  полу-

чается, что концы ребра  $A_2A_3$  лежат от прямой  $A_5A_6$  по разные стороны. С другой стороны, для ребра  $A_2A_3$  уже вычислено, что все другие вершины лежат от него по одну сторону, в том числе и концы ребра  $A_5A_6$ . Значит, определение самонепересекаемости ещё не нарушено.

Дальнейшие вычисления:

	$A_1(1,1)$	$A_2(2,2)$	$A_3(3,0)$	$A_4(2,-2)$	$A_5(0,-2)$	$A_6(1,-1)$
$\overrightarrow{A_5A_6}(1,1)$	0	0	-3	-4	-2	-2
$\overrightarrow{A_6A_1}(0,2)$	-2	-4	-6	-4	0	-2

Вершины  $A_4$  и  $A_5$  лежат по разные стороны от прямой  $A_6A_1$ , но, с другой стороны, вершины  $A_6$  и  $A_1$ , согласно предыдущим вычислениям, лежат по одну сторону от прямой  $A_4A_5$ .

Итак, окончательно получили, что во время выполнения алгоритма нарушилось определение выпуклости, но не самонепересекаемости, откуда приходим к выводу, что наш полигон является самонепересекающимся и невыпуклым (Рисунок 2.5).

Замечание. Последнюю строку можно было не заполнять, так как если все рёбра, кроме  $A_6A_1$ , не пересекаются ни с каким несмежным с ним, то и ребро  $A_6A_1$  не пересечётся ни с  $A_2A_3$ , ни с  $A_3A_4$ , ни с  $A_4A_5$ .

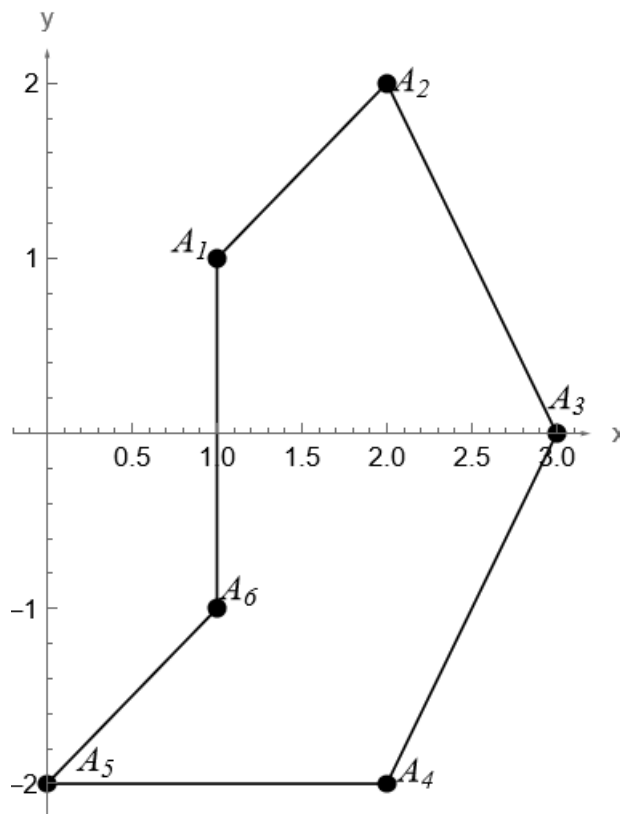


Рисунок 2.5 – Самонепересекающийся невыпуклый полигон

**Пример 2.5.** Выяснить, является ли самонепересекающимся и выпуклым полигон с вершинами в точках  $A_1(0,1)$ ,  $A_2(2,1)$ ,  $A_3(3,-1)$ ,  $A_4(6,-2)$ ,  $A_5(8,0)$ ,  $A_6(7,3)$ ,  $A_7(-1,2)$ ,  $A_8(1,4)$ .

Составляем таблицу:

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$								
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$								
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$								
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$								
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$								

И вычисляем:

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$		
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$								
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$								
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$								
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$								

По данным в таблице выше уже видно, что полигон не является выпуклым, так как вершины  $A_5$  и  $A_6$  лежат по разные стороны от ребра  $A_1A_2$ . Другими словами, имеет место пересечение прямой  $A_1A_2$  и отрезка  $A_5A_6$ . Выяснить, пересекаются ли два отрезка  $A_1A_2$  и  $A_5A_6$  (что будет означать самопересекаемость исходного полигона), можно, вычислив соответствующие значения в строке  $\overrightarrow{A_5A_6}$ :



	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$		
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$								
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$			$-24$	$-24$		
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$								
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$								

Получили  $f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_1) > f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_5)$ ,  $f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_2) > f(\overrightarrow{A_5A_6}, A_5)$ , значит, рёбра не пересекаются, и определение самонепересекаемости полигона ещё пока не нарушено. Вычисляем дальше:

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$		5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$			$-24$	$-24$		
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$								
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$								

Получили, что точки  $A_6$  и  $A_7$  лежат по разные стороны от прямой  $A_2A_3$ . Продолжаем вычисления в строке  $\overrightarrow{A_6A_7}$ :

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$

$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$		5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$			$-24$	$-24$		
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$		$-6 >$ $> -17$	$11 >$ $> -17$			$-17$	$-17$	
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$								

Снова определение самонепересекаемости не нарушено. Дальнейшие вычисления:

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$	$1 < 5$	5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	$6 > 5$
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$			$-24$	$-24$		
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$		$-6 >$ $> -17$	$11 >$ $> -17$			$-17$	$-17$	
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$								

Проверка пересекаемости рёбер  $A_2A_3$  и  $A_8A_1$ :

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$	$1 < 5$	5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	$6 > 5$
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$								
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$								

$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$			$-24$	$-24$		
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$		$-6 >$ $> -17$	$11 >$ $> -17$			$-17$	$-17$	
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$								
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$	$-1$	$5 > -1$	$10 >$ $> -1$					$-1$

И эти рёбра не пересекаются.

Теперь, когда первые две строки полностью заполнены, ясно, что рёбра  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  не пересекаются ни с каким из несмежных рёбер. Отсюда следует, что значения в столбце  $A_2$  можно не вычислять, так как в любом случае будет получаться, что для очередного ребра и одного из рёбер  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  определение самонепересекаемости не будет нарушаться, и к тому же ранее было нарушено определение выпуклости, т.е. эти вычисления ни на что не повлияют:

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$	$1 < 5$	5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	$6 > 5$
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$		x						
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$		x						
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$			$-24$	$-24$		
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$		$-6 >$ $> -17$	$11 >$ $> -17$			$-17$	$-17$	
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$		x						
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$	-1	$5 > -1$	$10 >$ $> -1$					-1

Дальнейшие вычисления (при этом после заполнения строки  $\overrightarrow{A_3A_4}$  можно не вычислять значения для столбца  $A_3$ , после заполнения строки  $\overrightarrow{A_4A_5}$  – для столбца  $A_4$  и т.д.):

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$

$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$	$1 < 5$	5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	$6 > 5$
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$	$3 > 0$	x	0	0	$8 > 0$	$16 > 0$	$5 > 0$	$13 > 0$
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$	$2 > 0$	x	x	-16	-16	$-8 >$ $> -16$	$6 >$ $> -16$	$6 >$ $> -16$
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$	x	x	-24	-24	$1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$	$-8 >$ $> -17$	$-6 >$ $> -17$	$11 >$ $> -17$	x	x	-17	-17	$-31 <$ $< -17$
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$		x	x	x	x			
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$	-1	$5 > -1$	$10 >$ $> -1$	x	x			-1

Проверяем, не пересекаются ли рёбра  $A_6A_7$  и  $A_8A_1$  :

	$A_1$ (0,1)	$A_2$ (2,1)	$A_3$ (3,-1)	$A_4$ (6,-2)	$A_5$ (8,0)	$A_6$ (7,3)	$A_7$ (-1,2)	$A_8$ (1,4)
$\overrightarrow{A_1A_2}(2,0)$	2	2	$-2 < 2$	$-4 < 2$	$0 < 2$	$6 > 2$	$4 > 2$	$8 > 2$
$\overrightarrow{A_2A_3}(1,-2)$	$1 < 5$	5	5	$10 > 5$	$16 > 5$	$17 > 5$	$0 < 5$	$6 > 5$
$\overrightarrow{A_3A_4}(3,-1)$	$3 > 0$	x	0	0	$8 > 0$	$16 > 0$	$5 > 0$	$13 > 0$
$\overrightarrow{A_4A_5}(2,2)$	$2 > 0$	x	x	-16	-16	$-8 >$ $> -16$	$6 >$ $> -16$	$6 >$ $> -16$
$\overrightarrow{A_5A_6}(-1,3)$	$-1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$	x	x	-24	-24	$1 >$ $> -24$	$-7 >$ $> -24$
$\overrightarrow{A_6A_7}(-8,-1)$	$-8 >$ $> -17$	$-6 >$ $> -17$	$11 >$ $> -17$	x	x	-17	-17	$-31 <$ $< -17$
$\overrightarrow{A_7A_8}(2,2)$		x	x	x	x			
$\overrightarrow{A_8A_1}(-1,-3)$	-1	$5 > -1$	$10 >$ $> -1$	x	x	$18 >$ $> -1$	$-5 <$ $< -1$	-1

Значения в выделенных ячейках указывают на то, что вершины  $A_8$  и  $A_1$  лежат по разные стороны от прямой  $A_6A_7$ , а  $A_6$  и  $A_7$  – по разные стороны от прямой  $A_8A_1$ , что и означает пересечение этих несмежных рёбер. Таким образом, окончательно имеем, что исходный полигон является самопересекающимся (Рисунок 2.6).

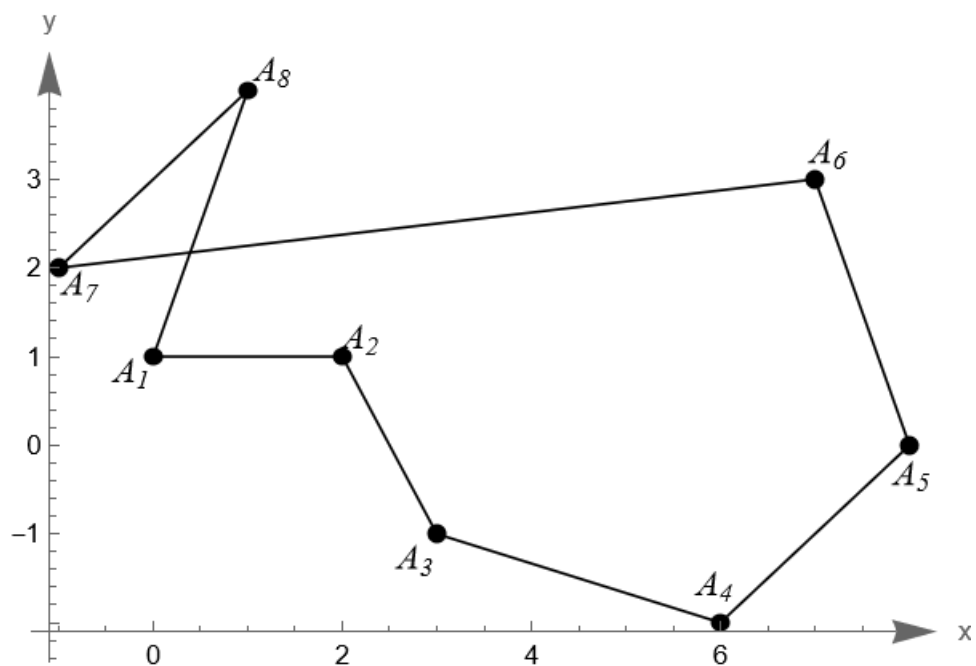


Рисунок 2.6 – Самопересекающийся полигон

### 2.2.3. Задачи

Определить свойства полигонов, заданных последовательностью своих вершин:

1.  $A_1(5, -5), A_2(2, 4), A_3(-1, 1), A_4(-2, 5), A_5(-4, -5)$ ,
2.  $A_1(2, 4), A_2(-5, -4), A_3(3, 1), A_4(4, 0), A_5(0, 4)$ ,
3.  $A_1(4, 5), A_2(-4, 7), A_3(-8, 5), A_4(-7, 2), A_5(-2, -5)$ ,
4.  $A_1(-3, -1), A_2(-5, 1), A_3(-3, 3), A_4(5, 1), A_5(1, 0)$ ,
5.  $A_1(-2, -4), A_2(5, 2), A_3(-5, 5), A_4(-1, -1), A_5(-3, -1)$ ,
6.  $A_1(3, -4), A_2(-1, -5), A_3(5, 3), A_4(1, -2), A_5(3, -1)$ ,
7.  $A_1(-4, -1), A_2(-3, -6), A_3(4, -5), A_4(1, 3), A_5(-3, -3)$ ,
8.  $A_1(3, 1), A_2(2, 0), A_3(-1, -2), A_4(0, 0), A_5(2, 5)$ ,
9.  $A_1(-2, -3), A_2(5, 0), A_3(-2, 3), A_4(2, 2), A_5(-4, -5)$ ,
10.  $A_1(-5, -4), A_2(3, 2), A_3(-2, 5), A_4(-2, -1), A_5(1, 4)$ .

## 2.3. Положение точки относительно полигона

### 2.3.1. Положение точек относительно треугольника

Рассмотрим некоторый треугольник, заданный своими вершинами  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , и некоторую точку  $M$ , находящуюся в одной с ними плоскости. На этой плоскости можно задать декартову систему координат с началом в точке  $A_1$  и базисом  $(\vec{a}, \vec{b})$ , где  $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$ . Найдём координаты точки  $M$  в этой декартовой системе координат:  $\overrightarrow{A_1M} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ . Не считая вырожденных случаев, возможны 5 вариантов расположения точки  $M$  относительно треугольника  $A_1A_2A_3$ , обозначенных на рисунке 2.7 цифрами 1-5.

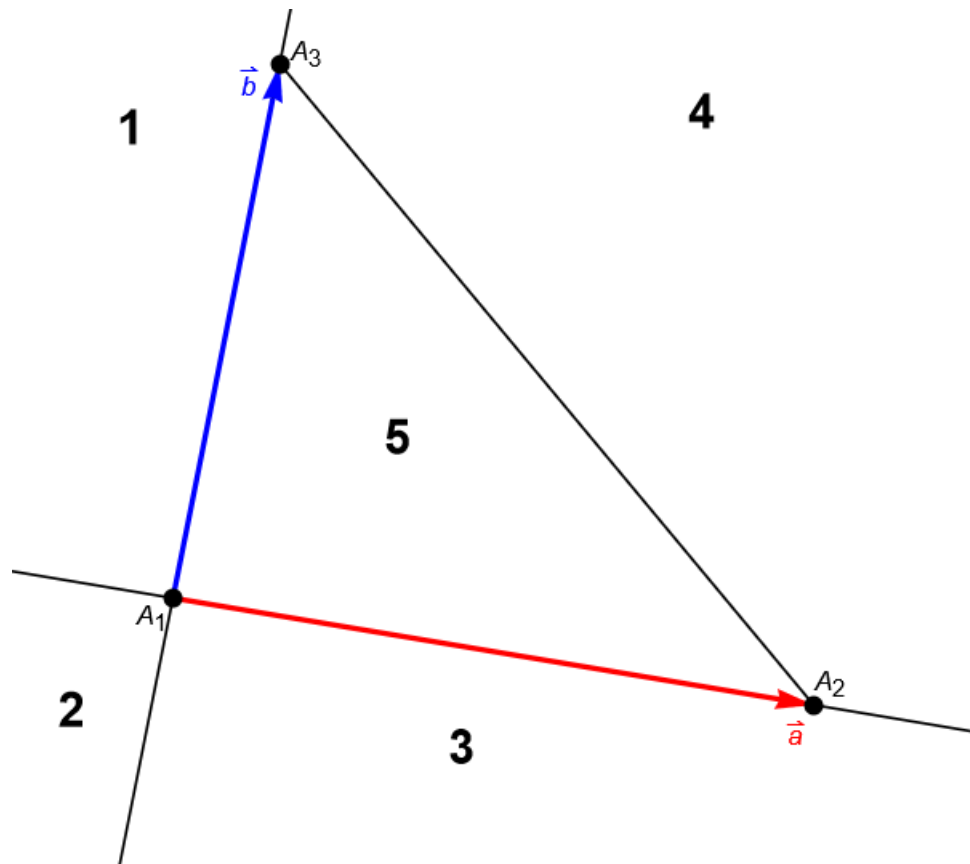


Рисунок 2.7 – Варианты расположения точки относительно треугольника

1. Всякая точка из области 1 имеет отрицательную абсциссу и положительную ординату.
2. Всякая точка из области 2 имеет обе отрицательные координаты.
3. Всякая точка из области 3 имеет положительную абсциссу и отрицательную ординату.

Таким образом, необходимым условием принадлежности точки  $M$  треугольнику  $A_1A_2A_3$  является положительность её координат в ДСК  $(A_1, (\vec{a}, \vec{b}))$ .

Однако оно не является достаточным, так как остаются ещё два случая (области **4** и **5**). Их различие заключается в расположении относительно прямой  $A_2A_3$ , которая задаётся уравнением  $\vec{r} = t\overrightarrow{A_1A_2} + (1-t)\overrightarrow{A_1A_3}$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки этой прямой, проведённый из вершины  $A_1$ . Легко видеть, что координаты всякой точки, лежащей на прямой  $A_2A_3$ , в ДСК  $(A_1, (\vec{a}, \vec{b}))$  в сумме дают единицу; у точек, находящихся по одну сторону от этой прямой (в т.ч. точки из области **4**), эта сумма превышает единицу; у точек по другую сторону от прямой  $A_2A_3$  (в т.ч. точки из области **5** – внутренней области треугольника  $A_1A_2A_3$ ) координаты в сумме дают число меньше 1.

Таким образом, получили **критерий принадлежности точки треугольнику**: точка  $M$  тогда и только тогда является **внутренней** для треугольника  $A_1A_2A_3$ , когда в разложении  $\overrightarrow{A_1M} = \alpha\overrightarrow{A_1A_2} + \beta\overrightarrow{A_1A_3}$  координаты  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют неравенствам  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$ . Если хотя бы одно из неравенств нарушается, то точка  $M$  является **внешней**. Если одно или два неравенства обратились в равенство, то точка  $M$  – **граничная**.

**Пример 3.1.** Выяснить принадлежность следующих точек  $M_i$ ,  $i = \overline{1,9}$ , треугольнику с вершинами в точках с координатами  $A_1(-2, -2)$ ,  $A_2(-6, 2)$ ,  $A_3(8, 0)$ :

$$M_1(4, -2), M_2(-2, 0), M_3(-4, -1), M_4(0, -1), M_5(-1, -4), \\ M_6(2, 3), M_7(1, 1), M_8(-7, 3), M_9(11, 0).$$

Для всех точек  $M_i$  находятся координаты в ДСК  $(A_1, (\vec{a}, \vec{b}))$ :

$$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}(-4, 4), \vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3}(10, 2), \\ \overrightarrow{A_1M_1}(6, 0), \overrightarrow{A_1M_2}(0, 2), \overrightarrow{A_1M_3}(-2, 1), \overrightarrow{A_1M_4}(2, 1), \overrightarrow{A_1M_5}(1, -2), \\ \overrightarrow{A_1M_6}(4, 5), \overrightarrow{A_1M_7}(3, 3), \overrightarrow{A_1M_8}(-5, 5), \overrightarrow{A_1M_9}(13, 2), \\ \overrightarrow{A_1M_i} = \alpha_i\vec{a} + \beta_i\vec{b} : \left( \begin{array}{cc|cccccccc} -4 & 10 & 6 & 0 & -2 & 2 & 1 & 4 & 3 & -5 & 13 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 5 & 3 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left( \begin{array}{cc|cccccccc} 0 & 12 & 6 & 2 & -1 & 3 & -1 & 9 & 6 & 0 & 15 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 5 & 3 & 5 & 2 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left( \begin{array}{cc|cccccccc} 0 & 12 & 6 & 2 & -1 & 3 & -1 & 9 & 6 & 0 & 15 \\ -24 & -12 & 0 & -12 & -6 & -6 & 12 & -30 & -18 & -30 & -12 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|cccccccccc} 0 & 12 & 6 & 2 & -1 & 3 & -1 & 9 & 6 & 0 & 15 \\ -24 & 0 & 6 & -10 & -7 & -3 & 11 & -21 & -12 & -30 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|cccccccccc} 1 & 0 & -1/4 & 5/12 & 7/24 & 1/8 & -11/24 & 7/8 & 1/2 & 6/5 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/6 & -1/12 & 1/4 & -1/12 & 3/4 & 1/2 & 0 & 5/4 \end{array} \right).$$

$\overrightarrow{A_1A_2}$     $\overrightarrow{A_1A_3}$     $\overrightarrow{A_1M_1}$     $\overrightarrow{A_1M_2}$     $\overrightarrow{A_1M_3}$     $\overrightarrow{A_1M_4}$     $\overrightarrow{A_1M_5}$     $\overrightarrow{A_1M_6}$     $\overrightarrow{A_1M_7}$     $\overrightarrow{A_1M_8}$     $\overrightarrow{A_1M_9}$

Таким образом, окончательно имеем, что точки  $M_1, M_3, M_5, M_9$  находятся снаружи треугольника в силу отрицательности хотя бы одной из своих координат  $\alpha_i$  или  $\beta_i$ , точки  $M_6$  и  $M_8$  – снаружи, так как сумма их координат превышает единицы, точки  $M_2$  и  $M_4$  – внутренние, а точка  $M_7$  лежит на середине стороны  $A_2A_3$ , т.к. получили координаты, сумма которых равна  $1/2 + 1/2 = 1$  (Рисунок 2.8).

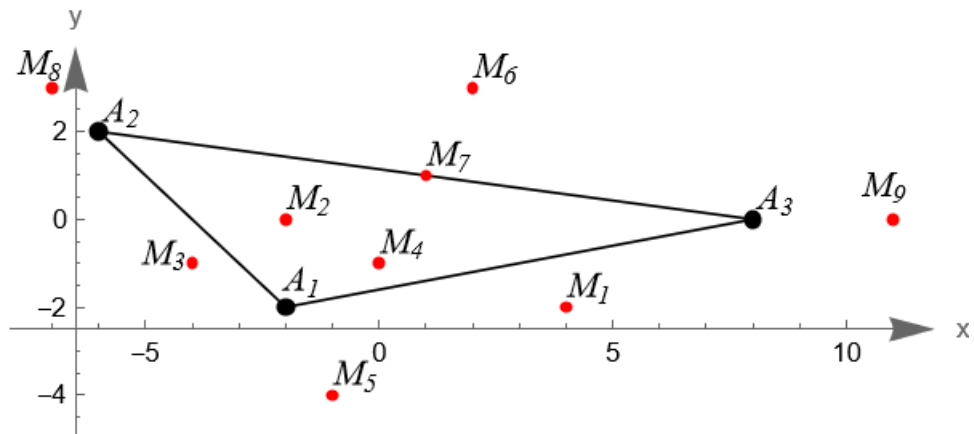


Рисунок 2.8 – Треугольник и точки

### 2.3.2. Положение точек относительно выпуклого многоугольника

Рассмотрим некоторый выпуклый полигон  $A_1A_2...A_nA_1$ . Для него имеет место следующее свойство: векторы  $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \dots, \overrightarrow{A_1A_n}$  поворачиваются друг к другу в одном и том же направлении: либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке. Таким образом, можно говорить об упорядоченности вершин выпуклого полигона (Рисунок 2.9).

Благодаря этому свойству возможно определить принадлежность некоторой точки  $M$  выпуклому полигону за время  $O(\log n)$ , где  $n$  – число вершин, при помощи **алгоритма дихотомии**, который заключается в следующем:



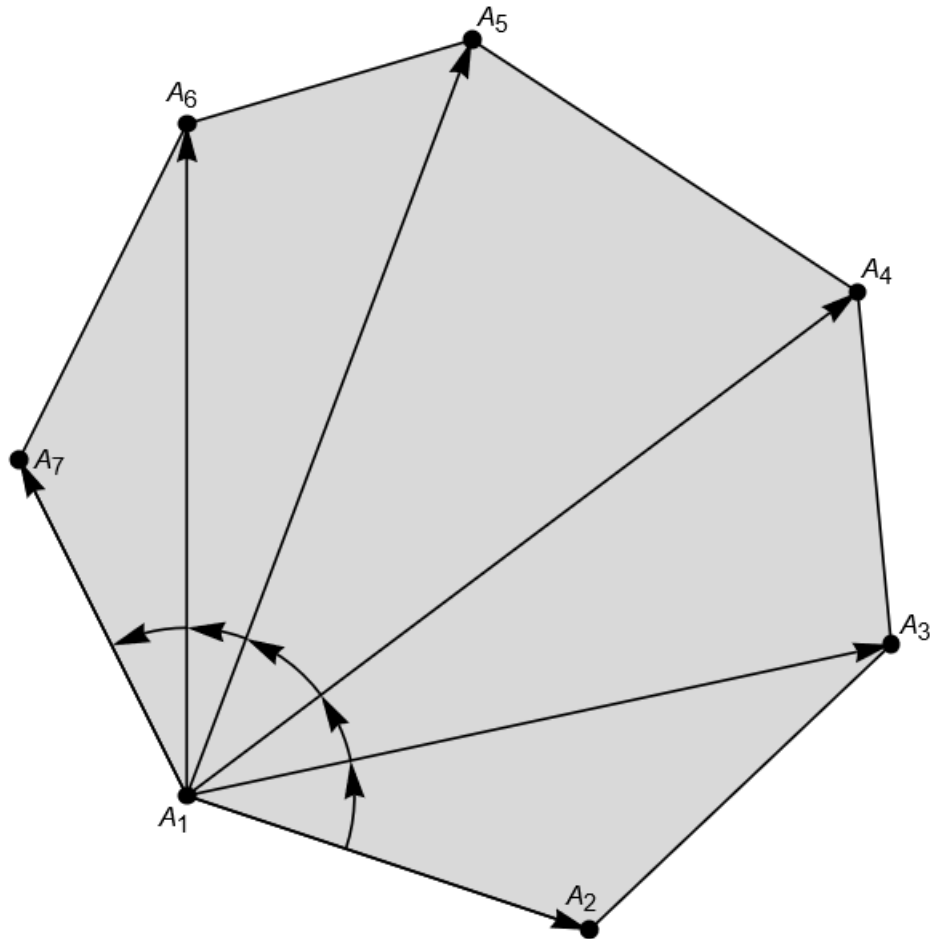


Рисунок 2.9 – Векторы, проведённые из одной вершины выпуклого полигона к другим, поворачиваются друг к другу в одном направлении

1. В полигоне  $A_1A_2\dots A_nA_1$  проводится диагональ  $A_1A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ , которая разделяет его на два полигона с примерно равным числом вершин: левый и правый. Полигон  $A_1A_2\dots A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}A_1$  является левым (правым), если угол  $\angle \left( \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}} \right)$  положительный (отрицательный). Полигон  $A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}\dots A_nA_1A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$  тогда будет расположен от оси  $A_1A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$  по другую сторону.

2. Аналогично определяется, находится ли точка  $M$  по левую или по правую сторону от оси  $A_1A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ . Если точка оказалась от оси по левую (правую) сторону, то тогда алгоритм повторяется для точки  $M$  и левого (правого) полигона из шага 1 алгоритма. Если же точка оказалась лежащей на самой оси, то она принадлежит исходному полигону тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{A_1M} = \alpha \overrightarrow{A_1A_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}$  для некоторого  $\alpha$  из отрезка  $[0, 1]$ .

3. Рано или поздно точка  $M$  окажется либо лежащей на одной прямой с некоторой диагональю, либо нужно будет определить, не принадлежит ли она некоторому треугольнику  $A_1A_iA_{i+1}$ . Зная векторы  $\overrightarrow{A_1A_i}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_{i+1}}$  и  $\overrightarrow{A_1M}$ , несложно воспользоваться критерием принадлежности точки  $M$  этому треугольнику. Окончательно получается, что точка  $M$  принадлежит исходному полигону тогда и только тогда, когда она принадлежит треугольнику  $A_1A_iA_{i+1}$ .

**Пример 3.2.** Для выпуклого полигона  $A_1A_2\dots A_7A_1$  определить положение относительно него точек  $M_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ :

$$A_1(-1, -3), A_2(1.4, -3.8), A_3(3.2, -2.1), A_4(3, 0), A_5(0.7, 1.5), A_6(-1, 1), A_7(-2, -1), \\ M_1(0.9, -1.1), M_2(-1.3, -1.9), M_3(2, -3.6), M_4(2.6, -0.7), M_5(1.8, -0.9).$$

Проведём диагональ  $A_1A_4$ . Она имеет направляющий вектор  $\overrightarrow{A_1A_4}(4, 3)$ . Тогда получим разбиение на полигоны  $A_1A_2A_3A_4A_1$  и  $A_4A_5A_6A_7A_1A_4$ , причём один из них расположен левее оси  $A_1A_4$ , другой – правее:

$$\overrightarrow{A_1A_2}(2.4, -0.8), \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2.4 & -0.8 \end{vmatrix} = -1.$$

Значит,  $A_1A_2A_3A_4A_1$  расположен по правую сторону от оси  $A_1A_4$ ,  $A_4A_5A_6A_7A_1A_4$  – по левую, а поворот от вектора  $\overrightarrow{A_1A_2}$  к вектору  $\overrightarrow{A_1A_4}$  осуществляется против часовой стрелки. Условно этот факт можно обозначить вот такой последовательностью точек:

$$\begin{array}{cccccc} & & & | & & \\ A_7 & A_6 & A_5 & A_4 & A_3 & A_2, \\ & & & | & & \end{array}$$

разделённой на два подмножества: точки по левую и по правую сторону от оси  $A_1A_4$ . Выясним, к которому из них относятся точки  $M_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ :

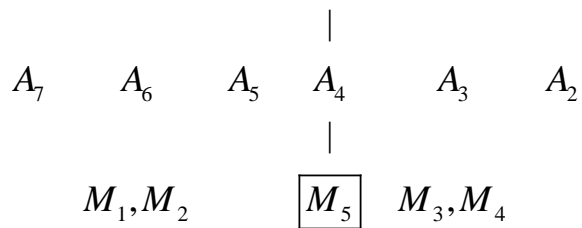
$$\overrightarrow{A_1M_1}(1.9, 1.9), \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1.9 & 1.9 \end{vmatrix} = +1, \\ \overrightarrow{A_1M_2}(-0.3, 1.1), \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1M_2}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -0.3 & 1.1 \end{vmatrix} = +1,$$

$$\overrightarrow{A_1M_3}(3, -0.6), \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -0.6 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\overrightarrow{A_1M_4}(3.6, 2.3), \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3.6 & 2.3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(9.2 - 10.8) = -1,$$

$$\overrightarrow{A_1M_5}(2.8, 2.1), \operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2.8 & 2.1 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(8.4 - 8.4) = 0.$$

Значит, схема выше дописывается следующим образом:



Для точки  $M_5$  получаем  $\overrightarrow{A_1M_5} = \frac{2.8}{4} \overrightarrow{A_1A_4}$ , т.е. эта точка лежит на диагонали  $A_1A_4$ , а значит, внутри полигона  $A_1A_2 \dots A_7A_1$  (Рисунок 2.10).

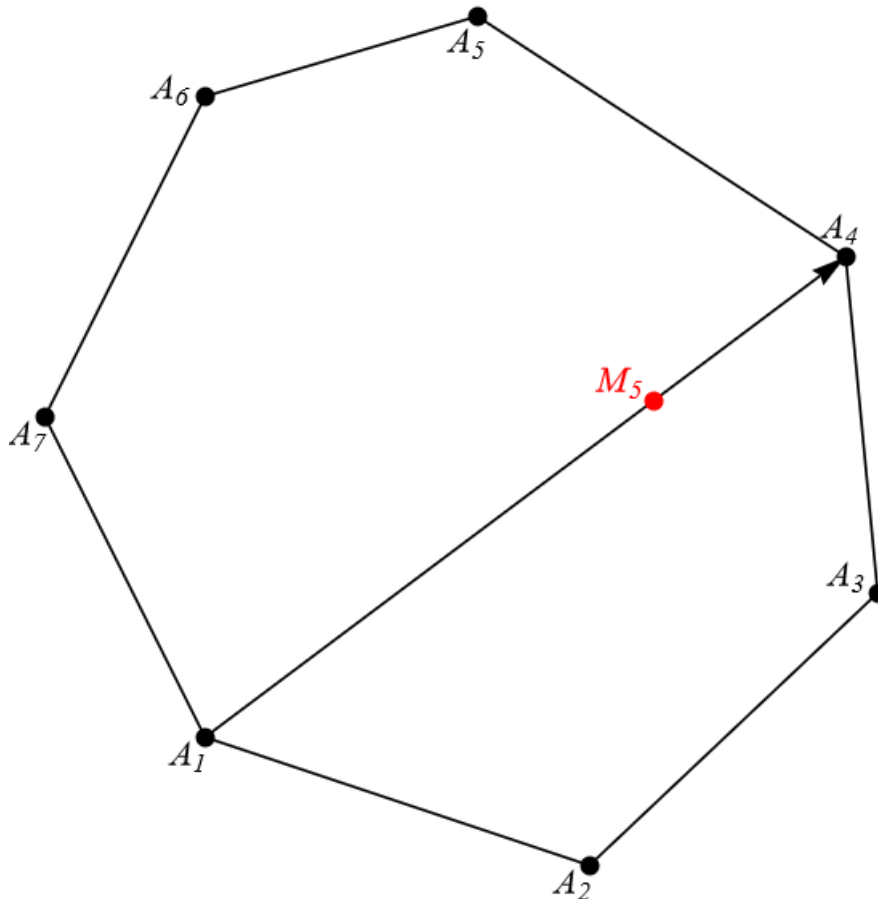
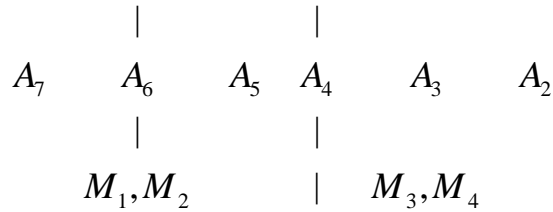


Рисунок 2.10 – Точка  $M_5$  оказалась лежащей на диагонали

Для точек по левую сторону от оси  $A_1A_4$  нужно теперь рассматривать 5-угольник  $A_4A_5A_6A_7A_1A_4$ . Согласно схеме выше, нужно проводить диагональ  $A_1A_5$  либо  $A_1A_6$ . Возьмём, например,  $\overrightarrow{A_1A_6}(0,4)$ :

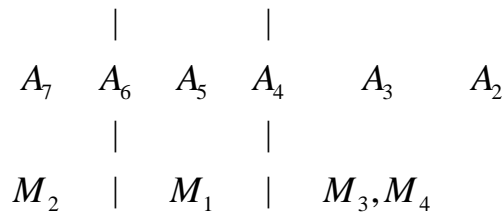


Расположение точек  $M_1$  и  $M_2$  относительно оси  $A_1A_6$ :

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_6}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1.9 & 1.9 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_6}, \overrightarrow{A_1M_2}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -0.3 & 1.1 \end{vmatrix} = +1.$$

Получаем следующую картину:



Точка  $M_1$  может оказаться лежащей внутри 4-угольника  $A_4A_5A_6A_1A_4$ ,  $M_2$  – внутри треугольника  $A_6A_7A_1$ . Выясним, действительно ли точка  $M_2$  лежит в этом треугольнике:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{A_1M_2} &= \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_6} + \beta_2 \overrightarrow{A_1A_7}: \\
 \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -0.3 \\ 4 & 2 & 1.1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -0.3 \\ 4 & 0 & 0.5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Обе координаты положительны, и их сумма меньше единицы – точка  $M_2$  находится внутри треугольника  $A_6A_7A_1$ , а значит, принадлежит полигону (Рисунок 2.11).

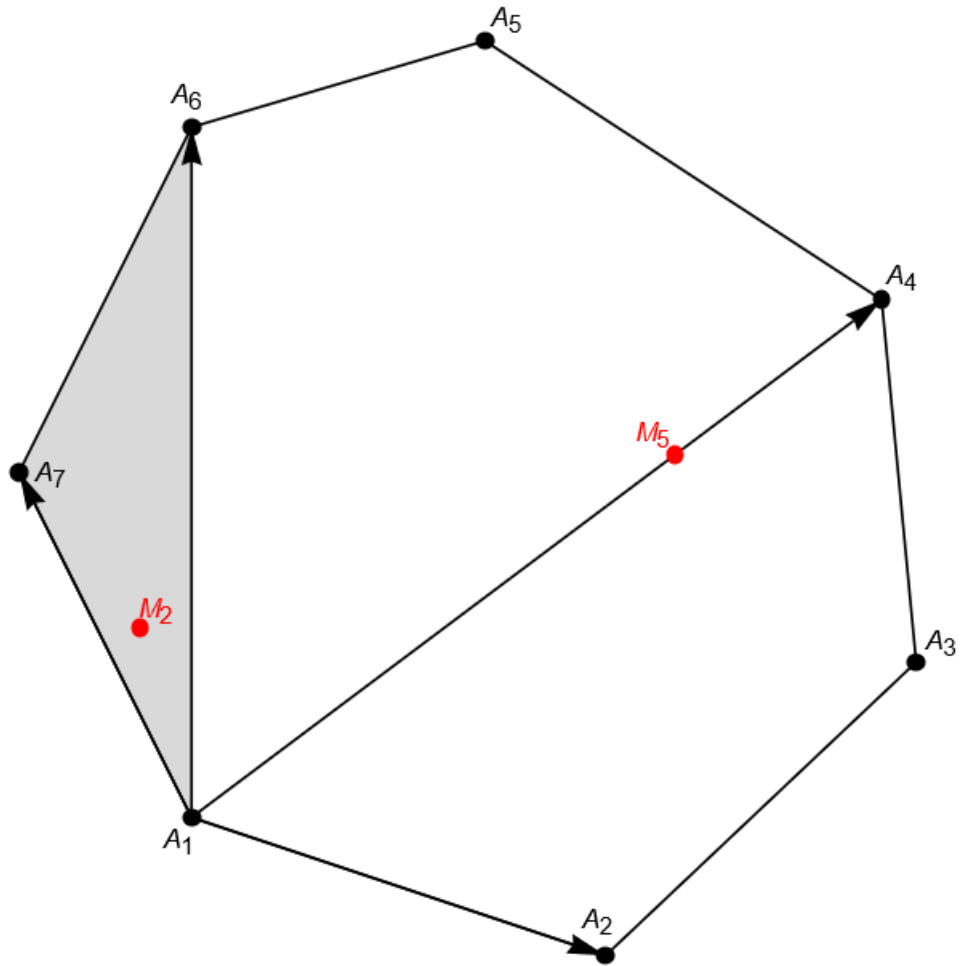
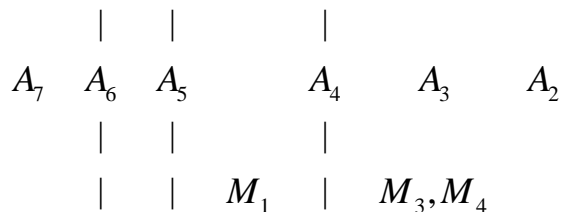


Рисунок 2.11 – Точка  $M_2$  является внутренней

В 4-угольнике  $A_4A_5A_6A_1A_4$  проведём диагональ  $A_1A_5$  с направляющим вектором  $\overrightarrow{A_1A_5}(1.7, 4.5)$  и выясним, по какую от неё сторону находится точка  $M_1$  :

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1A_5}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1.7 & 4.5 \\ 1.9 & 1.9 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(3.23 - 9 + 0.45) = -1.$$

Значит, точка  $M_1$  лежит по правую сторону от оси  $A_1A_5$  :



Проверим, принадлежит ли точка  $M_1$  треугольнику  $A_1A_4A_5$  :

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \alpha_1 \overrightarrow{A_1A_4} + \beta_1 \overrightarrow{A_1A_5} :$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & 1.7 & 1.9 \\ 3 & 4.5 & 1.9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2.8 & 0 \\ 3 & 4.5 & 1.9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2.8 & 0 \\ 0 & 12.9 & 1.9 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 266/645 \\ 0 & 1 & 19/129 \end{array} \right).$$

Снова получили положительные координаты с суммой меньше единицы, значит, точка  $M_1$  принадлежит треугольнику  $A_1A_4A_5$  (Рисунок 2.12).

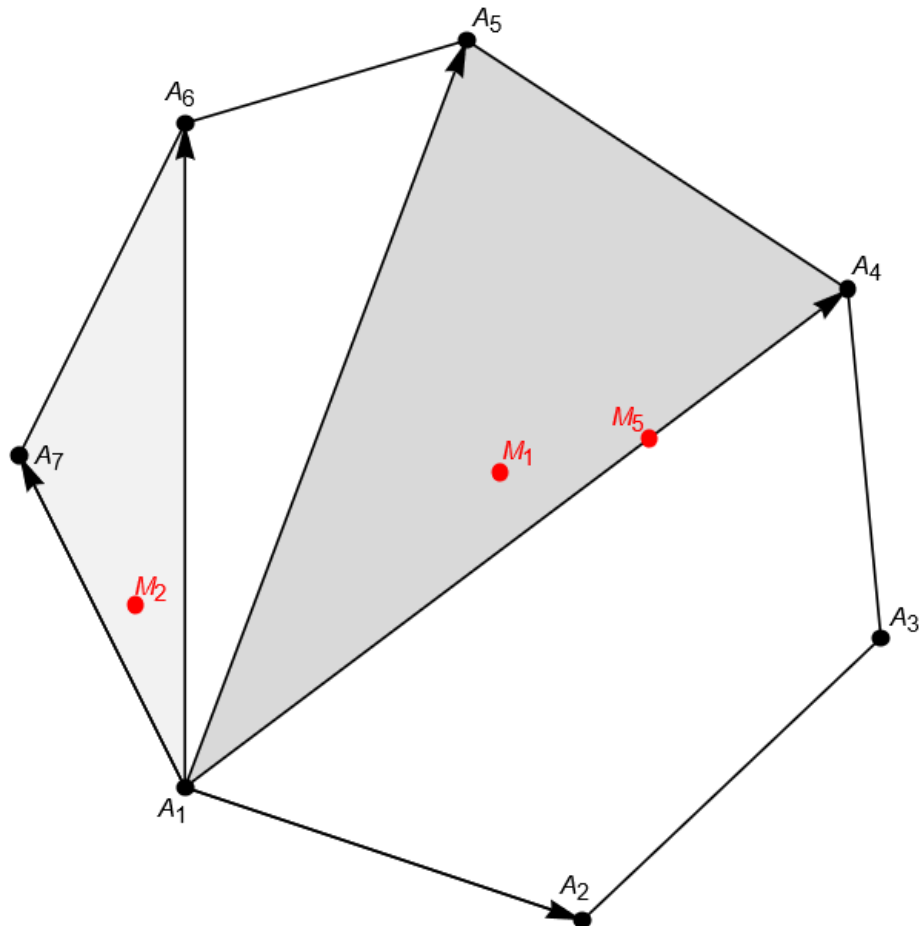
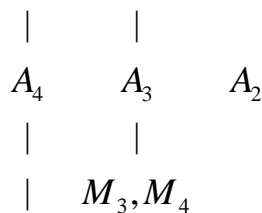


Рисунок 2.12 – Точка  $M_1$  оказалась внутренней

Остаются ещё точки  $M_3$  и  $M_4$ . Проведём диагональ  $A_1A_3$  с направляющим вектором  $\overrightarrow{A_1A_3}(4.2, 0.9)$ :



Относительно оси  $A_1A_3$  положение точек будет следующим:

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 M_3}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4.2 & 0.9 \\ 3 & -0.6 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{A_1 A_3}, \overrightarrow{A_1 M_4}) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 4.2 & 0.9 \\ 3.6 & 2.3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(4.2 \cdot 2.3 - 3.6 \cdot 0.9) = +1,$$

$$\begin{array}{ccc} | & | & \\ A_4 & A_3 & A_2 \\ | & | & \\ | & M_4 & | & M_3 \end{array}$$

Положение точки  $M_4$  относительно треугольника  $A_1 A_3 A_4$ :

$$\overrightarrow{A_1 M_4} = \alpha_4 \overrightarrow{A_1 A_3} + \beta_4 \overrightarrow{A_1 A_4}:$$

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 4.2 & 4 & 3.6 \\ 0.9 & 3 & 2.3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 3.3 & 1 & 1.3 \\ 0.9 & 3 & 2.3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 3.3 & 1 & 1.3 \\ -9 & 0 & -1.6 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 3.3 & 1 & 1.3 \\ 1 & 0 & 8/45 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8/45 \\ 0 & 1 & 107/150 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Положительные координаты в сумме дают число, меньшее единицы, значит, точка  $M_4$  лежит в треугольнике  $A_1 A_3 A_4$  (Рисунок 2.13).

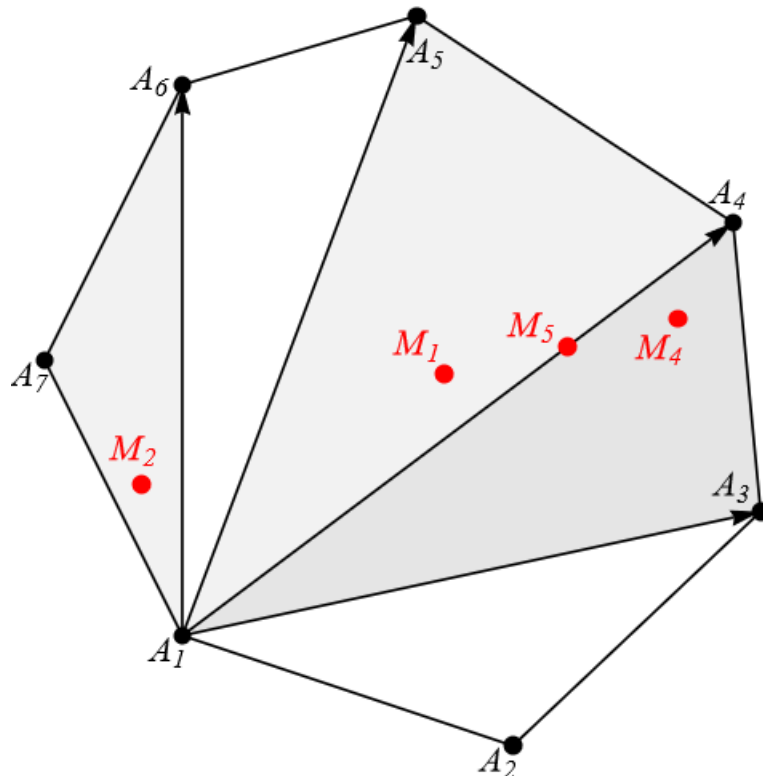


Рисунок 2.13 – Точка  $M_4$  является внутренней

Наконец, для точки  $M_3$  проверим, принадлежит ли она треугольнику  $A_1A_2A_3$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1M_3} &= \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_2} + \beta_3 \overrightarrow{A_1A_3}: \\ \left( \begin{array}{cc|c} 2.4 & 4.2 & 3 \\ -0.8 & 0.9 & -0.6 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 6.9 & 1.2 \\ -0.8 & 0.9 & -0.6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4/23 \\ -0.8 & 0.9 & -0.6 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4/23 \\ -8 & 9 & -6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4/23 \\ -8 & 0 & -6 - 36/23 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/4 + 9/46 \\ 0 & 1 & 4/23 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Два числа  $\alpha_3 = \frac{3}{4} + \frac{9}{46} = \frac{87}{92}$  и  $\beta_3 = \frac{4}{23}$  положительны, однако их сумма больше единицы. Это означает нарушение критерия принадлежности точки  $M_3$  треугольнику  $A_1A_2A_3$ . Расположение всех точек  $M_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ , относительно исходного полигона представлено на рисунке 2.14.

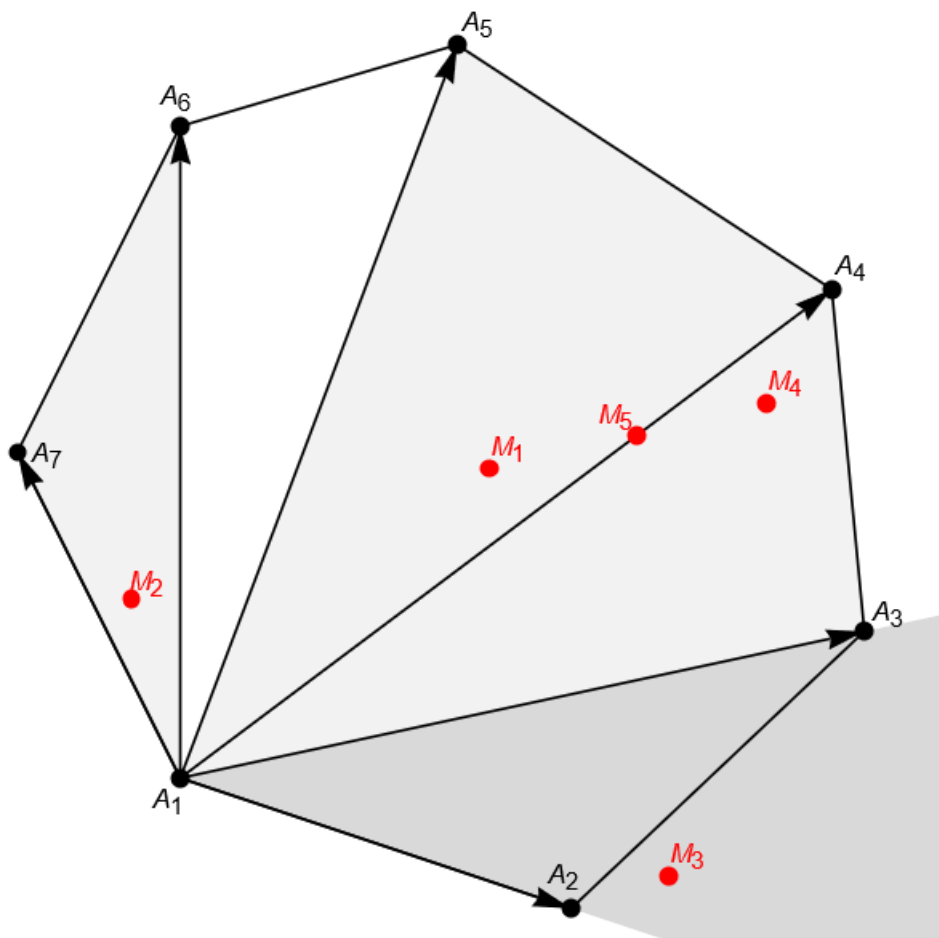


Рисунок 2.14 – Расположение всех точек относительно полигона.  
Точка  $M_3$  оказалась внешней



Замечание. Этот критерий работает не только с выпуклыми, но также (с некоторыми оговорками и изменениями) со **звёздными (звёздчатыми)** полигонами, т.е. такими, у которых не пусто множество внутренних точек, из которых видны все вершины полигона – **ядро** полигона. В таких полигонах можно взять любую точку из ядра и оперировать лучами с началом в этой точке, проходящими через все вершины. На рисунке 2.15 синяя точка принадлежит ядру звёздного полигона – пятиугольнику, выделенному более тёмным цветом, чем оставшаяся часть полигона.

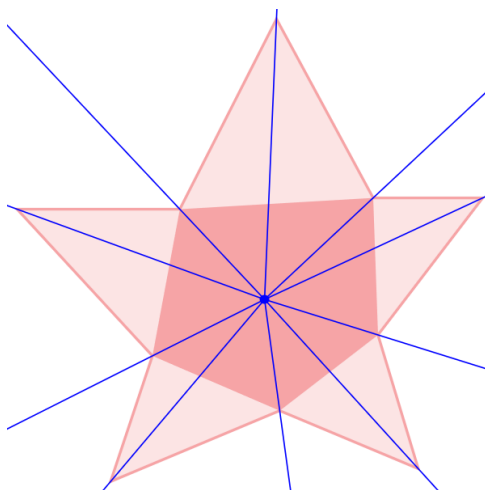


Рисунок 2.15 – Пример звёздного полигона

### 2.3.3. Положение точки относительно самонепересекающегося полигона

Пусть  $A_1A_2\dots A_nA_1$  – самонепересекающийся полигон. Один из подходов к определению принадлежности некоторой точки  $M$  заключается в том, чтобы рассматривать векторы  $\overrightarrow{MA_1}$ ,  $\overrightarrow{MA_2}$ , ...,  $\overrightarrow{MA_n}$  и углы между ними. Если точка  $M$  является внутренней, то при последовательных поворотах от  $\overrightarrow{MA_1}$  к  $\overrightarrow{MA_2}$ , от  $\overrightarrow{MA_2}$  к  $\overrightarrow{MA_3}$ , ..., от  $\overrightarrow{MA_{n-1}}$  к  $\overrightarrow{MA_n}$  и, наконец, от  $\overrightarrow{MA_n}$  к  $\overrightarrow{MA_1}$  произойдёт поворот на полный угол вокруг точки  $M$ , а если  $M$  – внешняя, то такого поворота не произойдёт.

Формально **октантный критерий** принадлежности точки самонепересекающемуся полигону описывается следующим образом:

1. Вычисляются координаты векторов  $\overrightarrow{MA_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
2. Для каждого из этих векторов определяется, к какому октантному углу  $I_i$  он принадлежит (Рисунок 2.16).

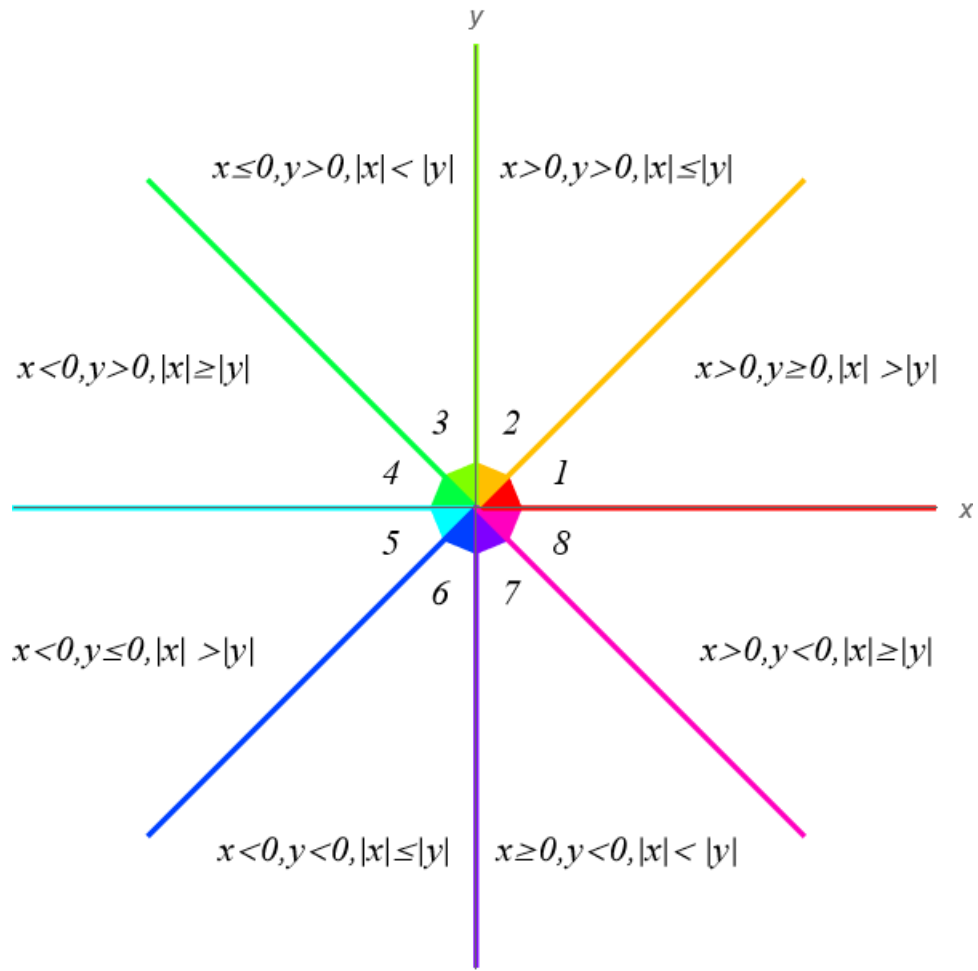


Рисунок 2.16 – Разбиение координатной плоскости на восемь октантных углов

3. Вычисляются разности  $\Delta_i = I_{i+1} - I_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $\Delta_n = I_1 - I_n$ . Они указывают, на сколько октантных углов имеет место поворот от вектора  $\overrightarrow{MA_i}$  к вектору  $\overrightarrow{MA_{i+1}}$ .
4. Так как угол между векторами по определению меньше развёрнутого, то разности  $\Delta_i$ , вообще говоря, подлежат корректировке: если  $|\Delta_i| > 4$ , то нужен такой поворот угла заменить противоположным по направлению:  $\Delta'_i = \Delta_i - 8 \operatorname{sgn} \Delta_i$ . Если же  $|\Delta_i| = 4$ , то тогда соответствующий поворот может оказаться как меньше, так и больше развёрнутого угла, или даже равным ему. Это определяется путём вычисления знака угла  $\angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}})$ . Равенство  $\operatorname{sgn} \angle(\overrightarrow{MA_i}, \overrightarrow{MA_{i+1}}) = 0$  автоматически означает, что точка  $M$  лежит на ребре  $A_i A_{i+1}$ , и алгоритм завершается. При  $|\Delta_i| < 4$   $\Delta'_i = \Delta_i$ .

Для точки  $M$ , не являющейся граничной, получается следующее: точка  $M$  является внутренней, если  $\sum_{i=1}^n \Delta'_i = \pm 8$ , либо внешней, если  $\sum_{i=1}^n \Delta'_i = 0$ .

**Пример 3.3.** Определить принадлежность точек  $M_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ , самонепересекающемуся полигону  $A_1A_2\dots A_8A_1$ :

$$A_1(1,1), A_2(4,0), A_3(2,0), A_4(4,-2), A_5(-4,-1), A_6(-3,4), A_7(-1,4), A_8(0,1), \\ M_1(-1,0), M_2(1,2), M_3(3,-1).$$

Вначале определим расположение точки  $M_1$ . Координаты векторов  $\overrightarrow{M_1A_i}$ ,  $i = \overline{1,8}$ , обозначим через  $(x_i, y_i)$ :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{M_1A_1}(2,1), & x_1 > 0, y_1 > 0, |x_1| > |y_1| & \Rightarrow 1 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_2}(5,0), & x_2 > 0, y_2 = 0 & \Rightarrow 1 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_3}(3,0), & x_3 > 0, y_3 = 0 & \Rightarrow 1 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_4}(5,-2), & x_4 > 0, y_4 < 0, |x_4| > |y_4| & \Rightarrow 8 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_5}(-3,-1), & x_5 < 0, y_5 < 0, |x_5| > |y_5| & \Rightarrow 5 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_6}(-2,4), & x_6 < 0, y_6 > 0, |x_6| < |y_6| & \Rightarrow 3 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_7}(0,4), & x_7 = 0, y_7 > 0 & \Rightarrow 3 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_1A_8}(1,1), & x_8 > 0, y_8 > 0, |x_8| = |y_8| & \Rightarrow 2 \text{ октант.} \end{array}$$

Вычислим разности и скорректируем их:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 - 1 = 0, \Delta_2 = 1 - 1 = 0, \Delta_3 = 8 - 1 = 7, \Delta_4 = 5 - 8 = -3, \\ \Delta_5 &= 3 - 5 = -2, \Delta_6 = 3 - 3 = 0, \Delta_7 = 2 - 3 = -1, \Delta_8 = 1 - 2 = -1, \\ \Delta'_1 &= 0, \Delta'_2 = 0, \Delta'_3 = -1, \Delta'_4 = -3, \Delta'_5 = -2, \Delta'_6 = 0, \Delta'_7 = -1, \Delta'_8 = -1. \end{aligned}$$

Сумма скорректированных разностей равна  $-8$ , значит, точка  $M_1$  – внутренняя.

Аналогично с точкой  $M_2$ :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{M_2A_1}(0,-1), & x_1 = 0, y_1 < 0 & \Rightarrow 7 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_2A_2}(3,-2), & x_2 > 0, y_2 < 0, |x_2| > |y_2| & \Rightarrow 8 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_2A_3}(1,-2), & x_3 > 0, y_3 < 0, |x_3| < |y_3| & \Rightarrow 7 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_2A_4}(3,-4), & x_4 > 0, y_4 < 0, |x_4| < |y_4| & \Rightarrow 7 \text{ октант,} \\ \overrightarrow{M_2A_5}(-5,-3), & x_5 < 0, y_5 < 0, |x_5| > |y_5| & \Rightarrow 5 \text{ октант,} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_2A_6}(-4,2), \quad x_6 < 0, y_6 > 0, |x_6| > |y_6| &\Rightarrow 4 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_2A_7}(-2,2), \quad x_7 < 0, y_7 > 0, |x_7| = |y_7| &\Rightarrow 4 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_2A_8}(-1,-1), \quad x_8 < 0, y_8 < 0, |x_8| = |y_8| &\Rightarrow 6 \text{ октант}, \\
\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = -2, \Delta_5 = -1, \Delta_6 = 0, \Delta_7 = 2, \Delta_8 = 1.
\end{aligned}$$

Никакую из полученных разностей не нужно подвергать коррекции. Их сумма равна нулю, значит, точка  $M_2$  – внешняя.

Для точки  $M_3$  имеют место следующие выкладки:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_3A_1}(-2,2), \quad x_1 < 0, y_1 > 0, |x_1| = |y_1| &\Rightarrow 4 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_2}(1,1), \quad x_2 > 0, y_2 > 0, |x_2| = |y_2| &\Rightarrow 2 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_3}(-1,1), \quad x_3 < 0, y_3 > 0, |x_3| = |y_3| &\Rightarrow 4 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_4}(1,-1), \quad x_4 > 0, y_4 < 0, |x_4| = |y_4| &\Rightarrow 8 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_5}(-7,0), \quad x_5 < 0, y_5 = 0 &\Rightarrow 5 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_6}(-6,5), \quad x_6 < 0, y_6 > 0, |x_6| > |y_6| &\Rightarrow 4 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_7}(-4,5), \quad x_7 < 0, y_7 > 0, |x_7| < |y_7| &\Rightarrow 3 \text{ октант}, \\
\overrightarrow{M_3A_8}(-3,2), \quad x_8 < 0, y_8 > 0, |x_8| > |y_8| &\Rightarrow 4 \text{ октант}, \\
\Delta_1 = -2, \Delta_2 = 2, \Delta_3 = 4, \Delta_4 = -3, \Delta_5 = -1, \Delta_6 = -1, \Delta_7 = 1, \Delta_8 = 0.
\end{aligned}$$

Из всех полученных разностей корректировке подлежит только третья. Она равна  $\Delta_3 = 4$ , поэтому нужно определить знак угла  $\angle(\overrightarrow{M_3A_3}, \overrightarrow{M_3A_4})$ :

$$\text{sgn} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получили, что  $\overrightarrow{M_3A_3} \parallel \overrightarrow{M_3A_4}$ . С учётом вычислений выше имеем тогда, что  $\overrightarrow{M_3A_3} \uparrow \downarrow \overrightarrow{M_3A_4}$ , а значит, точка  $M_3$  лежит на ребре  $A_3A_4$ . Чертёж для этой задачи представлен на рисунке 2.17.

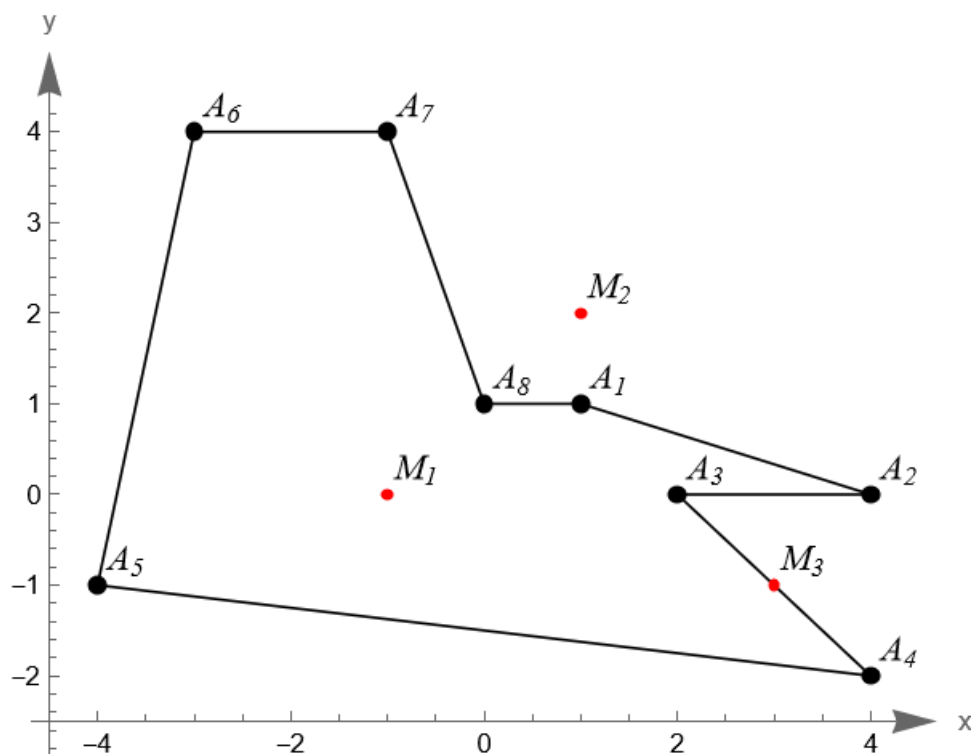


Рисунок 2.17 – Самонепересекающийся полигон и три точки

### 2.3.4. Задачи

1. Определить положение заданных точек  $M_i$  относительно треугольника  $\triangle A_1A_2A_3$ :
  - 1.1.  $A_1(2,3)$ ,  $A_2(4,5)$ ,  $A_3(7,-2)$ ,  $M(4,3)$ ,
  - 1.2.  $A_1(-1,-1)$ ,  $A_2(1,6)$ ,  $A_3(5,2)$ ,  $M(3,4)$ ,
  - 1.3.  $A_1(-1,-2)$ ,  $A_2(9,1)$ ,  $A_3(-6,5)$ ,  $M(5,3)$ ,
  - 1.4.  $A_1(3,3)$ ,  $A_2(5,-2)$ ,  $A_3(0,15)$ ,  $M(2,1)$ ,
  - 1.5.  $A_1(6,7)$ ,  $A_2(0,-2)$ ,  $A_3(2,5)$ ,  $M_1(2,4)$ ,  $M_2(3,8)$ ,  $M_3(5,5)$ ,  $M_4(2,1)$ ,  $M_5(6,4)$ ,
  - 1.6.  $A_1(2,7)$ ,  $A_2(-4,-5)$ ,  $A_3(5,-5)$ ,  $M_1(-2,-1)$ ,  $M_2(3,3)$ ,  $M_3(4,11)$ ,  $M_4(6,-9)$ ,
  - 1.7.  $A_1(5,-1)$ ,  $A_2(3,-2)$ ,  $A_3(-1,-4)$ ,  $M_1(5,5)$ ,  $M_2(1,-3)$ ,
  - 1.8.  $A_1(3,8)$ ,  $A_2(9,1)$ ,  $A_3(2,-7)$ ,  $M_i(i,5)$ ,  $i = \overline{1,10}$ ,
  - 1.9.  $A_1(4,2)$ ,  $A_2(2,7)$ ,  $A_3(7,10)$ ,  $M_1(4,4)$ ,  $M_2(6,7)$ ,  $M_3(5,4)$ ,  $M_4(3,7)$ ,  $M_5(4,9)$ ,
  - 1.10.  $A_1(0,0)$ ,  $A_2(5,5)$ ,  $A_3(0,4)$ ,  $M_1(2,2)$ ,  $M_2(2,1)$ ,  $M_3(3,5)$ ,  $M_4(1,4)$ ,  $M_5(3,4)$ .

2. Определить положение заданных точек  $M_i$  относительно выпуклого полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ :

2.1.  $A_1(2,1)$ ,  $A_2(4,7)$ ,  $A_3(8,0)$ ,  $A_4(4,-5)$ ,  $M(4,1)$ ,

2.2.  $A_1(6,0)$ ,  $A_2(2,-2)$ ,  $A_3(-1,-2)$ ,  $A_4(-4,1)$ ,  $A_5(0,5)$ ,  $A_6(2,6)$ ,  $M_1(-5,2)$ ,  
 $M_2(-3,-1)$ ,  $M_3(-1,2)$ ,  $M_4(2,-1)$ ,  $M_5(4,3)$ ,

2.3.  $A_1(-4,0)$ ,  $A_2(-3,4)$ ,  $A_3(2,5)$ ,  $A_4(6,5)$ ,  $A_5(7,3)$ ,  $A_6(8,-1)$ ,  $A_7(6,-4)$ ,  
 $A_8(4,-5)$ ,  $A_9(1,-5)$ ,  $A_{10}(-1,-4)$ ,  $M_1(-2,-4)$ ,  $M_2(-2,2)$ ,  $M_3(0,6)$ ,  $M_4(2,-4)$ ,  
 $M_5(2,0)$ ,  $M_6(6,-2)$ ,  $M_7(7,-3)$ .

2.4.  $A_1(1,5)$ ,  $A_2(3,9)$ ,  $A_3(5,11)$ ,  $A_4(8,7)$ ,  $A_5(9,2)$ ,  $A_6(8,-3)$ ,  $A_7(2,-2)$ ,  
 $M_1(5,1)$ ,  $M_2(2,9)$ ,  $M_3(3,7)$ ,  $M_4(7,9)$ ,  $M_5(3,-1)$ ,

2.5.  $A_1(-6,7)$ ,  $A_2(2,5)$ ,  $A_3(3,8)$ ,  $A_4(2,10)$ ,  $A_5(0,10)$ ,  $M_1(0,9)$ ,  $M_2(-2,6)$ ,  
 $M_3(1,8)$ ,  $M_4(-3,7)$ ,  $M_5(-4,8)$ ,

2.6.  $A_1(2,3)$ ,  $A_2(4,-1)$ ,  $A_3(6,-7)$ ,  $A_4(3,-9)$ ,  $A_5(-1,-10)$ ,  $A_6(-4,-6)$ ,  
 $A_7(-3,-1)$ ,  $A_8(-1,2)$ ,  $M_1(1,-2)$ ,  $M_2(3,-3)$ ,  $M_3(4,1)$ ,  $M_4(-3,2)$ ,  $M_5(-2,1)$ ,  
 $M_6(3,1)$ ,  $M_7(5,-4)$ ,  $M_8(4,-8)$ ,  $M_9(-3,-9)$ .

3. Определить положение заданных точек  $M_i$  относительно самонепересекающегося полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ :

3.1.  $A_1(3,1)$ ,  $A_2(1,3)$ ,  $A_3(-1,1)$ ,  $A_4(-2,-3)$ ,  $A_5(1,-4)$ ,  $A_6(3,-2)$ ,  $M_1(-1,2)$ ,  
 $M_2(1,-1)$ ,

3.2.  $A_1(2,2)$ ,  $A_2(3,-1)$ ,  $A_3(1,0)$ ,  $A_4(-2,-3)$ ,  $A_5(-3,1)$ ,  $A_6(0,0)$ ,  $M_1(-1,3)$ ,  
 $M_2(2,0)$ ,

3.3.  $A_1(2,1)$ ,  $A_2(0,2)$ ,  $A_3(0,3)$ ,  $A_4(-1,-2)$ ,  $A_5(4,-1)$ ,  $M(1,-2)$ .

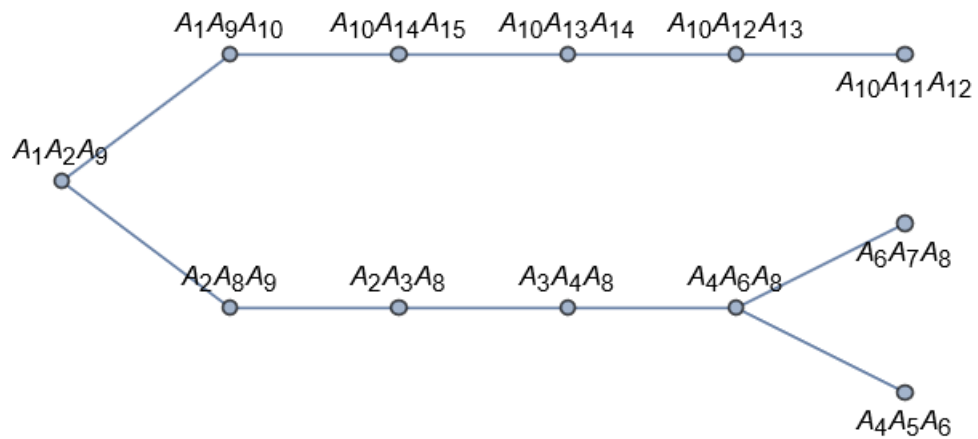
3.4.  $A_1(1,-1)$ ,  $A_2(2,2)$ ,  $A_3(6,0)$ ,  $A_4(5,-5)$ ,  $A_5(2,-6)$ ,  $M(4,1)$ .

3.5.  $A_1(1,1)$ ,  $A_2(4,3)$ ,  $A_3(5,6)$ ,  $A_4(4,4)$ ,  $A_5(3,5)$ ,  $M_1(2,1)$ ,  $M_2(2,3)$ ,  $M_3(3,3)$ ,

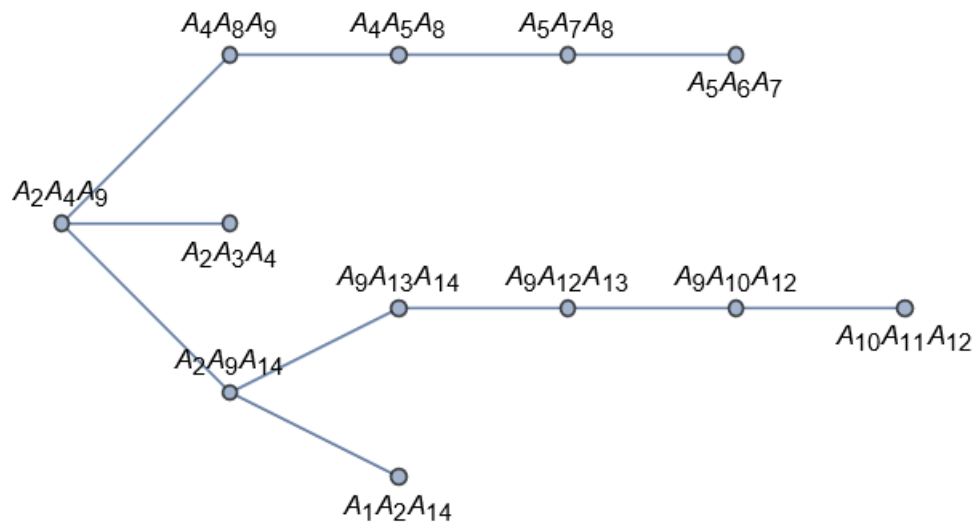
3.6.  $A_1(3,5)$ ,  $A_2(5,8)$ ,  $A_3(4,4)$ ,  $A_4(4,5)$ ,  $A_5(3,2)$ ,  $M(4,6)$ .

4. Определить положение заданных точек  $M_i$  относительно самонепересекающегося полигона  $A_1A_2\dots A_nA_1$ , если известна его триангуляция (на прилегаемых графах вершины обозначают треугольники, из которых состоит полигон, рёбра графа соединяют вершины, обозначающие смежные треугольники):

4.1.  $A_1(3,-7)$ ,  $A_2(4,2)$ ,  $A_3(7,7)$ ,  $A_4(-9,2)$ ,  $A_5(2,2)$ ,  $A_6(-2,3)$ ,  $A_7(3,4)$ ,  
 $A_8(4,5)$ ,  $A_9(2,-3)$ ,  $A_{10}(-5,-7)$ ,  $A_{11}(-3,-2)$ ,  $A_{12}(-5,-1)$ ,  $A_{13}(-6,-10)$ ,  $A_{14}(-4,-8)$ ,  
 $A_{15}(1,-7)$ ,  $M_1(-1,2)$ ,  $M_2(2,-2)$ ,  $M_3(6,3)$ ,  $M_4(-3,-7)$ .



4.2.  $A_1(-8,2)$ ,  $A_2(-4,1)$ ,  $A_3(2,5)$ ,  $A_4(3,-1)$ ,  $A_5(5,-2)$ ,  $A_6(3,3)$ ,  $A_7(9,1)$ ,  $A_8(4,-5)$ ,  $A_9(-1,-2)$ ,  $A_{10}(2,-5)$ ,  $A_{11}(3,-9)$ ,  $A_{12}(-1,-6)$ ,  $A_{13}(-4,-8)$ ,  $A_{14}(-5,1)$ ,  $M_1(2,-1)$ ,  $M_2(5,3)$ ,  $M_3(-7,-6)$ ,  $M_4(7,-1)$ .



## 2.4. Линейные преобразования векторных пространств и аффинные преобразования аффинных пространств

### 2.4.1. Основные понятия

Линейные (аффинные) преобразования векторных (аффинных) пространств можно записать в матричном виде, если задан базис (декартова система координат) этого пространства:

$$\varphi A = \Phi A,$$

где  $A$ ,  $\varphi A$  – координатные столбцы соответственно исходного вектора (точки в однородных координатах) и его (её) образа при преобразовании  $\varphi$ ,  $\Phi$  – матрица, называемая **матрицей преобразования  $\varphi$** , записанная в заданном базисе (декартовой системе координат). Матрица линейного преобразования, записанная в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ , состоит из координатных столбцов векторов системы  $(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n))$ . Матрица аффинного преобразования, записанная в декартовой системе координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$ , составляется из матрицы дифференциала этого аффинного преобразования и координатного столбца точки  $\varphi(o)$ , которые дополняются снизу строкой из  $n$  нулей и одной единицы:

$$\Phi_{OE} = \left( \begin{array}{ccc|c} \tilde{e}_{11} & \dots & \tilde{e}_{1n} & \tilde{o}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{e}_{n1} & \dots & \tilde{e}_{nn} & \tilde{o}_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Матрица линейного (аффинного) преобразования восстанавливается однозначным образом по базису (декартовой системе координат) и его образу (образу начала координат и образу базисных векторов при дифференциале этого аффинного преобразования). Матрицу аффинного преобразования можно также восстановить, зная образ системы из  $n + 1$  точки, не лежащей в одном подпространстве рассматриваемого аффинном пространства.

**Пример 4.1.** Векторы  $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{k}$ ,  $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{e}_3 = 3\vec{j} + 5\vec{k}$  при некотором линейном преобразовании  $\varphi$  имеют следующие образы:  $\varphi(\vec{e}_1) = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\varphi(\vec{e}_2) = 12\vec{i} + 6\vec{j}$ ,  $\varphi(\vec{e}_3) = 19\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ . Найти матрицу преобразования  $\varphi$ , записанную в базисе  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Записывая координатные столбцы исходных векторов и их образов в базисе  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , составим матричное уравнение:

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 19 \\ 3 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решить его можно, составив расширенную матрицу для транспонированного уравнения:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Phi^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 12 & 6 & 0 \\ 19 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 19 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 14 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 19 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 14 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим  $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Пример 4.2.** Точки  $a_1(-7,1,4)$ ,  $a_2(1,-2,-6)$ ,  $a_3(6,-2,1)$ ,  $a_4(-1,0,5)$  под воздействием аффинного преобразования  $\varphi$  отображаются в точки с координатами  $(-21, 36, -47)$ ,  $(8, -34, 47)$ ,  $(30, -21, 13)$ ,  $(3, 20, -36)$  соответственно. Найти матрицу преобразования  $\varphi$ , записанную в той же системе координат, что и все перечисленные точки.

Аналогично предыдущему примеру составим уравнение:

$$\Phi \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 8 & 30 & 3 \\ 36 & -34 & -21 & 20 \\ -47 & 47 & 13 & -36 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эту систему можно упростить, вычеркнув последнюю строку в матрицах  $\Phi$  и матрице в правой части этого уравнения (последняя строка матрицы  $\Phi$  равна  $(0, 0, 0, 1)$ , и её можно будет восстановить позже):

$$\Phi' \begin{pmatrix} -7 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 8 & 30 & 3 \\ 36 & -34 & -21 & 20 \\ -47 & 47 & 13 & -36 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Phi'^T = \begin{pmatrix} -21 & 36 & -47 \\ 8 & -34 & 47 \\ 30 & -21 & 13 \\ 3 & 20 & -36 \end{pmatrix},$$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} -7 & 1 & 4 & 1 & -21 & 36 & -47 \\ 1 & -2 & -6 & 1 & 8 & -34 & 47 \\ 6 & -2 & 1 & 1 & 30 & -21 & 13 \\ -1 & 0 & 5 & 1 & 3 & 20 & -36 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} -6 & 1 & -1 & 0 & -24 & 16 & -11 \\ 2 & -2 & -11 & 0 & 5 & -54 & 83 \\ 7 & -2 & -4 & 0 & 27 & -41 & 49 \\ -1 & 0 & 5 & 1 & 3 & 20 & -36 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} -6 & 1 & -1 & 0 & -24 & 16 & -11 \\ -10 & 0 & -13 & 0 & -43 & -22 & 61 \\ -5 & 0 & -6 & 0 & -21 & -9 & 27 \\ -1 & 0 & 5 & 1 & 3 & 20 & -36 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} -6 & 1 & -1 & 0 & -24 & 16 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ -5 & 0 & -6 & 0 & -21 & -9 & 27 \\ -1 & 0 & 5 & 1 & 3 & 20 & -36 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} -6 & 1 & 0 & 0 & -23 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -15 & 15 & -15 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right).$$

Значит,  $\Phi' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ , а искомая матрица аф-

финного преобразования равна  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Пример 4.3.** Найти матрицу линейного преобразования, поворачивающего направляющий вектор прямой  $x = y = z$  вокруг оси  $Oy$  на угол  $\pi/3$  против часовой стрелки, и отображающего всякий вектор, перпендикулярный этой прямой, в нулевой вектор.

Для начала составим некоторый базис векторного пространства и вычислим его образ при описанном линейном преобразовании. Так, в качестве направляющего вектора прямой  $x = y = z$  можно взять вектор с координатами  $(1, 1, 1)$ . Если его повернуть на угол  $\pi/3$  вокруг оси  $Oy$ , то получится вектор с координатным столбцом

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & 0 & \sin \frac{\pi}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{3} & 0 & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Возьмём также плоскость, проходящую через начало координат перпендикулярно вектору  $(1, 1, 1)$ , и найдём два её направляющих вектора:

$$\begin{aligned} (1,1,1) \cdot (x, y, z)^T = 0 &\Rightarrow \Pi: x + y + z = 0, \\ x = 0, y = 1 &\Rightarrow z = -1, \\ x = 1, y = 0 &\Rightarrow z = -1. \end{aligned}$$

Тогда получается, что векторы с координатами  $(0, 1, -1)$  и  $(1, 0, -1)$  отображаются под воздействием рассматриваемого линейного преобразования в нулевые векторы. Таким образом, уравнение относительно искомой матрицы выглядит следующим образом:

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi^T = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом матрица линейного преобразования равна

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{6} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} & \frac{1-\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.4.** Построить аффинное преобразование плоскости, которое каждой точке прямых  $x - 5y + 3 = 0$  и  $2x + y + 5 = 0$  ставит в соответствие точку пересечения этих прямых.

Для начала нужно найти точку пересечения этих прямых:

$$\begin{cases} x - 5y = -3, \\ 2x + y = -5, \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 11 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -28/11 \\ 0 & 1 & 1/11 \end{array} \right).$$

Значит, все точки обеих прямых отображаются в точку с координатами  $(-28/11, 1/11)$ . Возьмём точку, лежащую на первой прямой, точку, лежащую на

второй прямой, и найденную точку пересечения. Эти три точки не лежат на одной прямой, поэтому по образам системы этих точек можно найти искомую матрицу:

$$\begin{aligned} \Phi \begin{pmatrix} -3 & 0 & -28/11 \\ 0 & -5 & 1/11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -28/11 & -28/11 & -28/11 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Phi' \begin{pmatrix} -3 & 0 & -28/11 \\ 0 & -5 & 1/11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -28/11 & -28/11 & -28/11 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -28/11 & 1/11 & 1 \end{pmatrix} \Phi'^T &= \begin{pmatrix} -28/11 & 1/11 \\ -28/11 & 1/11 \\ -28/11 & 1/11 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \\ 0 & -5 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \\ -28/11 & 1/11 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \\ 3 & -5 & 0 & | & 0 & 0 \\ 5/11 & 1/11 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \\ 28 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -28/11 & 1/11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получается  $\Phi' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -28/11 \\ 0 & 0 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -28/11 \\ 0 & 0 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Пример 4.5.** Задана плоскость  $\Pi: x + 2y - 3z + 6 = 0$ . Под воздействием некоторого аффинного преобразования все точки этой плоскости отражаются симметрично относительно точки  $A(5, -1, -1)$ , а начало координат отражается симметрически относительно плоскости  $\Pi$ . Выписать матрицу этого аффинного преобразования в ПДСК  $Oxyz$ .

Вначале найдём образы этого преобразования для некоторых четырёх точек, не лежащих на одной плоскости. Для удобства рассмотрим точки  $O$ ,  $A$  и ещё две точки плоскости  $\Pi$ .

Результат симметрического отражения точки  $O$  относительно плоскости  $\Pi$  можно вычислить по формулам (1.66) и (1.67). Для их использования в каче-

стве базисных векторов плоскости  $\Pi$  возьмём  $\vec{a}(2, -1, 0)$  и  $\vec{b}(3, 0, 1)$ . Тогда уравнение (1.66) для этой задачи приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} & \overline{AO} \cdot \vec{a} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b}^2 & \overline{AO} \cdot \vec{b} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 10 & -14 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -11 \\ 3 & 5 & -7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ -7 & 0 & 13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 14 & 7 & -28 \\ -7 & 0 & 13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -2 \\ -7 & 0 & 13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -13/7 \\ 0 & 1 & -2/7 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Значит, в формуле (1.67) нужно полагать значения  $p_1$  и  $p_2$  равными соответственно  $-13/7$  и  $-2/7$ :

$$\begin{aligned} f(O) &= A - \overline{AO} + 2 \left( -\frac{13}{7} \vec{a} - \frac{2}{7} \vec{b} \right) = (10, -2, -2) - \\ &= -\frac{26}{7} (2, -1, 0) - \frac{4}{7} (3, 0, 1) = \left( \frac{6}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{18}{7} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что  $f(A) = A$ . Остаются ещё две точки. Возьмём, например,  $B(0, 0, 2)$  и  $C(0, -3, 0)$ , лежащие на плоскости  $\Pi$ . Их образы равны  $f(B) = A - \overline{AB} = (10, -2, -4)$ ,  $f(C) = A - \overline{AC} = (10, 1, -2)$ . Итак, найдены образы четырёх точек, по которым и вычислим искомую матрицу:

$$\begin{aligned} \Phi' \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6/7 & 5 & 10 & 10 \\ 12/7 & -1 & -2 & 1 \\ -18/7 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi'^T &= \begin{pmatrix} 6/7 & 12/7 & -18/7 \\ 5 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & -4 \\ 10 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \\ \Phi'^T : \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 6/7 & 12/7 & -18/7 \\ 5 & -1 & -1 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 10 & 1 & -2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 12 & -18 \\ 35 & -7 & -7 & 7 & 35 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 14 & 7 & 70 & -14 & -28 \\ 0 & -21 & 0 & 7 & 70 & 7 & -14 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 12 & -18 \\ 35 & -7 & -7 & 0 & 29 & -19 & 11 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 64 & -26 & -10 \\ 0 & -21 & 0 & 0 & 64 & -5 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 12 & -18 \\ 70 & -14 & -14 & 0 & 58 & -38 & 22 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 64 & -26 & -10 \\ 0 & -21 & 0 & 0 & 64 & -5 & 4 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 12 & -18 \\ 70 & -14 & 0 & 0 & 122 & -64 & 12 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 64 & -26 & -10 \\ 0 & -21 & 0 & 0 & 64 & -5 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 12 & -18 \\ 105 & -21 & 0 & 0 & 183 & -96 & 18 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 64 & -26 & -10 \\ 0 & -21 & 0 & 0 & 64 & -5 & 4 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 12 & -18 \\ 105 & 0 & 0 & 0 & 119 & -91 & 14 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 64 & -26 & -10 \\ 0 & -21 & 0 & 0 & 64 & -5 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 17/15 & -13/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -64/21 & 5/21 & -4/21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 32/7 & -13/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6/7 & 12/7 & -18/7 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем ответ:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 17/15 & -64/21 & 32/7 & 6/7 \\ -13/15 & 5/21 & -13/7 & 12/7 \\ 2/15 & -4/21 & -5/7 & -18/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 2.4.2. Переход от одного базиса (декартовой системы координат) к другому (к другой)

Матрицей перехода от одного базиса векторного пространства к другому называется матрица  $S_{E \rightarrow E'}$ , удовлетворяющая следующему равенству:

$$(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) S_{E \rightarrow E'}.$$

Матрица  $S_{E \rightarrow E'}$  состоит из координатных столбцов векторов системы  $E' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ , записанных в базисе  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ . Если известны координатные столбцы векторов обеих систем, например, в каноническом базисе рассматриваемого векторного пространства  $K$ , получается следующее равенство:

$$S_{K \rightarrow E'} = S_{K \rightarrow E} S_{E \rightarrow E'}.$$

Зная матрицы  $S_{K \rightarrow E}$  и  $S_{K \rightarrow E'}$ , можно найти матрицу перехода от базиса  $E$  к базису  $E'$ .

Аналогично определяется матрица перехода от одной декартовой системы координат аффинного пространства к другой:

$$(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n, o') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, o) S_{OE \rightarrow O'E'}$$

Первые  $n$  столбцов матрицы перехода  $S_{OE \rightarrow O'E'}$  образуются координатными столбцами векторов  $\vec{e}'_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , записанными в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  и дополненными снизу нулевой строкой,  $(n + 1)$ -ый столбец представляет собой координатный столбец точки  $O'$ , записанный в декартовой системе координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n))$  в однородных координатах.

**Пример 4.6.** Найти матрицу перехода от базиса  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  к базису  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ , координаты векторов из которых равны  $\vec{e}_1(1, 1, -1)$ ,  $\vec{e}_2(2, 0, 1)$ ,  $\vec{e}_3(3, 1, -1)$ ,  $\vec{e}'_1(15, -7, 19)$ ,  $\vec{e}'_2(20, 4, 1)$ ,  $\vec{e}'_3(16, 8, -8)$ .

Уравнение относительно искомой матрицы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} S_{E \rightarrow E'} &= \begin{pmatrix} 15 & 20 & 16 \\ -7 & 4 & 8 \\ 19 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 15 & 20 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & -7 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 19 & 1 & -8 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 5 & -23 & 18 & 32 \\ 1 & 0 & 1 & -7 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 19 & 1 & -8 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -7 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 19 & 1 & -8 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 18 & 4 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Получилась матрица  $S_{E \rightarrow E'} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ 12 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Пример 4.7.** Построить матрицу перехода от декартовой системы координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$  к декартовой системе координат  $(o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3))$ , если извест-



ны координаты точек и векторов:  $o(-2,1,0)$ ,  $\vec{e}_1(1,0,3)$ ,  $\vec{e}_2(2,1,-1)$ ,  $\vec{e}_3(2,3,0)$ ,  $o'(-1,3,4)$ ,  $\vec{e}'_1(-1,-1,4)$ ,  $\vec{e}'_2(14,16,5)$ ,  $\vec{e}'_3(2,3,0)$ .

Уравнение относительно искомой матрицы имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{OE \rightarrow O'E'} = \begin{pmatrix} -1 & 14 & 2 & -1 \\ -1 & 16 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & -2 & -1 & 14 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 16 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 16 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 7 & 0 & 2 & 0 & 7 & 24 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 21 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Получили ответ  $\Phi_{OE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

### 2.4.3. Связь координатных столбцов вектора (точки), записанных в разных базисах (декартовых системах координат)

Рассмотрим некоторое векторное пространство с базисами  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  и  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ . Разложим некоторый вектор  $\vec{a}$  по каждому из этих базисов:

$$\vec{a} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)A_E = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)A_{E'},$$

где  $A_E$  и  $A_{E'}$  – координатные столбцы, записанные в соответствующих базисах. Если известна матрица перехода  $S_{E \rightarrow E'}$ , то равенство выше приводится к следующему виду:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)A_E = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)A_{E'} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)S_{E \rightarrow E'}A_{E'},$$

$$A_E = S_{E \rightarrow E'}A_{E'}.$$

Аналогичная формула имеет место для координатных столбцов одной и той же точки  $A$ , записанных в разных декартовых системах координат:

$$A_{OE} = S_{OE \rightarrow O'E'}A_{O'E'}.$$

Отметим также следующее свойство матрицы перехода от одного базиса к другому. Для любого базиса  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  и другой системы векторов  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$  найдётся единственное линейное преобразование  $\varphi$ , удовлетворяющее равенствам  $\vec{e}'_i = \varphi(\vec{e}_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Значит, матрицу перехода от базиса  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  к базису  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$  можно также рассматривать как матрицу линейного преобразования, переводящего первый базис ко второму. Заметим, что так как преобразование  $\varphi$  переводит один базис в другой, то существует обратное преобразование  $\varphi^{-1}$ , которая в базисе  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  имеет матрицу, обратную  $S_{E \rightarrow E'}$ . Сравнивая два следующих равенства:

$$A_E = S_{E \rightarrow E'}A_{E'},$$

$$A_E = \Phi_E(\Phi_E^{-1}A_E) = \Phi_E(\varphi^{-1}A)_E$$

и полагая матрицы  $S_{E \rightarrow E'}$  и  $\Phi_E$  равными, приходим к выводу, что  $A_{E'} = (\varphi^{-1}A)_E$  для всякого вектора  $\vec{a}$ , то есть координатный столбец вектора  $\vec{a}$  в новом базисе равен координатному столбцу в старом базисе прообраза этого вектора при преобразовании, переводящем старый базис в новый.

На рисунке 2.18 приведены два графика. На рисунке 2.18а изображен старый базис  $(\vec{i}, \vec{j})$  (синий) и новый базис  $(\vec{i}', \vec{j}')$  (красный), полученный из старого в результате применения линейного преобразования с матрицей  $M = S_{E \rightarrow E'}$  (Рисунок 2.18в), записанной ниже этого графика (в данном примере это поворот на угол  $\pi/4$  против часовой стрелки). Неподвижная точка  $A$  в старом базисе имеет координатный столбец, равный синему столбцу  $A_E$ , в новом – красному, равному  $A_{E'} = M^{-1}A_E$  (Рисунок 2.18г). На рисунке 2.18б, наоборот, базисные векторы остались неподвижными, а точка  $A$  подверглась преобразованию, обратному тому, что имело место на графике слева (то есть повороту на угол

$\pi/4$  по часовой стрелке). Матрица этого обратного преобразования, записанная в базисе  $(\vec{i}, \vec{j})$ , равна  $M^{-1}$ . Значит, в базисе  $(\vec{i}, \vec{j})$  исходная точка  $A$  снова имеет координатный столбец, равный синему столбцу  $A_E$ , а её образ  $A'$  имеет координатный столбец, равный красному:  $(\varphi A)_E = M^{-1}A_E$ . Таким образом, **переход к новому базису при неизменяющемся векторном пространстве равносильен применению к пространству линейного преобразования, обратного этому переходу.**

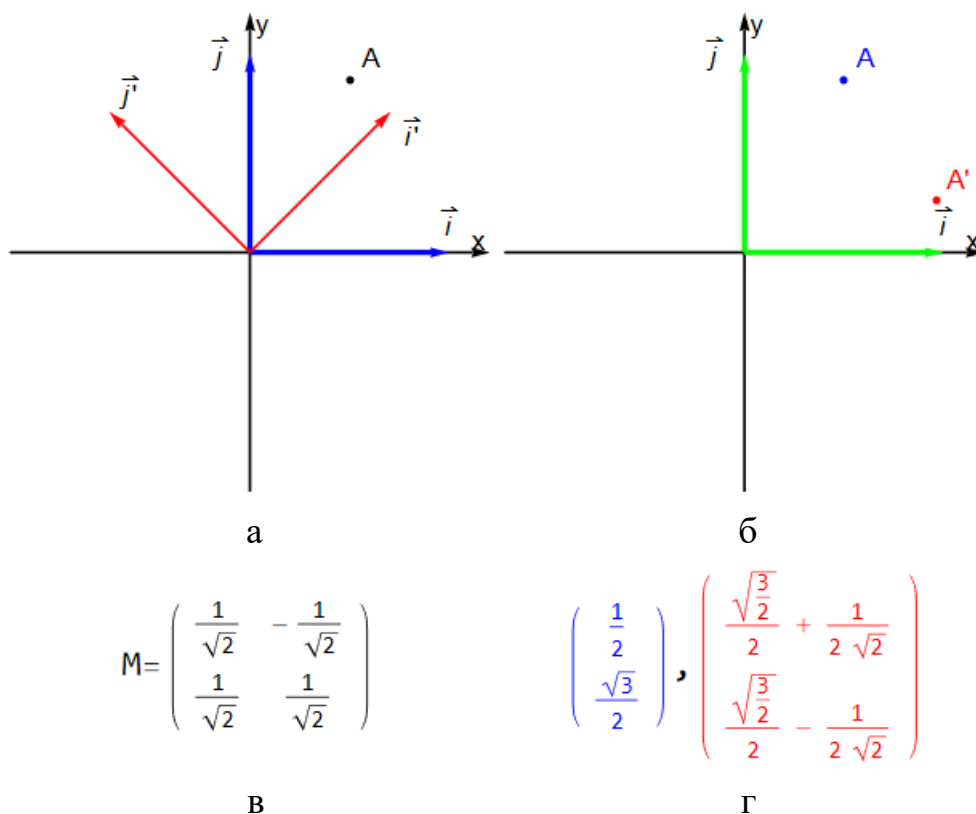


Рисунок 2.18 – Связь между переходом от одного базиса к другому (а) и соответствующим линейным преобразованием (б)

**Пример 4.8.** Объектная система координат  $Ox'y'z'$  трёхмерного пространства получается из мировой системы координат  $Oxyz$  путём поворота базиса последней на угол  $\beta = \pi/3$  вокруг оси  $Oy$  против часовой стрелки, а затем поворота на угол  $\alpha = \pi/2$  вокруг оси  $Ox$  против часовой стрелки. Найти координаты точки в мировой системе координат, если её координаты в объектной системе координат равны  $(1, 1, 1)$ .

Матрица преобразования, переводящего базис системы  $Oxyz$  к базису системы  $Ox'y'z'$ , равна

$$\Phi_{\text{МСК}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица есть матрица перехода от базиса системы  $Oxyz$  к базису системы  $Ox'y'z'$ :  $\Phi_{\text{МСК}} = S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}}$ . Значит, для получения искомого координатного столбца в мировой системе координат заданной точки нужно полученную матрицу умножить на координатный столбец этой же точки, записанный в базисе системы  $Ox'y'z'$ :

$$A_{\text{МСК}} = S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}} A_{\text{ОСК}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### 2.4.4. Связь между матрицами линейного (аффинного) преобразования, записанными в разных базисах (декартовых системах координат)

Рассмотрим некоторое векторное пространство с базисами  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  и  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ . Пусть некоторое линейное преобразование  $\varphi$  имеет матрицы  $\Phi_E$  и  $\Phi_{E'}$ , записанные соответственно в первом и во втором базисе. Тогда для произвольного вектора  $\vec{a}$  выполнено следующее равенство:

$$\vec{a} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \Phi_E A_E = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) \Phi_{E'} A_{E'},$$

где  $A_E$  и  $A_{E'}$  – координатные столбцы вектора  $\vec{a}$  в соответствующих базисах. Зная матрицу  $S_{E \rightarrow E'}$  перехода от первого базиса ко второму, можно это равенство преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \Phi_E A_E &= (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n) \Phi_{E'} A_{E'} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} A_{E'}, \\
\Phi_E A_E &= S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} A_{E'}, \\
\Phi_E S_{E \rightarrow E'} A_{E'} &= S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} A_{E'}.
\end{aligned}$$

Это равенство должно выполняться для всякого вектора  $\vec{a}$ , отсюда получается равенство, описывающее связь матриц одного и того же линейного преобразования, записанных в разных базисах:

$$S_{E \rightarrow E'} \Phi_{E'} = \Phi_E S_{E \rightarrow E'}.$$

Аналогично получается равенство, описывающее связь матриц одного и того же аффинного преобразования, записанных в разных декартовых системах координат:

$$S_{OE \rightarrow O'E'} \Phi_{O'E'} = \Phi_{OE} S_{OE \rightarrow O'E'}. \quad (2.3)$$

**Пример 4.9.** Построить матрицу аффинного преобразования  $\varphi$ , заключающегося в симметрическом отражении точки относительно плоскости  $\Pi$ :  $x + 2y + 3z + 6 = 0$ .

Введём новую декартову систему координат, в которой запишем матрицу данного аффинного преобразования  $\Phi_{O'E'}$ , затем найдём матрицу этого же преобразования  $\Phi_{OE}$ , записанную в той же декартовой системе координат, что и уравнение заданной плоскости. В качестве начала новой системы координат возьмём любую точку на плоскости  $\Pi$ , например  $o(0, 0, -2)$ . Очевидно, что эта точка останется неизменной под воздействием преобразования  $\varphi$ . В качестве базисных векторов новой системы координат возьмём какие-нибудь два направляющих вектора плоскости  $\Pi$ , например  $\vec{a}(3, 0, -1)$ ,  $\vec{b}(0, 3, -2)$ . Они останутся неизменными под воздействием линейного преобразования  $d\varphi$ . Наконец, в качестве третьего базисного вектора возьмём вектор нормали  $\vec{c}(1, 2, 3)$  плоскости  $\Pi$ . Его образ при преобразовании  $d\varphi$  равен противоположному вектору. Итак, получаем следующее:

$$\begin{aligned}
d\varphi(\vec{a}) &= \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}, \\
d\varphi(\vec{b}) &= \vec{b} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}, \\
d\varphi(\vec{c}) &= -\vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + (-1) \cdot \vec{c}, \\
\varphi(o) &= o = o + 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}.
\end{aligned}$$

По выписанным коэффициентам составляется матрица

$$\Phi_{O'E'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем по формуле (2.3) вычислим искомую матрицу  $\Phi_{OE}$ :

$$S_{OE \rightarrow O'E'} \Phi_{O'E'} = \Phi_{OE} S_{OE \rightarrow O'E'}.$$

Меняя левую и правую часть полученного равенства местами (т.к. нужно решить уравнение относительно матрицы  $\Phi_{OE}$ , которая сейчас находится в правой части) и транспонируя его, получаем следующее:

$$S_{OE \rightarrow O'E'}^T \Phi_{OE}^T = (S_{OE \rightarrow O'E'} \Phi_{O'E'})^T = \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^T,$$

$$S_{OE \rightarrow O'E'}^T \Phi_{OE}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{OE}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное уравнение решается относительно  $\Phi_{OE}^T$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & -6 & -10 & 0 & 6 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -14 & 0 & 6 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 21 & -14 & 0 & 0 & 21 & -14 & 0 \\ 7 & 14 & 21 & 0 & -7 & -14 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 7 & 0 & 0 & -14 & 7 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & -6 & 9 & -18 & 0 \\ 7 & 14 & 0 & 0 & 2 & 4 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 & -12 & -18 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 3 & -6 & 0 \\ 7 & 14 & 0 & 0 & 2 & 4 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 & -12 & -18 & 7 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 7 & 0 & -3 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 3 & -6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 & -12 & -18 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6/7 & -2/7 & -3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/7 & 3/7 & -6/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/7 & -6/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6/7 & -12/7 & -18/7 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Окончательно имеем  $\Phi_{OE} = \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & -3/7 & -6/7 \\ -2/7 & 3/7 & -6/7 & -12/7 \\ -3/7 & -6/7 & -2/7 & -18/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Пример 4.10.** Построить матрицу поворота вокруг оси  $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$  (направление в сторону увеличения аппликат) на угол  $\varphi = \pi/3$  против часовой стрелки.

Рассмотрим новую ДСК с началом в точке  $O'(2,1,0)$  и одним из базисных векторов  $\vec{k}'(-3,0,1)$  (точка и направляющий вектор заданной оси). Два других вектора  $\vec{i}'$  и  $\vec{j}'$  нужно подобрать таким образом, чтобы новая ДСК ( $O', (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ) была прямоугольной, что обеспечило бы стандартный вид матрицы поворота

$$\Phi_{O'E'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ вокруг оси } O'z', \text{ совпа-}$$

дающей с  $\Delta$  в этой ПДСК. Для составления ПДСК подойдут, например, векторы

$\vec{i}'(1,0,3)$  и  $\vec{j}'(0,\sqrt{10},0)$ . Матрица перехода между двумя ДСК равна  $S_{OE \rightarrow O'E'} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Значит, получается следующее уравнение:}$$

$$S_{OE \rightarrow O'E'} \Phi_{O'E'} = \Phi_{OE} S_{OE \rightarrow O'E'},$$

$$S_{OE \rightarrow O'E'}^T \Phi_{OE}^T = \Phi_{O'E'}^T S_{OE \rightarrow O'E'}^T,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{OE}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{OE}^T = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{30}/2 & 3/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{10}/2 & -3\sqrt{3}/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{OE}^T : \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1/2 & \sqrt{30}/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{10}/2 & -3\sqrt{3}/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1/2 & \sqrt{30}/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{30}/20 & 1/2 & -3\sqrt{30}/20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -3/2 & 3\sqrt{30}/2 & 11/2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1-\sqrt{30} & -3 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1/2 & \sqrt{30}/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{20} & 1/2 & -\frac{3\sqrt{30}}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -3/2 & 3\sqrt{30}/2 & 11/2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 1 + \frac{\sqrt{30}}{20} & \frac{1}{2} - \sqrt{30} & -3 + \frac{3\sqrt{30}}{20} & 1 \end{array} \right) \sim$$



$$\begin{aligned}
& \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 20 & 0 & 60 & 0 & 10 & 10\sqrt{30} & 30 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{20} & \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{30}}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & -3 & 3\sqrt{30} & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -120 & 20 & 20+\sqrt{30} & 10-20\sqrt{30} & -60+3\sqrt{30} & 20 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 20 & 0 & 0 & 0 & 19 & \sqrt{30} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{20} & \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{30}}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & -3 & 3\sqrt{30} & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 2+\sqrt{30} & 10-2\sqrt{30} & 6+3\sqrt{30} & 20 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 19/20 & \sqrt{30}/20 & -3/20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{30}}{20} & \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{30}}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/20 & 3\sqrt{30}/20 & 11/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2+\sqrt{30}}{20} & \frac{5-\sqrt{30}}{10} & \frac{6+3\sqrt{30}}{20} & 1 \end{array} \right), \\
& \Phi_{OE} = \begin{pmatrix} 19/20 & -\sqrt{30}/20 & -3/20 & \frac{2+\sqrt{30}}{20} \\ \sqrt{30}/20 & 1/2 & 3\sqrt{30}/20 & \frac{5-\sqrt{30}}{10} \\ -3/20 & -3\sqrt{30}/20 & 11/20 & \frac{6+3\sqrt{30}}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### 2.4.5. Задачи

Кроме задач, представленных ниже, рекомендуется пользоваться источниками [2, гл. 12; 3, разд. II-12], где представлены задачи на линейные пространства и преобразования.

1. По системе точек  $(A_i)_{i=1}^{N+1}$  ( $N=2$  или  $3$ ) и её образу  $(B_i)_{i=1}^{N+1}$  построить матрицу аффинного преобразования, записанную в той же системе координат, что и координаты заданных точек:

- 1.1.  $A_1(-2,5), A_2(2,3), A_3(9,-1), B_1(5,5), B_2(11,7), B_3(21,9),$
- 1.2.  $A_1(-3,7), A_2(-1,4), A_3(2,0), B_1(-3,6), B_2(2,2), B_3(10,-3),$
- 1.3.  $A_1(4,-9), A_2(1,-1), A_3(2,-4), B_1(-11,-11), B_2(10,5), B_3(2,-1),$
- 1.4.  $A_1(1,2,1), A_2(2,3,1), A_3(0,0,1), A_4(-1,4,5), B_1(10,-6,10), B_2(11,-11,11),$   
 $B_3(11,-1,7), B_4(4,8,12),$
- 1.5.  $A_1(3,-2,-5), A_2(1,0,-3), A_3(2,2,7), A_4(1,1,0), B_1(4,-9,-9), B_2(4,-7,1),$   
 $B_3(-1,2,-10), B_4(3,-5,1),$
- 1.6.  $A_1(4,2,8), A_2(1,0,1), A_3(-2,-3,-7), A_4(7,2,11), B_1(9,-1,-1), B_2(2,-4,1),$   
 $B_3(-12,-13,-2), B_4(6,-10,-19),$
- 1.7.  $A_1(-3,-3,1), A_2(1,2,-1), A_3(-2,3,-1), A_4(0,-5,1), B_1(-14,-3,-2), B_2(14,$   
 $-9,2), B_3(15,-12,-2), B_4(-19,0,0),$
- 1.8.  $A_1(4,0,2), A_2(1,-2,3), A_3(-2,1,-9), A_4(1,0,-2), B_1(15,-8,-9), B_2(21,-4,$   
 $-9), B_3(-30,-16,24), B_4(-1,-10,4),$
- 1.9.  $A_1(4,2,-1), A_2(3,3,0), A_3(-2,4,7), A_4(2,0,3), B_1(-13,-14,-6), B_2(-10,$   
 $-10,-4), B_3(17,14,7), B_4(5,-2,-4).$

2. Найти матрицу аффинного преобразования, которое представляет собой:

2.1 Композицию двух поворотов: вначале на угол  $-\pi/6$  вокруг точки  $(2, -1)$ , затем на угол  $+\pi/6$  вокруг точки  $(1, -2)$ .

2.2. Композицию поворота вокруг начала координат на некоторый угол  $\varphi$  и проекции на прямую, проходящую через начало координат параллельно некоторому вектору  $\vec{a}(a_x, a_y)$ .

2.3. Композицию масштабирования вокруг точки  $A(5, -3)$  с коэффициентом  $\alpha > 0$  и поворота на угол  $\varphi$  вокруг этой же точки.

2.4. Поворот вокруг некоторой неизвестной точки, который переводит прямую  $\Delta_1: 3x + 4y - 8 = 0$  в прямую  $\Delta'_1: x - 2 = 0$ , а прямую  $\Delta_2: 4x + 7y - 14 = 0$  – в прямую  $\Delta'_2: 8x + y - 18 = 0$ .

2.5. Симметрическое отражение точки относительно плоскости  $\Pi: x + y + z - 3 = 0$ , уравнение которой записано в ДСК  $Oxyz$ .

2.6. Поворот вокруг оси  $\Delta: x = y = z$  (направление в сторону увеличения аппликаты) на угол  $+\pi/2$ .

2.7. Симметрическое отражение относительно неизвестной плоскости, переводящее точку  $A(7, 2, -1)$  в точку  $B(-1, -2, 3)$ .

2.8. Симметрическое отражение относительно неизвестной прямой, переводящее точку  $A(7, 2, -1)$  в точку  $B(-1, -2, 3)$ , а точку  $C(5, 7, 0)$  – в точку  $D(1, -1, 8)$ .

3. Для некоторого аффинного преобразования известна матрица  $\Phi$ , записанная в декартовой системе координат  $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ . Найти матрицу  $\Phi'$  этого же аффинного преобразования, записанную в ДСК  $(O', (\vec{i}', \vec{j}'))$ , если известны координаты точки  $O'$  в ДСК  $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$  и разложение векторов системы  $(\vec{i}', \vec{j}')$  по базису  $(\vec{i}, \vec{j})$ :

$$3.1. \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(1,1), \vec{i}' = \vec{i} + 2\vec{j}, \vec{j}' = \vec{j},$$

$$3.2. \Phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(0,-3), \vec{i}' = -\vec{i} + \vec{j}, \vec{j}' = \vec{i} + \vec{j},$$

$$3.3. \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(5,5), \vec{i}' = 2\vec{j}, \vec{j}' = 2\vec{i},$$

$$3.4. \Phi = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(0,-1), \vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}, \vec{j}' = 2\vec{i} + 3\vec{j},$$

$$3.5. \Phi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(1,-1), \vec{i}' = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{j}' = \vec{i} - 2\vec{j},$$

$$3.6. \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(-1,2), \vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}, \vec{j}' = 2\vec{i} + \vec{j},$$

$$3.7. \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, O'(-2,2,0), \vec{i}' = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{j}' = \vec{j} + \vec{k}, \vec{k}' = -3\vec{i} +$$

$+4\vec{j} - \vec{k}$ .

## 2.5. Проективные преобразования

Математические модели проективных преобразований, как и линейных и аффинных преобразований трёхмерного пространства, описываются квадрат-

ными матрицами порядка 3 или 4. В общем случае любое проективное преобразование можно представить в виде композиции следующих преобразований:

- переход от объектной системы координат к мировой,
- проективные преобразования,
- ортографическое проектирование на фронтальную ( $f = Oxy$ ), горизонтальную ( $h = Ozx$ ) либо профильную ( $p = Oyz$ ) плоскость мировой системы координат.

Таким образом, матрица проективного преобразования представима в виде произведения матриц перечисленных выше преобразований:

$$F = F_{\text{орт}} F_{\text{иск}} S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}} \in \mathbb{R}_{4,4}.$$

Матрица  $S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}}$  перехода от мировой системы координат к объектной в самом общем случае описывается матрицей перехода от одной декартовой системы координат аффинного пространства к другой:

$$S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}} = \left( \begin{array}{ccc|c} S_{E \rightarrow E'} & & & O'_{\text{МСК}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}_{4,4},$$

где  $S_{E \rightarrow E'} \in \mathbb{R}_{3,3}$  – матрица перехода от системы базисных векторов МСК к системе базисных векторов ОСК,  $O'_{\text{МСК}} \in \mathbb{R}_{3,1}$  – координатный столбец начала координат ОСК, записанный в МСК. Если в некоторой задаче рассматривается только один объект и, соответственно, только одна ОСК, то обычно начала координат МСК и ОСК совпадают, и тогда  $O'_{\text{МСК}} = (0, 0, 0)^T$ .

Матрицы преобразований  $F_{\text{иск}}$  в зависимости от проективной плоскости ( $f$ ,  $h$  и  $p$  соответственно) представимы в следующем виде:

$$F_{\text{иск}f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -H/s_z & 1 \end{pmatrix}, F_{\text{иск}h} = \begin{pmatrix} 1 & -s_x/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s_z/s_y & 1 & 0 \\ 0 & -H/s_y & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_{\text{иск}p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s_y/s_x & 1 & 0 & 0 \\ -s_z/s_x & 0 & 1 & 0 \\ -H/s_x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где параметр  $H$  равен 0, если наблюдатель находится настолько далеко от наблюдаемой сцены или объекта, что его можно считать бесконечно удалённым (параллельное проектирование), либо 1, если наблюдатель находится достаточно близко (центральное проектирование);  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$  – это либо вектор, вдоль которого осуществляется параллельное проектирование на нужную плоскость, либо радиус-вектор точки наблюдения (при центральном проектировании). Предысказание, в свою очередь, также представимо в виде композиции двух преобразований:

$$F_{\text{искф}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -H/s_z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -H/s_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Правый множитель соответствует аффинному преобразованию, представляющему собой снос пространства параллельно проективной плоскости (для формулы (2.4) это фронтальная плоскость  $Oxy$ ), переводящий орт оси, перпендикулярной проективной плоскости (здесь это вектор  $\vec{k}$ ) в вектор с координатами  $(-s_x/s_z, -s_y/s_z, 1)$ . Левый множитель при бесконечно удалённом наблюдателе равен единичной матрице, что соответствует тождественному преобразованию. При ближнем же наблюдателе эта матрица соответствует преобразованию, называемому перспективным масштабированием и переводящим точку наблюдения в бесконечность (точнее, её аппликата становится бесконечной), а произвольная точка  $a(a_x, a_y, a_z)$  сдвигается вдоль своего радиус-вектора на коэффициент  $\left(1 - \frac{a_z}{s_z}\right)^{-1}$ . При этом всякая точка с аппликатой  $s_z$  также переводится в бесконечность.

Наконец, матрицы ортографического проектирования в зависимости от проективной плоскости выглядят следующим образом:

$$F_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всякое проективное преобразование пространства является вырожденным (образом является проективная плоскость, а не всё простран-

ство), является аффинным при бесконечно далёком наблюдателе и не является аффинным при ближнем наблюдателе.

### 2.5.1. Аксонометрическое проектирование

**Аксонометрическая проекция** получается путём ортографического проектирования того или иного объекта на плоскость  $f$ ,  $h$  или  $p$  мировой системы координат. По заданной матрице перехода  $S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}}$  можно записать, например, матрицу аксонометрического фронтального проектирования:

$$\tilde{\Phi}_{\text{акс}f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}}.$$

Обычно при построении аксонометрической проекции выбираются МСК и ОСК с общим началом координат, поэтому часто удобно рассматривать матрицы не аффинных, а линейных преобразований:

$$\Phi_{\text{акс}f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S_{E \rightarrow E'}.$$

При моделировании аксонометрического фронтального проектирования в качестве матрицы перехода  $S_{E \rightarrow E'}$  от базиса МСК к базису ОСК обычно выбирают матрицу ортогонального преобразования, заключающегося в поочерёдном повороте пространства вокруг осей  $Oy$ ,  $Ox$  и  $Oz$  мировой системы координат:

$$S_{E \rightarrow E'} = \Phi_z(\gamma)\Phi_x(\alpha)\Phi_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы поворота соответственно вокруг осей  $Ox, Oy, Oz$  против часовой стрелки.

Тогда матрица аксонометрического фронтального проектирования выглядит следующим образом:

$$\Phi_{\text{аксф}} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.1.** Построить аксонометрическую фронтальную проекцию тетраэдра с вершинами, имеющими координаты ОСК, равные  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  и  $C(0, 0, 1)$ , если ОСК получается из МСК путём поворота на углы  $\beta = \pi/4$ ,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\gamma = \pi/6$ .

Найдём проекции точек с заданными координатами в виде матрицы из их координатных столбцов:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi_z \left( \frac{\pi}{6} \right) \Phi_x \left( \frac{\pi}{3} \right) \Phi_y \left( \frac{\pi}{4} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \times \quad (2.5) \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6}/8 & -1/4 & 3\sqrt{6}/8 \\ 0 & 5\sqrt{2}/8 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{2}/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Значит, получатся точки, имеющие в системе координат фронтальной плоскости  $Oxy$  координаты  $(0, 0)$ ,  $\left( \frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{5\sqrt{2}}{8} \right)$ ,  $\left( -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$  и  $\left( \frac{3\sqrt{6}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{8} \right)$

(Рисунок 2.19). Легко видеть, что через эти точки будут проходить проекции осей объектной системы координат  $Ox', Oy'$  и  $Oz'$ .

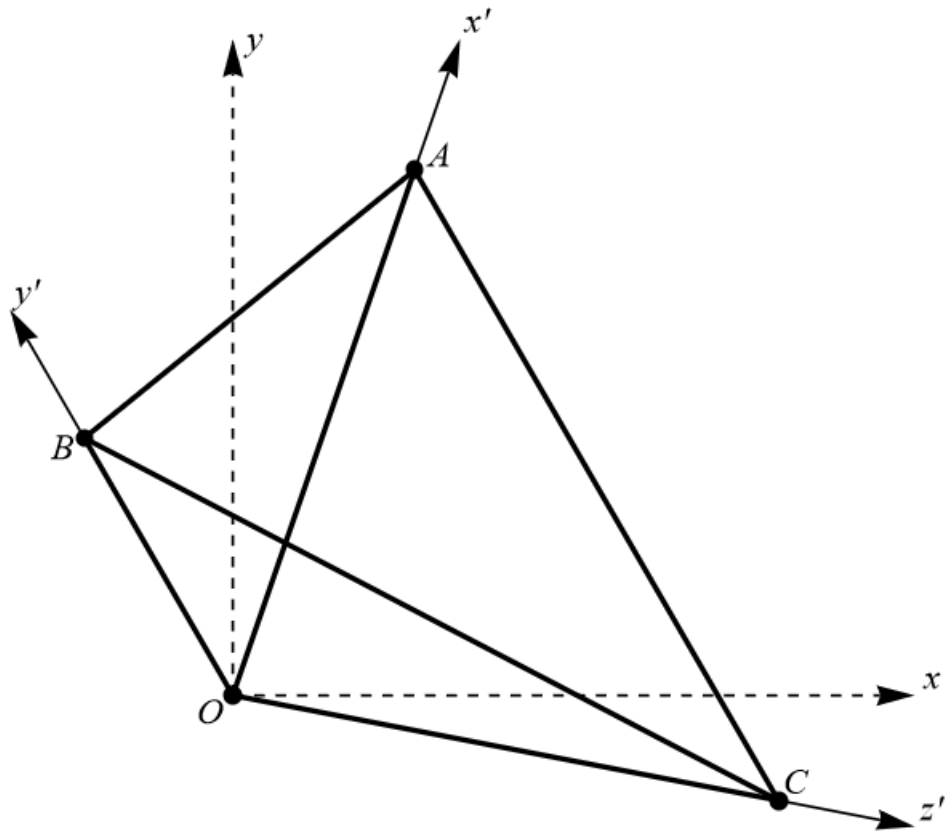


Рисунок 2.19 – Аксонометрическая проекция каркасного тетраэдра

Выясним, какие грани тетраэдра окажутся видимыми для наблюдателя при таком проектировании. Для этого вычислим **глубину** каждой из вершин тетраэдра. Под **глубиной** точки в компьютерной графике понимается величина, характеризующая степень удалённости точки от наблюдателя. При параллельном проектировании для вычисления глубины  $d_M$  точки  $M$  используется следующая формула:

$$d_M = -\overline{OM} \cdot \vec{s}, \quad (2.6)$$

где  $O$  – начало координат<sup>1</sup>,  $\vec{s}$  – вектор направления на дальнего наблюдателя. При аксонометрическом проектировании вектор  $\vec{s}$  вычисляется по следующей формуле:

$$S = \Phi_{\text{пов}}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Либо любая другая точка. Часто используется именно начало координат для упрощения вычислений.



где  $S$  – координатный столбец вектора  $\vec{s}$  в ОСК,  $\Phi_{\text{пов}} = \Phi_z(\gamma)\Phi_x(\alpha)\Phi_y(\beta)$  – матрица композиции поворотов, переводящих мировую систему координат в объектную. Формула (2.7) фактически означает, что в матрице  $\Phi_{\text{пов}}$  нужно взять третью строку. Согласно вычислениям (2.5), она равна  $\begin{pmatrix} \sqrt{6}/8 & -1/4 & 3\sqrt{6}/8 \\ 5\sqrt{2}/8 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{2}/8 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$ , значит, вектор направления на дальнего наблюдателя имеет координаты  $\vec{s}(-\sqrt{2}/4, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/4)$ .

Теперь можно воспользоваться формулой (2.6):

$$d_o = 0,$$

$$d_A = -(1,0,0) \cdot \left(-\sqrt{2}/4, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/4\right)^T = \sqrt{2}/4,$$

$$d_B = -(0,1,0) \cdot \left(-\sqrt{2}/4, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/4\right)^T = -\sqrt{3}/2,$$

$$d_C = -(0,0,1) \cdot \left(-\sqrt{2}/4, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/4\right)^T = -\sqrt{2}/4.$$

Отсюда видно, что наименьшей глубиной обладают три вершины:  $B$ ,  $C$  и  $O$ , а следовательно, грань  $BCO$  является видимой, так как её ничто не загораживает. Видимой является также грань  $ABC$  (Рисунок 2.20).

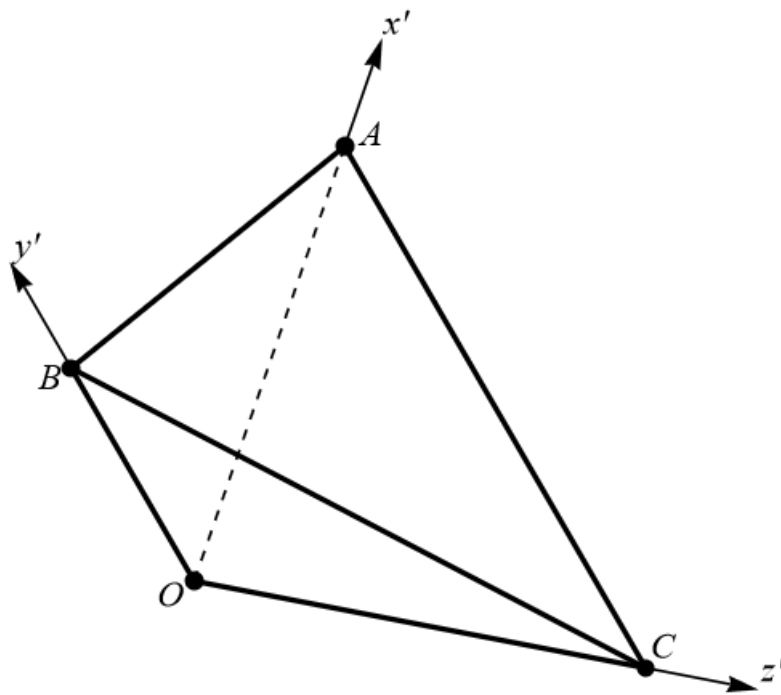


Рисунок 2.20 – Аксонометрическая проекция тетраэдра с непрозрачными гранями

**Пример 5.2.** Построить аксонометрическую фронтальную проекцию тетраэдра с вершинами, имеющими координаты ОСК, равные  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ , по известному отношению между масштабными коэффициентами осевых искажений:  $m_x : m_y : m_z = 2 : 1 : 2$ .

Вначале найдём точные значения длин проекций  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ , пользуясь тем, что сумма их квадратов должна равняться 2:

$$\begin{aligned} m_x &= 2c, m_y = c, m_z = 2c, \\ m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 &= 9c^2 = 2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{3}, \\ m_x &= \frac{2\sqrt{2}}{3}, m_y = \frac{\sqrt{2}}{3}, m_z = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

По полученным значениям можно определить углы  $\delta_y$  поворота от исходной оси  $Oy$  мировой системы координат к проекции  $Oy'$  соответственной оси ОСК,  $\delta_{yx}$  поворота от проекции  $Oy'$  к проекции  $Ox'$ ,  $\delta_{yz}$  поворота от проекции  $Oy'$  к проекции  $Oz'$ . Это осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \alpha_x m_y, \sin \alpha = \alpha_y \sqrt{1 - m_y^2}, \\ \cos \beta &= \beta_x \frac{\sqrt{1 - m_z^2}}{m_y}, \sin \beta = \beta_y \frac{\sqrt{1 - m_x^2}}{m_y}, \\ \delta_y &= (\alpha_x - 1) \frac{\pi}{2} + \gamma, \\ \delta_{yx} &= -\alpha_x \beta_x \arccos \frac{\alpha_x \alpha_y \beta_y \sqrt{1 - m_x^2} \sqrt{1 - m_y^2}}{m_x m_y}, \\ \delta_{yz} &= -\alpha_x \beta_y \arccos \frac{-\alpha_x \alpha_y \beta_x \sqrt{1 - m_z^2} \sqrt{1 - m_y^2}}{m_z m_y}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y \in \{-1, 1\}$ ,  $\gamma \in (-\pi, +\pi]$  можно выбирать произвольно. Положим  $\gamma = 0$ ,  $\alpha_x = \alpha_y = \beta_x = 1$ ,  $\beta_y = -1$ . Тогда по этим формулам получаем углы  $\delta_y = 0$ ,  $\delta_{yx} = -\arccos \frac{-\sqrt{7}}{4} \approx -131.41^\circ$ ,  $\delta_{yz} = \arccos \frac{-\sqrt{7}}{4} \approx 131.41^\circ$ . Откладывая проекции осей согласно полученным данным и отмечая на них проекции единичных отрезков с длинами, отношение которых равно исходному заданному отношению

2:1:2, получим искомую аксонометрическую проекцию (Рисунок 2.21). Определить видимость рёбер и граней можно аналогично предыдущему примеру.

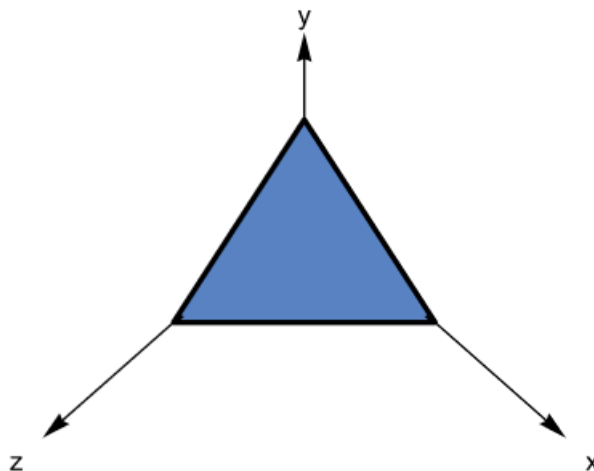


Рисунок 2.21 – Диметрическая проекция тетраэдра

## 2.5.2. Косоугольное проектирование

**Косоугольная проекция** получается при параллельном проектировании точек пространства вдоль заданного вектора  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$  на плоскость  $f$ ,  $h$  или  $p$ .

Матрица косоугольного фронтального проектирования равна

$$\tilde{\Phi}_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x / s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y / s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S_{\text{МСК} \rightarrow \text{ОСК}}.$$

Обычно МСК и ОСК при косоугольном проектировании выбираются одинаковыми, поэтому удобно рассматривать матрицу соответствующего линейного преобразования:

$$\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x / s_z \\ 0 & 1 & -s_y / s_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Аналогичным образом выводятся формулы для косоугольного горизонтального и косоугольного профильного проектирования:

$$\Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -s_x/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_z/s_y & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -s_y/s_x & 1 & 0 \\ -s_z/s_x & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

**Пример 5.3.** Построить матрицы косоугольного проектирования на фронтальную, горизонтальную и профильную плоскости МСК при наблюдении, характеризующемся вектором  $\vec{s}(3,4,-5)$ , а также проекции тетраэдра из примера 5.1.

По формулам (2.8) и (2.9) получаются следующие матрицы косоугольного проектирования:

$$\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/4 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & 0 \\ 5/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перед рисованием искомых проекций следует отметить порядок рисования проекций осей. Так, при наблюдении фронтальной / горизонтальной / профильной плоскости соответственно спереди / сверху / справа (что имеет место в случае, когда аппликата / ордината / абсцисса вектора  $\vec{s}$  положительна) начало координат с осями, лежащими на проективной плоскости, остаются неизменными, при этом системы координат  $Oxy$  /  $Ozx$  /  $Oyz$  будут правыми. Рисуются они обычно так, как показано на рисунке 2.22а.

Если же проективная плоскость наблюдается с другой стороны, о чём свидетельствует отрицательный знак у соответствующей компоненты вектора  $\vec{s}$ , то тогда соответствующая система координат становится левой. Проекция в этом случае рисуются, как на рисунке 2.22б.

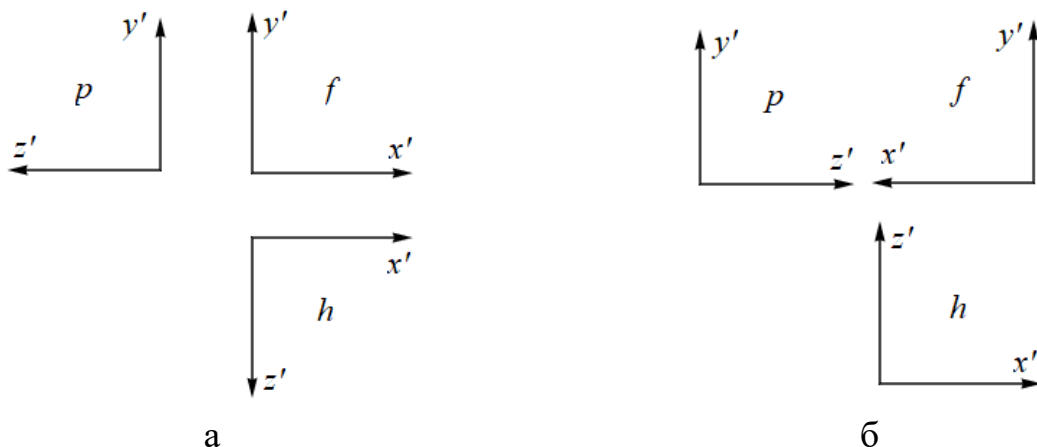


Рисунок 2.22 – Изображение неискажённых осей при косоугольном проектировании: а – при наблюдении «лицевых» сторон проективных плоскостей, б – при их наблюдении с другой стороны

В данном примере координаты  $s_x$  и  $s_y$  положительны, а  $s_z$  – отрицательная, и тогда оси  $Oy$ ,  $Oz$  и  $Oz$ ,  $Ox$  соответственно профильной и горизонтальной проекций рисуются, как на рисунке 2.22а, а оси  $Ox$  и  $Oy$  на фронтальной проекции рисуются, как на рисунке 2.22б. Третья ось проводится вдоль вектора с координатным столбцом, отличным от столбца единичной матрицы (в нашем примере это векторы  $(3/5, 4/5)$ ,  $(-3/4, 5/4)$ ,  $(-4/3, 5/3)$  соответственно для плоскостей  $f$ ,  $h$  и  $p$ , рисунок 2.23).

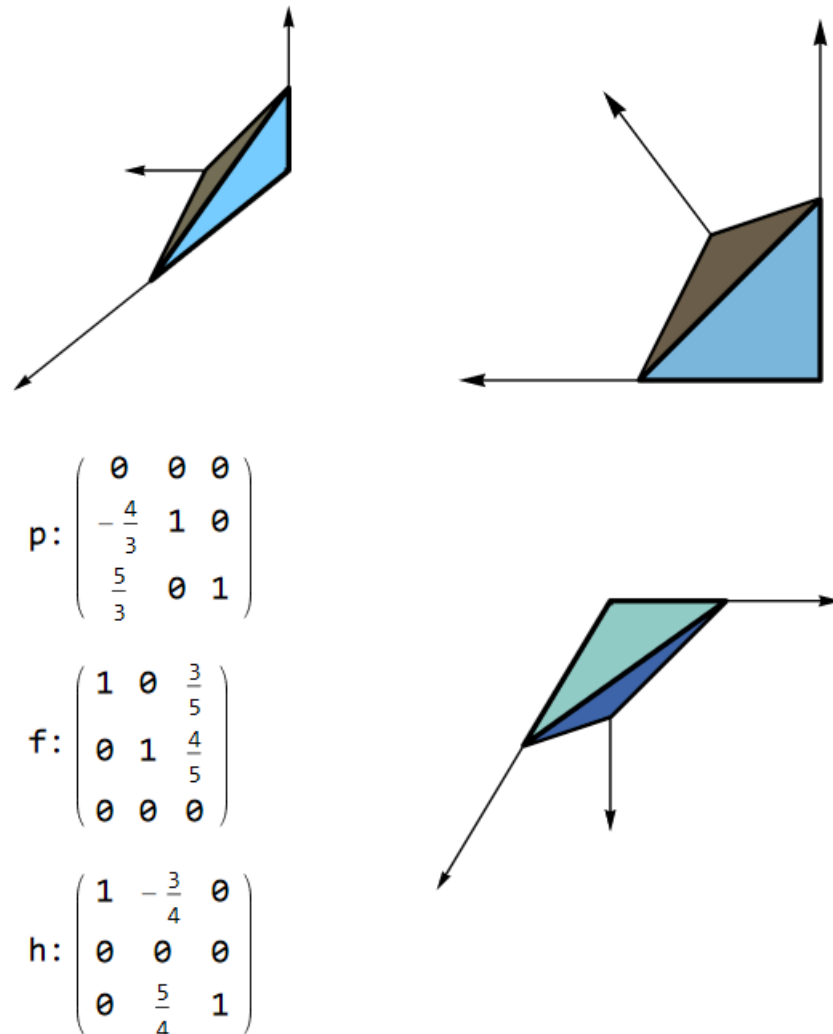


Рисунок 2.23 – Профильная, фронтальная и горизонтальная косоугольные проекции тетраэдра, а также матрицы трёх преобразований

### 2.5.3. Центральное проектирование

**Центральная проекция** определяется вектором  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$ , который является радиус-вектором точки наблюдения, или **проектора**. При центральном

проектировании МСК и ОСК обычно совпадают. В этом случае матрицы центральных проекций на разные плоскости равны

$$\begin{aligned}
 F_{wf} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/s_z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/s_z & 1 \end{pmatrix}, \\
 F_{wh} &= \begin{pmatrix} 1 & -s_x/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_z/s_y & 1 & 0 \\ 0 & -1/s_y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 F_{wp} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_y/s_x & 1 & 0 & 0 \\ -s_z/s_x & 0 & 1 & 0 \\ -1/s_x & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Как видно из этих формул, вычисления проводятся уже в однородных координатах. Всякой точке пространства  $a(a_x, a_y, a_z)$  можно поставить в соответствие столбец  $(a_x, a_y, a_z, 1)^T$ , называемый **координатным столбцом точки  $a$  в однородных координатах**. Всякий столбец, полученный из него путём домножения на любой отличный от нуля множитель, также является координатным столбцом этой же точки в однородных координатах. После применения преобразования, задаваемого одной из матриц (2.10), к точке с координатами  $(a_x, a_y, a_z, 1)^T$  получится координатный столбец  $(\omega a'_x, \omega a'_y, \omega a'_z, \omega)^T$ , где  $\omega$  может принимать, вообще говоря, любое значение.

В зависимости от расположения точки относительно проектора могут возникнуть три ситуации:

- Точка находится ближе к проективной плоскости (или по другую сторону от неё), чем проектор. Тогда в результате получится точка с однородными координатами  $(\omega a'_x, \omega a'_y, \omega a'_z, \omega)^T$ , где  $\omega > 0$ , – **действительная проекция** точки  $a$ . Сокращая столбец на  $\omega$ , получим координатный столбец в однородных координатах  $(a'_x, a'_y, a'_z, 1)^T$  и просто координатный столбец  $(a'_x, a'_y, a'_z)^T$ .
- Если точка находится от проективной плоскости дальше, чем проектор, и по ту же сторону от неё, то в результирующем координатном столбце  $(\omega a'_x, \omega a'_y, \omega a'_z, \omega)^T$  последняя координата будет меньше нуля –

получится **мнимая проекция**. Сокращая полученный координатный столбец на  $\omega$ , получим точку мнимой проекции, которая обычно не отмечается при построении центральных проекций.

- Если точка находится на таком же расстоянии от проективной плоскости, что и проектор, и по ту же сторону от неё, то получится столбец  $(a'_x, a'_y, a'_z, 0)^T$ , свидетельствующий о том, что точка не имеет центральной проекции на нужную плоскость (иногда говорят о **вырожденной проекции**).

**Пример 5.4.** Построить центральную проекцию на фронтальную плоскость тетраэдра, вершины которого имеют координаты  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(5, 1, 2)$ ,  $C(4, 5, 1)$ ,  $D(2, 3, 6)$ . Проектор расположен в точке  $S(1, 3, 4)$ .

Вначале по формуле (2.10) вычислим матрицу фронтального центрального проектирования  $F_{\text{иф}}$  :

$$F_{\text{иф}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s_x/s_z & 0 \\ 0 & 1 & -s_y/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/s_z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

После чего определим проекции вершин  $A, B, C, D$ , для чего используем матрицу из координатных столбцов в однородных координатах этих точек:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 9/2 & 15/4 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 17/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

По элементам последней строки можно судить о типах проекций вершин: в первых трёх столбцах получились положительные числа, значит, точки  $A, B$  и  $C$  имеют действительные проекции; в четвёртом же столбце стоит отрицательное число – проекция вершины  $D$  является мнимой. Для перехода от однородных координат к декартовым необходимо каждый столбец матрицы (2.11) домножить на число, обратное последнему элементу этого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 9/2 & 15/4 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 17/4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 17/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, проекции вершин имеют координаты  $A'(1, -1, 0)$ ,  $B'(9, -1, 0)$ ,  $C'(5, 17/3, 0)$ ,  $D'(-1, 3, 0)$ . С учётом типов этих проекций далее имеем, что рёбра  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  проектируются в отрезки  $A'B'$ ,  $A'C'$  и  $B'C'$ , а рёбра  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  – в лучи с началами в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  и направляющими векторами  $\overrightarrow{D'A'}$ ,  $\overrightarrow{D'B'}$  и  $\overrightarrow{D'C'}$  (Рисунок 2.24).

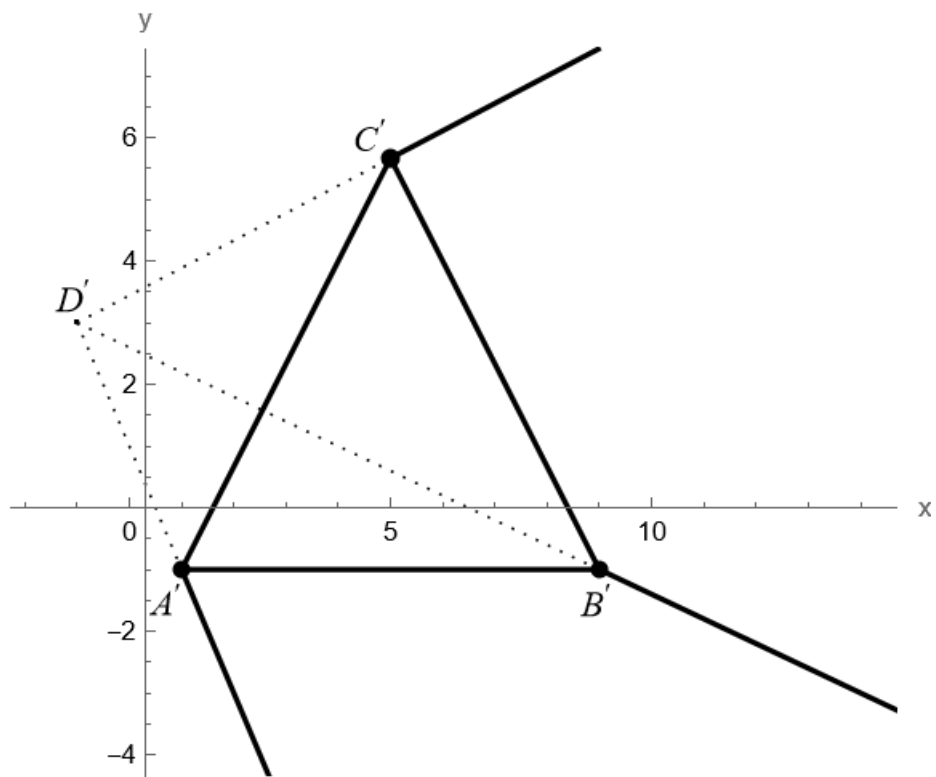


Рисунок 2.24 – Центральная проекция каркасного тетраэдра

Рассмотрим теперь вопрос видимости граней этого тетраэдра. При центральном проектировании можно воспользоваться следующим критерием. Пусть  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали некоторой грани выпуклого полиэдра,  $M$  – произвольная точка этой же грани. Результат зависит от скалярного произведения  $\overrightarrow{MS} \cdot \vec{n}$ :

- $\overrightarrow{MS} \cdot \vec{n} > 0 \Leftrightarrow$  грань является видимой, или лицевой,
- $\overrightarrow{MS} \cdot \vec{n} < 0 \Leftrightarrow$  грань не является видимой,
- $\overrightarrow{MS} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow$  проекция грани вырождается в отрезок.

Например, найдём вначале вектор внешней нормали для грани  $ABC$ :



$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 15\vec{k}.$$

Несложно видеть, однако, что этот вектор является вектором внутренней нормали, т.е. будучи отложенным от грани  $ABC$ , он будет направлен внутрь тетраэдра. Это следует из того, что скалярное произведение вектора  $\vec{n}_1$ , например, на вектор  $\overrightarrow{AD}$  даёт  $5 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 15 \cdot 3 = 55$  – положительное число, а значит, оба вектора направлены в одну, внутреннюю сторону от грани  $ABC$ . Итак, вектором внешней нормали является вектор  $-\vec{n}_1$ , и тогда можно вычислить, например, следующее произведение:

$$-\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AS} = -5 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - 15 \cdot 1 < 0.$$

Таким образом, грань  $ABC$  является невидимой для ближнего наблюдателя в точке  $S$ . При помощи аналогических вычислений в итоге имеем, что грани  $ABD$  и  $BCD$  также невидимы, а грань  $ACD$  является лицевой. На рисунке 2.25 жирным изображены видимые линии, пунктиром – невидимые, точечным пунктиром – воображаемые.

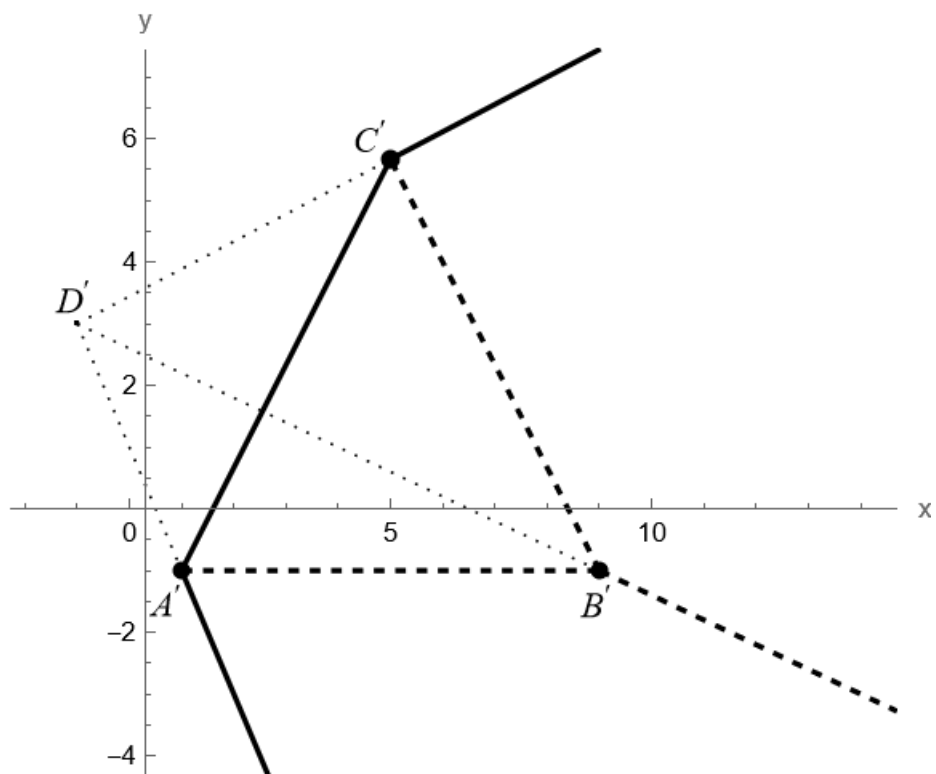


Рисунок 2.25 – Центральная проекция тетраэдра с непрозрачными гранями

Замечание. Если бы в матрице (2.11) в каком-либо столбце в последней строке оказался бы ноль, то это означает, что соответствующая вершина имеет вырожденную проекцию. При этом всякое ребро с концом в этой вершине проектируется в луч с направляющим вектором, координаты которого получаются из первых трёх чисел соответствующего столбца матрицы. Например, добавляя точку  $E(6, 6, 4)$  и проводя рёбра  $BE$ ,  $CE$  и  $DE$ , проделаем следующие вычисления:

$$F_{\text{цф}} \tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последний элемент этого столбца равен 0, значит, точка  $E$  имеет вырожденную проекцию. У ребра  $DE$ , один конец которого имеет мнимую проекцию, другой – вырожденную, проекция не рисуется. Рёбра  $BE$  и  $CE$  проектируются в лучи  $B'E_1$  и  $C'E_2$  с направляющим вектором, координаты которого берутся из столбца  $F_{\text{цф}} \tilde{E}$  и равны  $\overline{SE}(5,3,0)$  (Рисунок 2.26).

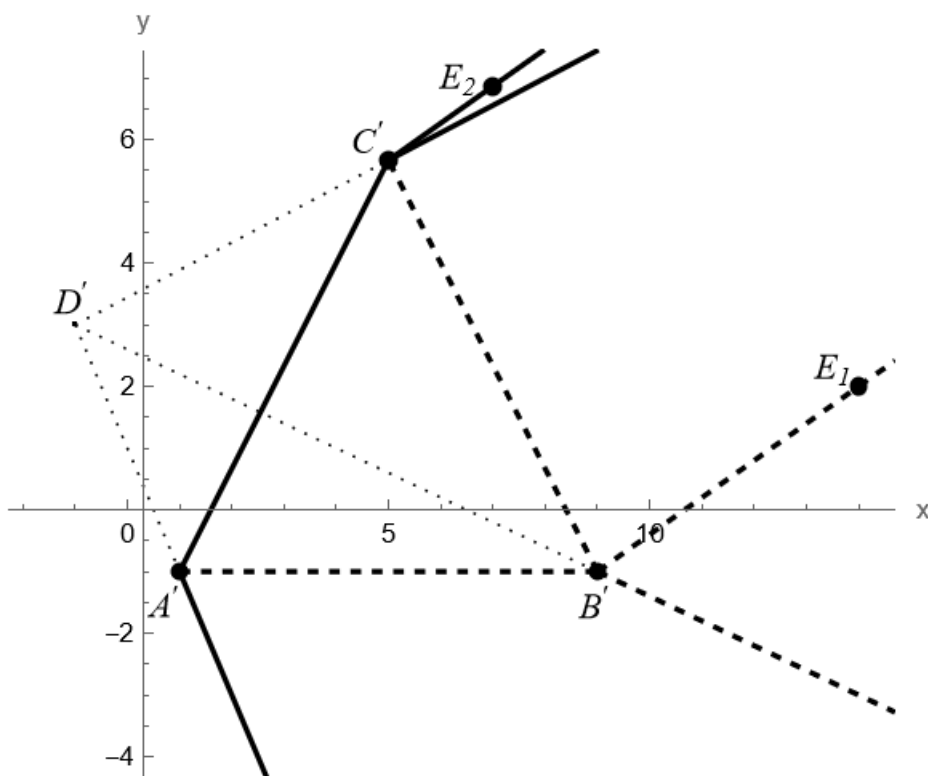


Рисунок 2.26 – Центральная проекция полиэдра  $ABCDE$  с непрозрачными гранями

**Пример 5.5.** Построить центральную проекцию с проектором в точке  $S(5, 4, 4)$  отрезка  $AB$  с концами в точках  $A(6, 3, 7)$  и  $B(3, 5, 1)$  на поверхность, составленную из полуплоскостей  $f_+ = \{(x, y, z) | z = 0 \wedge x \geq 0\}$ ,  $p_+ = \{(x, y, z) | x = 0 \wedge z \geq 0\}$ .

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

**Способ 1** заключается в построении проекций данного отрезка на плоскости  $f$  и  $p$  и последующего отсечения этих проекций осью  $Oy$ . В нашем примере матрицы соответствующих преобразований равны

$$F_{\text{wf}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}, F_{\text{wp}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим эти преобразования к точкам  $A$  и  $B$ :

$$F_{\text{wf}} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/4 & 7/4 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \\ -3/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Судя по последним координатам полученных столбцов, точка  $A$  имеет мнимую проекцию на фронтальную плоскость, точка  $B$  – действительную. В случае, когда один из концов отрезка имеет **действительную**, а другой – **мнимую** проекцию, **проекция всего отрезка представляет собой луч** с началом в действительной проекции с направлением, совпадающим с вектором, проведённым от мнимой проекции к действительной<sup>1</sup>. В данном примере имеем луч с началом в точке с однородными координатами  $(7/4, 4, 0, 3/4) \sim (7/3, 16/3, 0, 1)$ , то есть в точке  $(7/3, 16/3, 0)$ , и направляющим вектором, равным

$$A'_f : \begin{pmatrix} -11/4 \\ -4 \\ 0 \\ -3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11/3 \\ 16/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

---

<sup>1</sup> При вырожденной проекции – с вектором, проведённым от проектора к точке, имеющей вырожденную проекцию

$$\overrightarrow{A'_f B'_f} = (7/3, 16/3, 0) - (11/3, 16/3, 0) = (-4/3, 0, 0).$$

Такой луч можно задать параметрически:

$$A'_f B'_f : \begin{cases} x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t, \\ y = \frac{16}{3}, \\ z = 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично поступаем для получения проекции на профильную плоскость:

$$F_{\text{цп}} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4/5 & 1 & 0 & 0 \\ -4/5 & 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9/5 & 13/5 \\ 11/5 & -7/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Опять для точки  $A$  получилась мнимая проекция, а для  $B$  – действительная. Уравнение искомой проекции:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9/5 & 13/5 \\ 11/5 & -7/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 13/2 \\ -11 & -7/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A'_p(0, 9, -11), B'_p(0, 13/2, -7/2),$$

$$A'_p B'_p : \begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{13}{2} - \frac{5}{2}t, \\ z = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2}t \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Для отсечения полученных проекций осью  $Oy$  составим неравенства:

$$f_+ : x \geq 0 \Rightarrow \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{7}{4},$$

$$p_+ : z \geq 0 \Rightarrow -\frac{7}{2} + \frac{15}{2}t \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{7}{15}.$$

Получили итоговые проекции в виде отрезка с концами в точках  $\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}t, \frac{16}{3}, 0\right) \Big|_{t \in \left\{0, \frac{7}{4}\right\}} = \left\{\left(\frac{7}{3}, \frac{16}{3}, 0\right), \left(0, \frac{16}{3}, 0\right)\right\}$  и луча с началом в точке  $\left(0, \frac{13}{2} - \frac{5}{2}t, -\frac{7}{2} + \frac{15}{2}t\right) \Big|_{t = \frac{7}{15}} = \left(0, \frac{16}{3}, 0\right)$  и направляющим вектором  $\left(0, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{2}\right)$  (Рисунок 2.27).

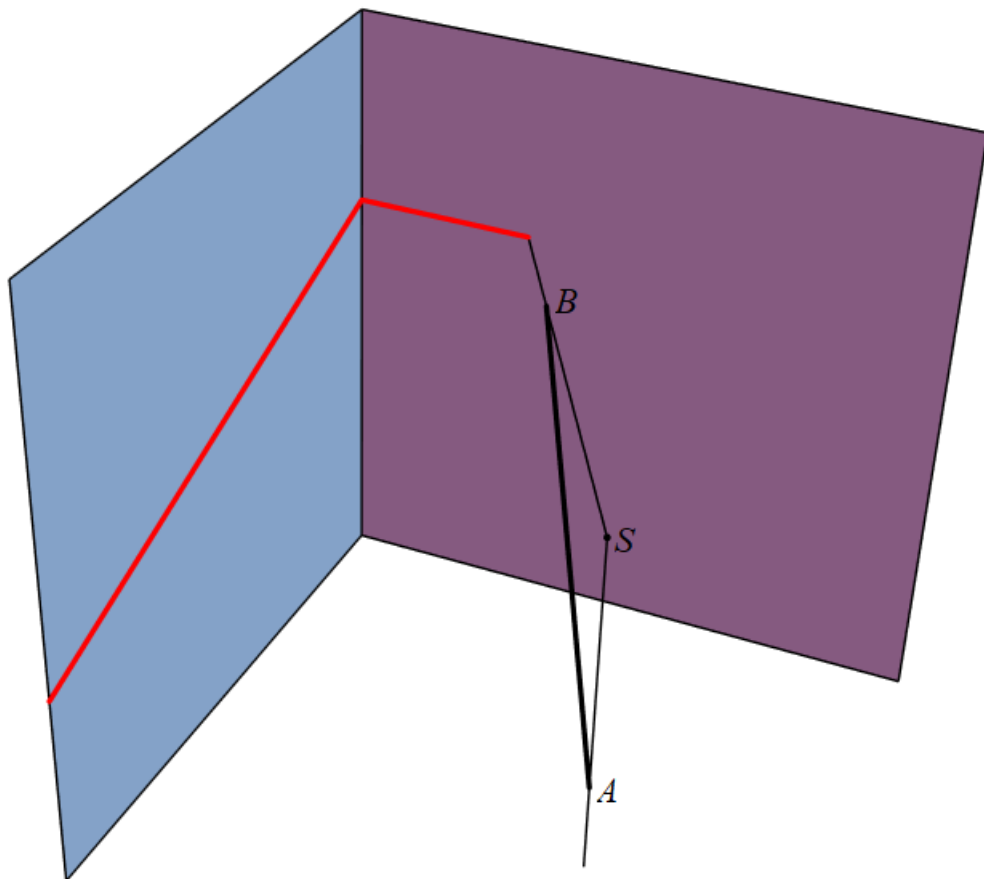


Рисунок 2.27 – Центральная проекция (красная линия) отрезка  $AB$  на составную поверхность

**Способ 2** заключается в разбиении исходного отрезка плоскостью, проходящей через точку  $S$  и ось  $Oy$  и последующим построением проекций одного (при отсутствии пересечения секущей плоскости и исходного отрезка) либо

двух отрезков (одного на фронтальную плоскость, другого – на профильную, рисунок 2.28).

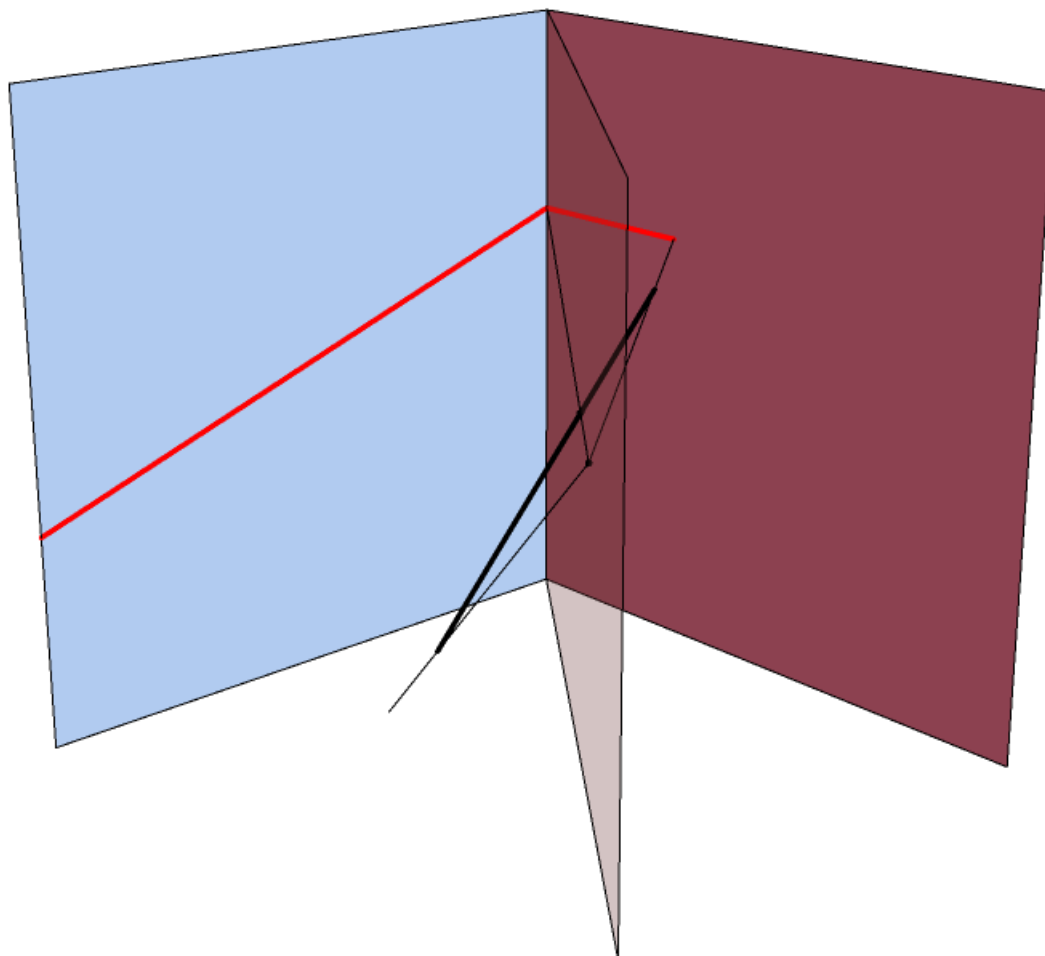


Рисунок 2.28 – Проведение секущей плоскости через ось  $Oy$  и проектор  $S$

В данном примере получается плоскость, проходящая через точку  $(5, 4, 4)$  параллельно направляющим векторам  $(0, 1, 0)$  и  $(5, 4, 4)$ . Значит, нормальный вектор равен  $(0, 1, 0) \times (5, 4, 4) = (4, 0, -5)$ , уравнение для проведённой плоскости выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 4(x - 0) - 5(z - 0) &= 0, \\ 4x - 5z &= 0. \end{aligned}$$

Определим, по какие стороны от этой плоскости расположены точки  $A$  и  $B$ , а также полуплоскости  $f_+$  и  $p_+$ :

$$\begin{aligned} A: 4 \cdot 6 - 5 \cdot 7 &= -11 < 0, \\ B: 4 \cdot 3 - 5 \cdot 1 &= 7 > 0, \\ f_+ \ni (1, 0, 0): 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0 &= 4 > 0, \end{aligned}$$

$$p_+ \ni (0,0,1): 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -5 < 0.$$

Значит, точки  $A$  и  $B$  находятся по разные стороны от секущей плоскости, и проекция отрезка  $AB$  располагается на обеих полуплоскостях. Если буквой  $C$  обозначить точку пересечения отрезка  $AB$  с секущей плоскостью, то получится, что отрезок  $AC$  проецируется на полуплоскость  $p_+$ , а отрезок  $CB$  – на полуплоскость  $f_+$  (так как точка  $A$  находится по одну сторону с  $p_+$ , а точка  $B$  – по одну сторону с  $f_+$  от секущей плоскости). Итак, найдём точку  $C$ :

$$AB: \begin{cases} x = 6 - 3t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 7 - 6t, \end{cases}$$

$$4(6 - 3t) - 5(7 - 6t) = 0,$$

$$-11 + 18t = 0,$$

$$t = \frac{11}{18},$$

$$C = (6 - 3t, 3 + 2t, 7 - 6t) \Big|_{t=\frac{11}{18}} = \left( \frac{25}{6}, \frac{38}{9}, \frac{10}{3} \right).$$

Фронтальная проекция отрезка  $CB$ :

$$F_{\pi_f}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/6 & 3 \\ 38/9 & 5 \\ 10/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/4 \\ 8/9 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1/6 & 3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 7/3 \\ 16/3 & 16/3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть имеем отрезок с концами в точках  $B'_f(7/3, 16/3, 0)$  и  $C'_f(0, 16/3, 0)$ . Отметим, что проекции точки  $C$  на плоскости  $f$  и  $p$  совпадают, а равно и их тип (действительная / мнимая / вырожденная проекция), так как точки пересечения луча  $SC$  (или прямой  $SC$ , если имел бы место случай с мнимой проекцией) с обеими плоскостями совпадают. Таким образом, сейчас для нахождения проекции отрезка  $AC$  на профильную плоскость достаточно рассчитать проекцию  $A'_p$ , которая, как выяснили при использовании способа 1, является мнимой и имеет координаты  $(0, 9, -11)$ . Проводя луч через точку  $C'_p = C'_f(0, 16/3, 0)$  по направлению  $\overrightarrow{A'_p C'_p}(0, -11/3, 11)$ , получим искомую профильную проекцию отрезка  $AC$ .

## 2.5.4. Задачи

1. Построить матрицу аксонометрического проектирования и проекции осей и тетраэдра с вершинами в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ , если известны углы поворотов, переводящих МСК в ОСК, вокруг осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , равные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно:

- 1.1.  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta = \pi/3$ ,  $\gamma = 0$ ,
- 1.2.  $\alpha = -\pi/6$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\gamma = 0$ ,
- 1.3.  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = -\pi/6$ ,  $\gamma = 0$ ,
- 1.4.  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = -\pi/3$ ,  $\gamma = 0$ ,
- 1.5.  $\alpha = -\pi/4$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $\gamma = 0$ ,
- 1.6.  $\alpha = -\pi/4$ ,  $\beta = -\pi/3$ ,  $\gamma = 0$ ,
- 1.7.  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta = 2\pi/3$ ,  $\gamma = \pi/6$ .

2. Построить аксонометрическую проекцию осей с тетраэдром с вершинами в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  по известному отношению масштабных коэффициентов осевых искажений  $m_x : m_y : m_z$ , а также принадлежности углов  $\alpha$  и  $\beta$  определённому квадранту (угол  $\gamma$  положить равным нулю):

- 2.1.  $m_x : m_y : m_z = 2 : 2 : 1$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{IV}$ ,
- 2.2.  $m_x : m_y : m_z = 2 : 2 : 1$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{I}$ ,
- 2.3.  $m_x : m_y : m_z = 2 : 2 : 1$ ,  $\alpha \in \text{III}$ ,  $\beta \in \text{II}$ ,
- 2.4.  $m_x : m_y : m_z = 1 : 3 : 3$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{IV}$ ,
- 2.5.  $m_x : m_y : m_z = 1 : 3 : 3$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{II}$ ,
- 2.6.  $m_x : m_y : m_z = 3 : 1 : 3$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{IV}$ ,
- 2.7.  $m_x : m_y : m_z = 3 : 3 : 2$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{II}$ ,
- 2.8.  $m_x : m_y : m_z = 1 : 2 : 3$ ,  $\alpha \in \text{I}$ ,  $\beta \in \text{I}$ .

3. Построить косоугольную проекцию осей и заданного объекта на фронтальную, горизонтальную, профильную плоскости, если задан вектор  $\vec{s}$  направления на дальнего наблюдателя.

3.1. Тетраэдр с вершинами в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $\vec{s}(3, 1, 2)$ ,

3.2. Тетраэдр с вершинами в точках  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $\vec{s}(4, -2, 1)$ ,

3.3. Тетраэдр с вершинами в точках  $A(3, -2, 1)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(1, 2, 1)$ ,  $D(-1, 1, 2)$ ,  $\vec{s}(4, 2, 3)$ ,



3.4. Тетраэдр с вершинами в точках  $A(-1, -2, -2)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(1, 2, 3)$ ,  $D(3, 3, 3)$ ,  $\vec{s}(1, 1, 2)$ ,

3.5. Пирамида с вершиной  $S(1, 5, 1)$  и основанием  $ABCD$ , вершины которого имеют координаты  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 0, 2)$ ,  $C(2, 0, 2)$ ,  $D(2, 0, 0)$ ;  $\vec{s}(1, 3, 2)$ ,

3.6. Куб с рёбрами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 0, 4)$ ,  $B(0, 5, 0)$ ,  $C(-4, 0, 3)$ ,  $\vec{s}(-2, 1, -1)$ .

4. Построить центральную проекцию заданного объекта на заданную плоскость, если известны координаты точки проектора  $S$ .

4.1. Тетраэдра с вершинами в точках  $A(-1, 3, 1)$ ,  $B(2, 0, 1)$ ,  $C(3, 3, 0)$ ,  $D(1, 0, 0)$  на фронтальную плоскость,  $S(-2, 4, 4)$ ,

4.2. Тетраэдра с вершинами в точках  $A(4, 1, 1)$ ,  $B(2, 0, 2)$ ,  $C(5, 4, 5)$ ,  $D(-1, 2, 7)$  на фронтальную плоскость,  $S(1, 2, 3)$ ,

4.3. Тетраэдра с вершинами в точках  $A(3, 2, 4)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(5, 3, 3)$ ,  $D(1, 0, 0)$  на профильную плоскость,  $S(3, 4, 1)$ ,

4.4. Тетраэдра с вершинами в точках  $A(5, 2, 1)$ ,  $B(3, 4, 2)$ ,  $C(1, 2, 3)$ ,  $D(0, 5, 3)$  на горизонтальную плоскость,  $S(4, 4, 3)$ ,

4.5. Тетраэдра с вершинами в точках  $A(3, 1, -2)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(-3, -1, 3)$ ,  $D(2, 3, 3)$  на горизонтальную плоскость,  $S(1, 4, 2)$ ,

4.6. Куба с рёбрами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  на фронтальную плоскость,  $S(3, 4, 2)$ ,

4.7. Куба с рёбрами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(0, 0, 2)$  на профильную плоскость,  $S(1, 0, 3)$ ,

4.8. Куба с рёбрами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(-1, 2, 2)$ ,  $B(2, -1, 2)$ ,  $C(2, 2, -1)$  на горизонтальную плоскость,  $S(1, 1, 3)$ .

5. Построить центральную проекцию отрезка  $AB$  с проектором в точке  $S$  на поверхность, состоящую из полуплоскостей  $\{(x, y, z)^T \mid z = 0 \wedge x \geq 0\} \subset f$  и  $\{(x, y, z)^T \mid x = 0 \wedge z \geq 0\} \subset p$ .

5.1.  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(1, 3, 2)$ ,  $S(3, 3, 3)$ ,

5.2.  $A(1, 3, 1)$ ,  $B(2, 5, 4)$ ,  $S(4, 4, 4)$ ,

5.3.  $A(1, 3, 4)$ ,  $B(6, 5, 2)$ ,  $S(2, 4, 3)$ ,

5.4.  $A(1, 5, 4)$ ,  $B(4, 3, 2)$ ,  $S(2, 2, 2)$ ,

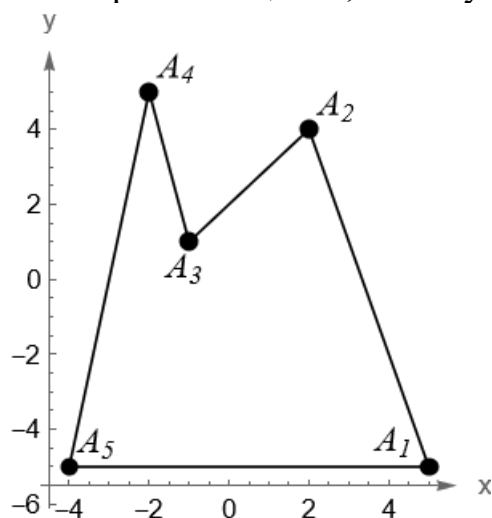
5.5.  $A(6, 4, 10)$ ,  $B(1, 5, 1)$ ,  $S(3, 4, 4)$ ,

5.6.  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(4, 1, 2)$ ,  $S(7, 0, 1)$ .

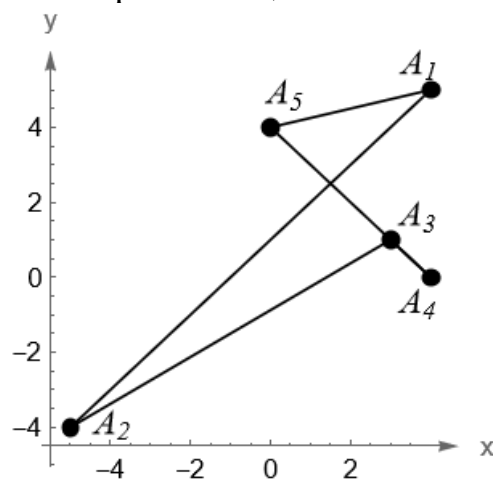
## 2.6. Ответы

### Ответы к задачам подраздела 2.2.3.

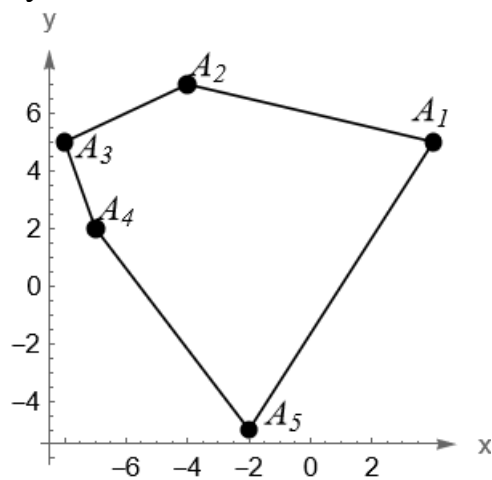
1. Самонепересекающийся, невыпуклый



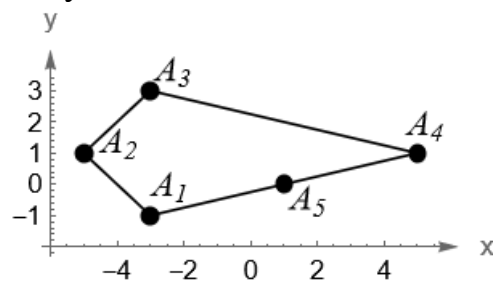
2. Самопересекающийся



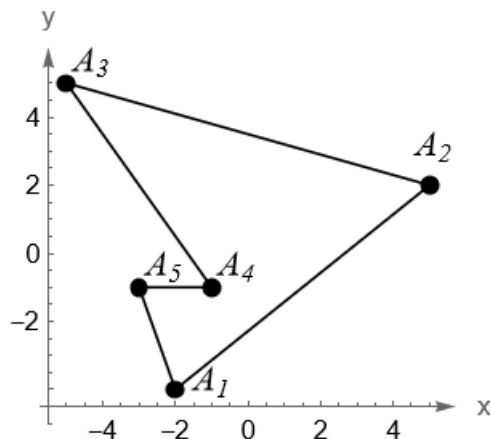
3. Выпуклый



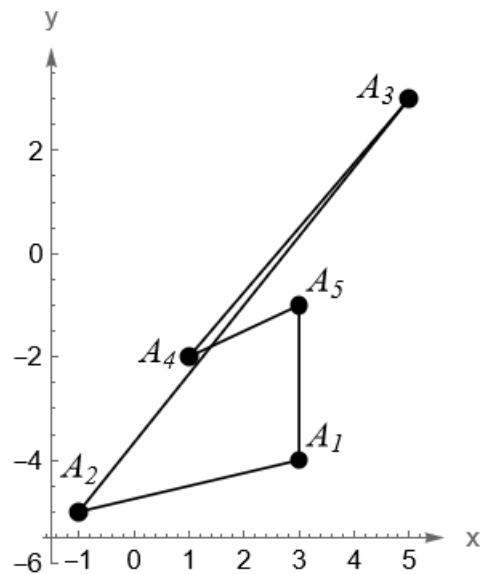
4. Выпуклый, неминимальный



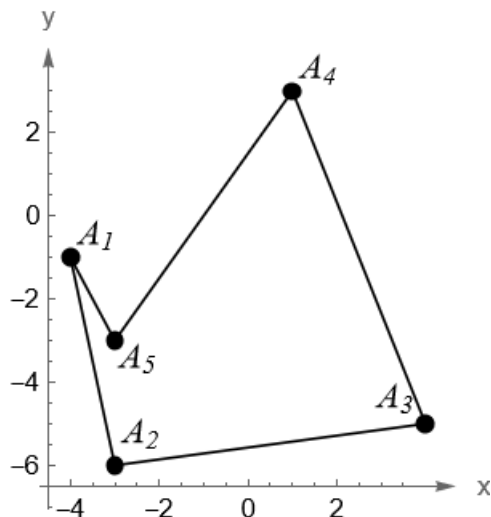
5. Самонепересекающийся, невыпуклый



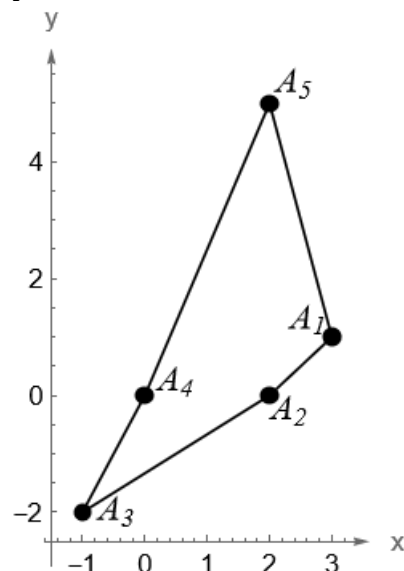
6. Самопересекающийся



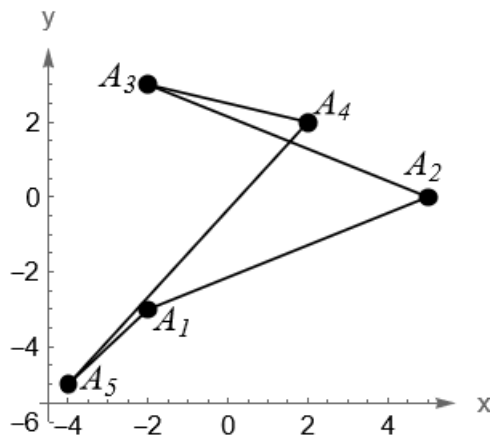
7. Самонепересекающийся, невыпуклый



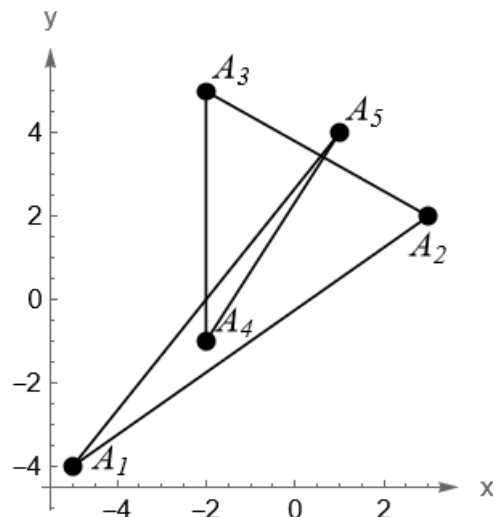
8. Самонепересекающийся, невыпуклый



9. Самопересекающийся

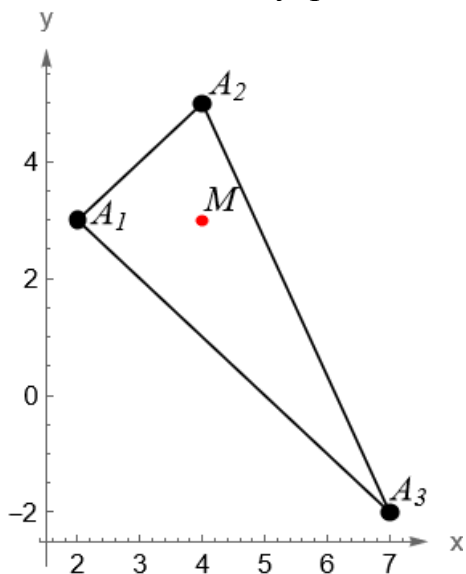


10. Самопересекающийся

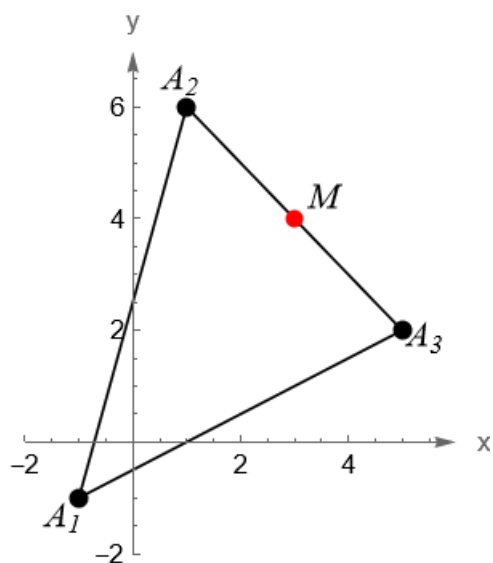


## Ответы к задачам подраздела 2.3.4.

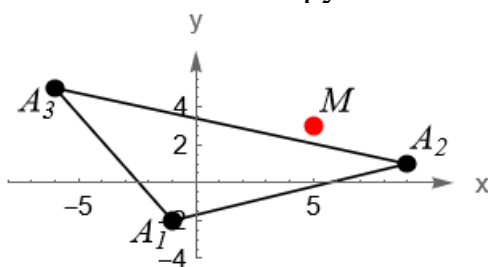
1.1. Точка  $M$  лежит внутри



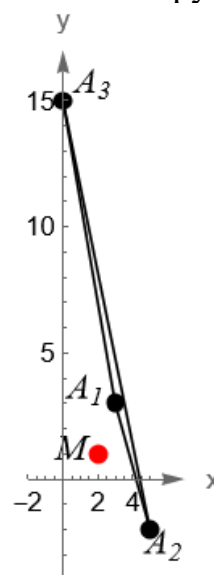
1.2. Точка  $M$  лежит на ребре  $A_2A_3$



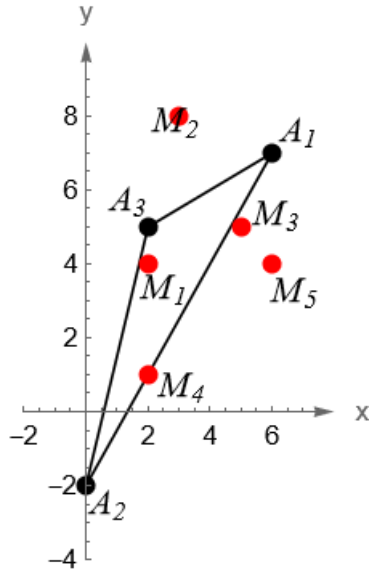
1.3. Точка  $M$  лежит снаружи



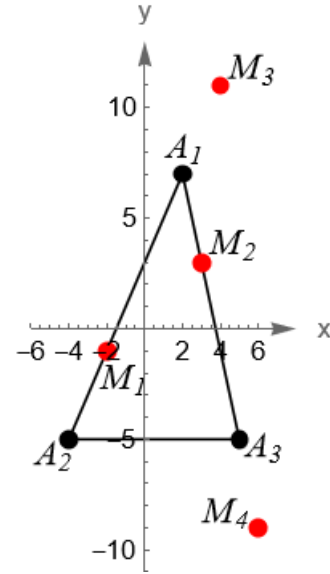
1.4. Точка  $M$  лежит снаружи



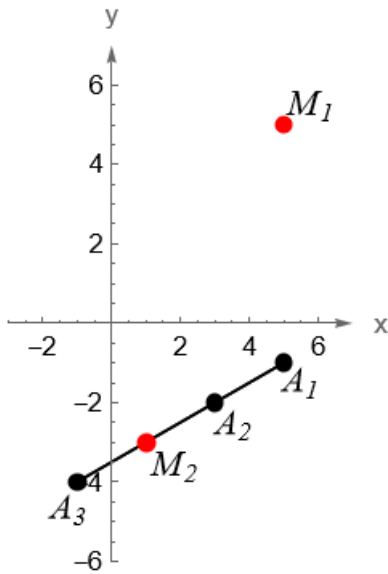
1.5. Точка  $M_1$  лежит внутри,  $M_2, M_3$  и  $M_5$  – снаружи, а  $M_4$  – на ребре  $A_1A_2$



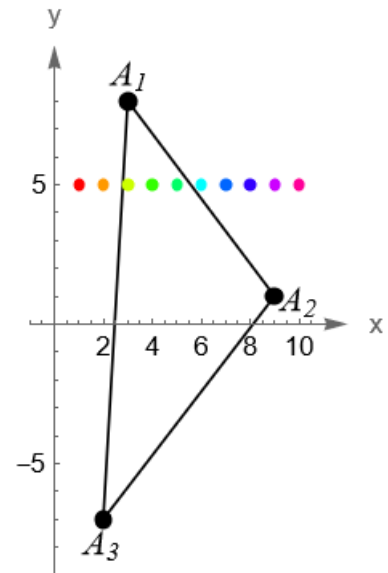
1.6. Точки  $M_3$  и  $M_4$  лежат снаружи, точка  $M_1$  – на ребре  $A_1A_2$ ,  $M_2$  – на ребре  $A_3A_1$



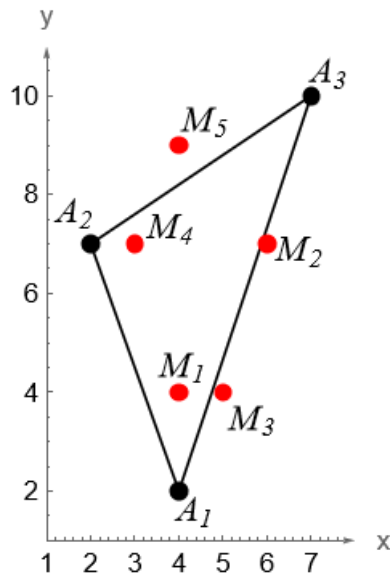
1.7. Треугольник  $A_1A_2A_3$  вырождается в отрезок  $A_3A_1$ , точка  $M_1$  не лежит на нём,  $M_2 \in A_2A_3$



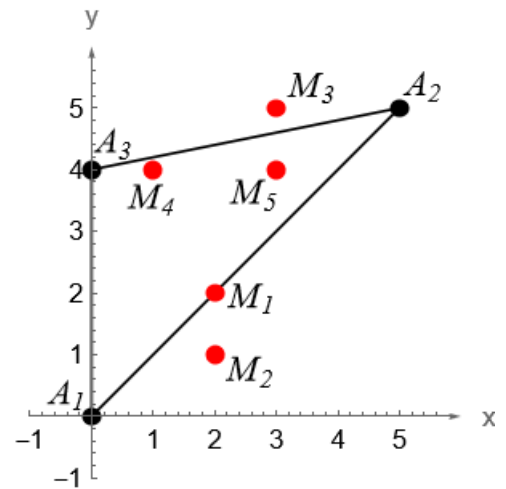
1.8. Точки  $M_1$  и  $M_2$  (красная и оранжевая) лежат снаружи,  $M_i, i = \overline{3,5}$  (жёлтая и две зелёных) – внутри,  $M_j, j = \overline{6,10}$  (бирюзовая, две синие, фиолетовая и тёмно-розовая) – снаружи



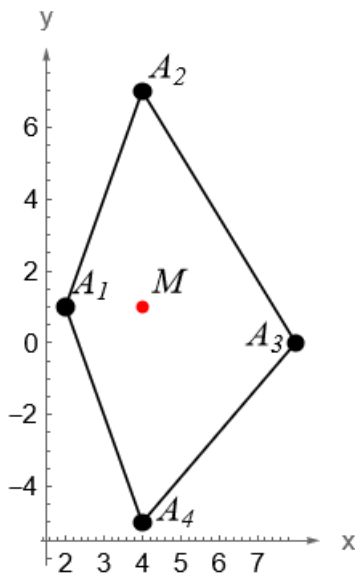
1.9. Точки  $M_1$  и  $M_4$  лежат внутри,  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_5$  – снаружи



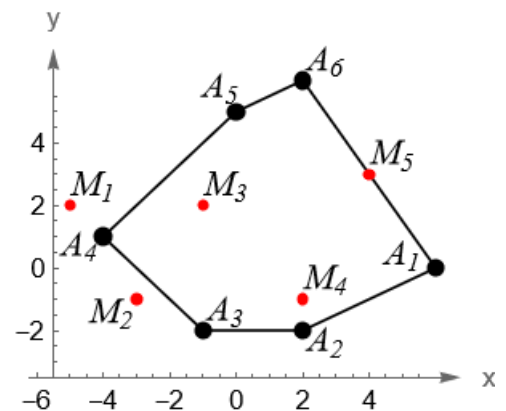
1.10. Точки  $M_4$  и  $M_5$  лежат внутри,  $M_2$  и  $M_3$  – снаружи,  $M_1$  – на ребре  $A_1A_2$



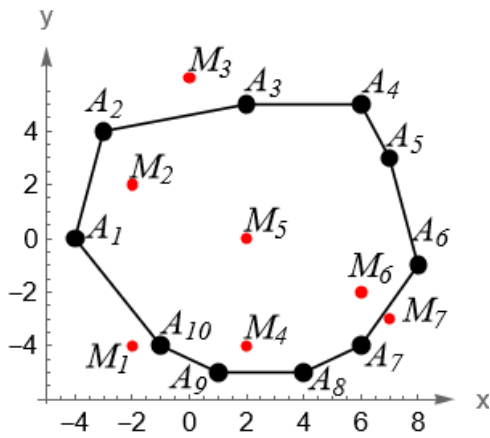
2.1. Точка  $M$  лежит внутри



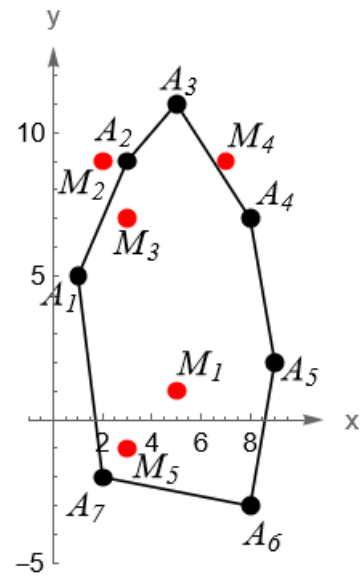
2.2. Точки  $M_3$  и  $M_4$  лежат внутри,  $M_1$  и  $M_2$  – снаружи, а  $M_5$  – на ребре  $A_6A_1$



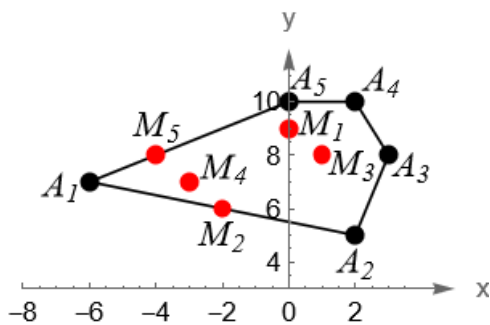
2.3. Точки  $M_2, M_4, M_5$  и  $M_6$  лежат внутри,  $M_1, M_3$  и  $M_7$  – снаружи



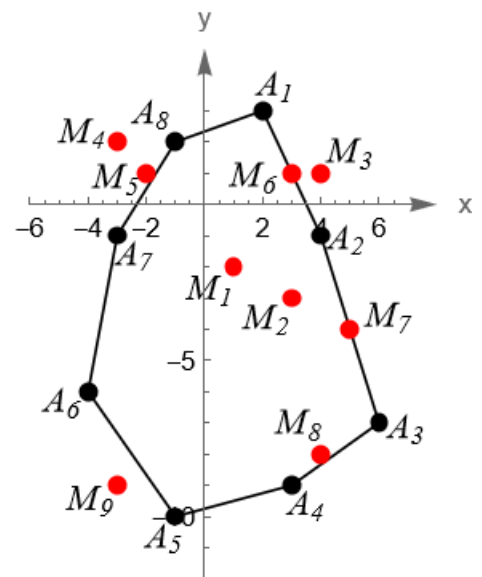
2.4. Точки  $M_1, M_3$  и  $M_5$  лежат внутри,  $M_2$  и  $M_4$  – снаружи



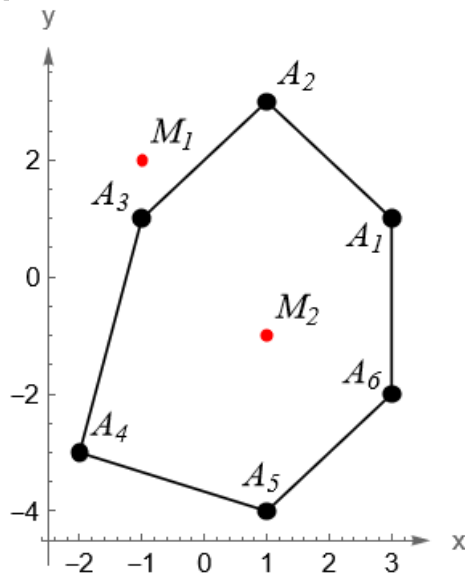
2.5. Точки  $M_1, M_3$  и  $M_4$  лежат внутри,  $M_2$  – на ребре  $A_1A_2$ ,  $M_5$  – на ребре  $A_5A_1$



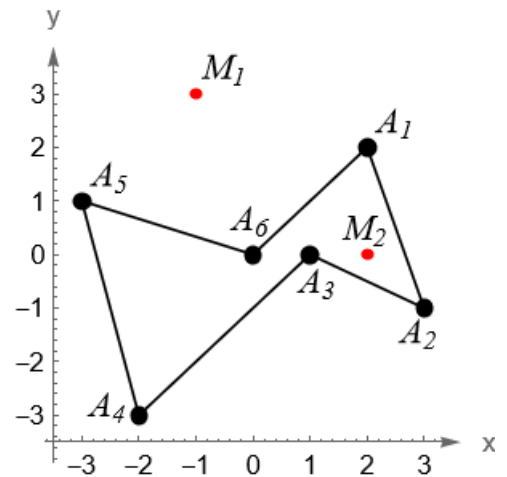
2.6. Точки  $M_1, M_2$  и  $M_8$  лежат внутри,  $M_3, M_4, M_5$  и  $M_9$  – снаружи,  $M_6$  – на ребре  $A_1A_2$ ,  $M_7$  – на ребре  $A_2A_3$



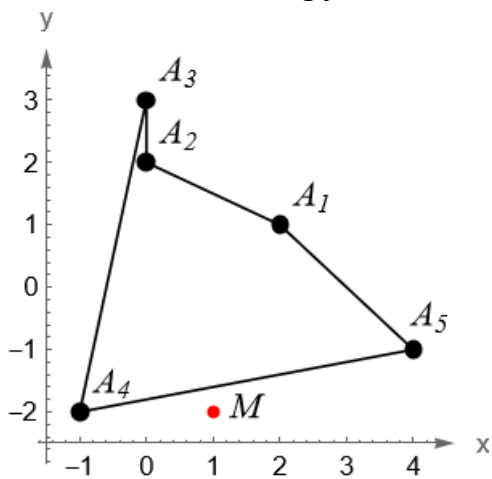
3.1. Точка  $M_2$  лежит внутри, точка  $M_1$  – снаружи



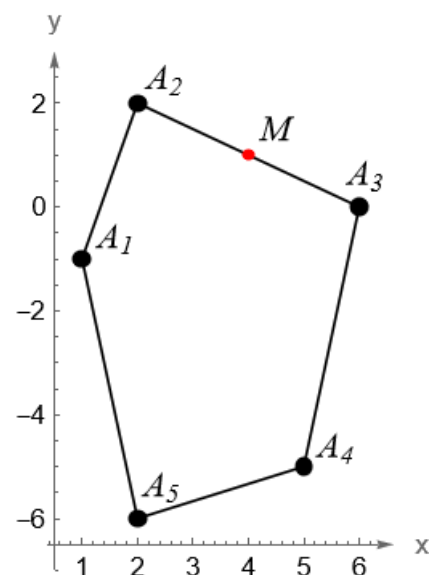
3.2. Точка  $M_2$  лежит внутри, точка  $M_1$  – снаружи



3.3. Точка  $M$  лежит снаружи

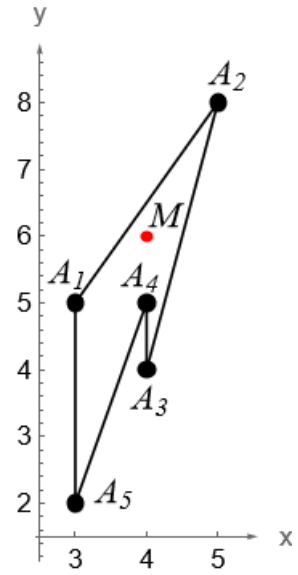
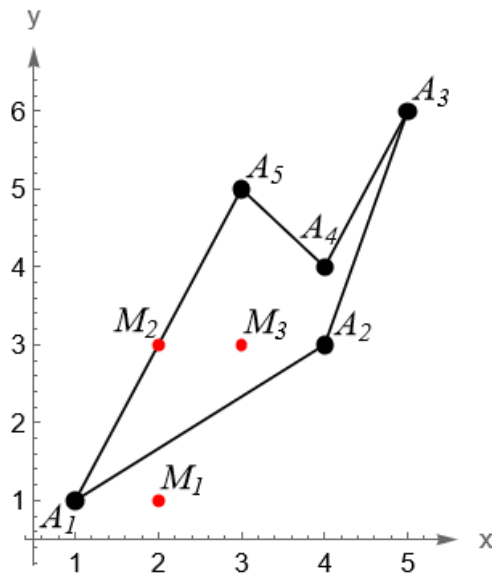


3.4. Точка  $M$  лежит на ребре  $A_2A_3$

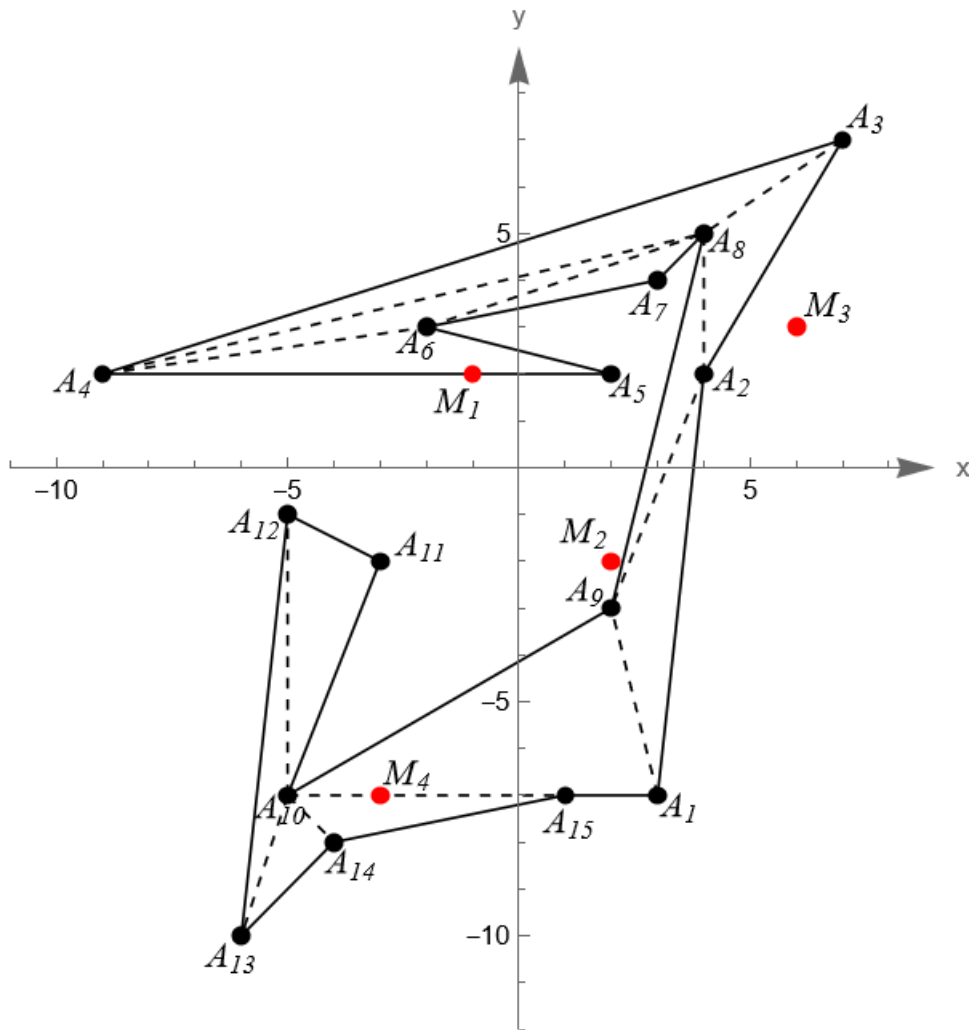




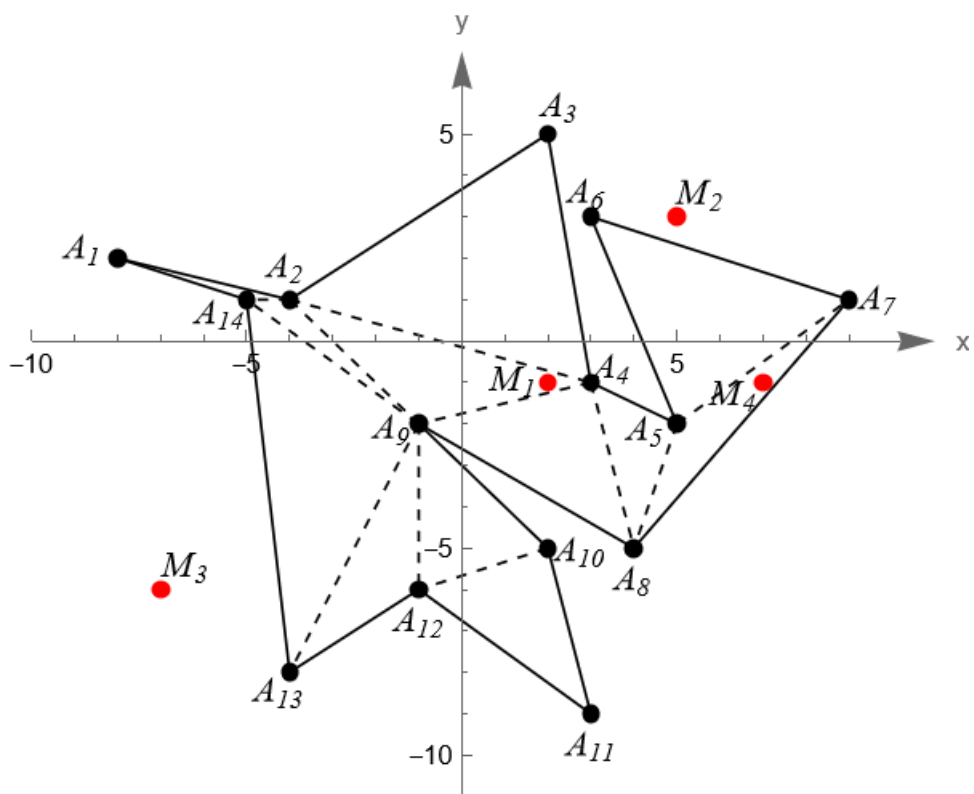
3.5. Точка  $M_3$  лежит внутри,  $M_1$  – снаружи,  $M_2$  – на ребре  $A_5A_1$



4.1. Точка  $M_4$  находится внутри (на диагонали  $A_{10}A_{15}$ ),  $M_2$  и  $M_3$  – снаружи,  $M_1$  – на ребре  $A_4A_5$



4.2. Точки  $M_1$  и  $M_4$  лежат внутри ( $\triangle A_2A_4A_9$  и  $\triangle A_5A_7A_8$  соответственно),  $M_2$  и  $M_3$  – снаружи



**Ответы к задачам подраздела 2.4.5.**

1.1.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.2.  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 10 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.5.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.6.  $\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ -9 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.7.  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.8.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.9. Такого аффинного преобразования не существует

$$2.1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.2. \frac{1}{a_x^2 + a_y^2} \begin{pmatrix} a_x^2 \cos \varphi + a_x a_y \sin \varphi & -a_x^2 \sin \varphi + a_x a_y \cos \varphi & 0 \\ a_x a_y \cos \varphi + a_y^2 \sin \varphi & -a_x a_y \sin \varphi + a_y^2 \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & a_x^2 + a_y^2 \end{pmatrix}$$

$$2.3. \begin{pmatrix} \alpha \cos \varphi & -\alpha \sin \varphi & 5 - 5\alpha \cos \varphi - 3\alpha \sin \varphi \\ \alpha \sin \varphi & \alpha \cos \varphi & -3 + 3\alpha \cos \varphi - 5\alpha \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.4. \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 2/5 \\ -4/5 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 18/5 \\ 4/5 & -3/5 & 16/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Первая матрица является}$$

матрицей поворота вокруг точки  $(1, 0)$  на угол  $\arcsin(-4/5) \approx -53.13^\circ$ , вторая – матрица поворота вокруг точки  $(1, 5/2)$  на угол  $\arccos(-3/5) \approx 126.87^\circ$ .

$$2.5. \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 2 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 2 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.6. \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7. Плоскость описывается уравнением

$2x + y - z = 5$ , матрица равна

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.1. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -23 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8. Прямая проходит через точки с координатами  $(3, 0, 1)$  и  $(3, 3, 4)$ ,

$$\text{матрица равна } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.2. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -17/2 \\ 1 & 2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.3. \begin{pmatrix} 7 & 2 & 45/2 \\ -1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.4. \begin{pmatrix} 7 & 16 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.5. \begin{pmatrix} 17 & 10 & 7 \\ -30 & -18 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

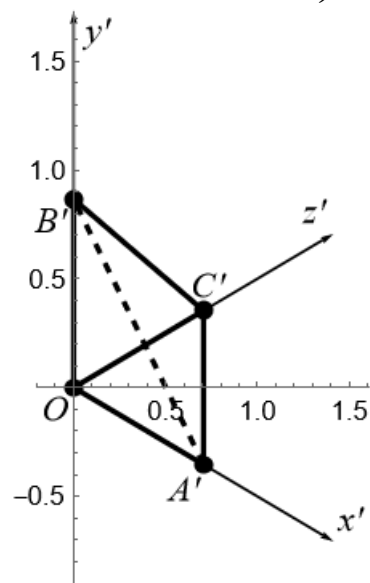
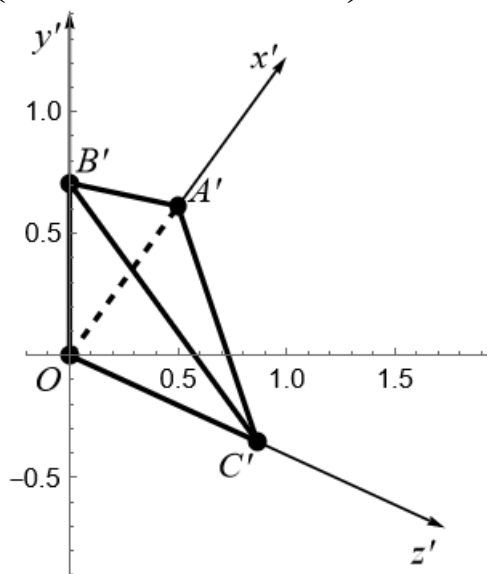
$$3.6. \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 \\ -5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.7. \begin{pmatrix} 25 & 3 & 39 & 13 \\ 12 & 3 & 20 & 9 \\ -16 & -2 & -25 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

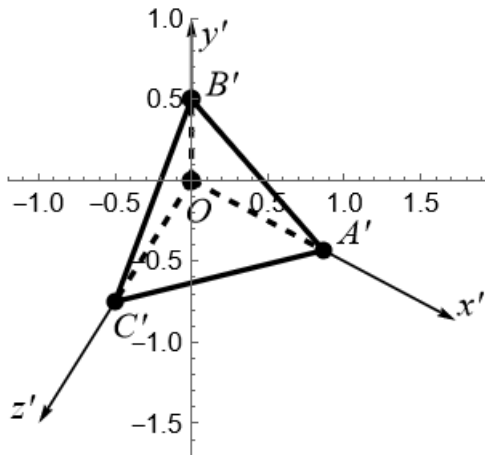
**Ответы к задачам подраздела 2.5.4.**

$$1.1. \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1.2. \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

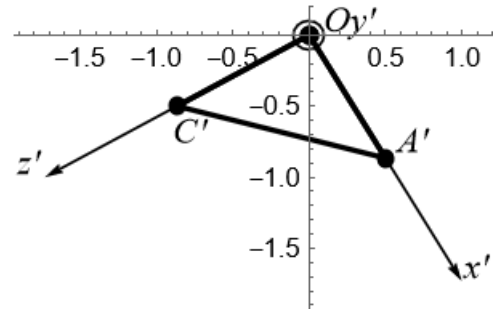


$$1.3. \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

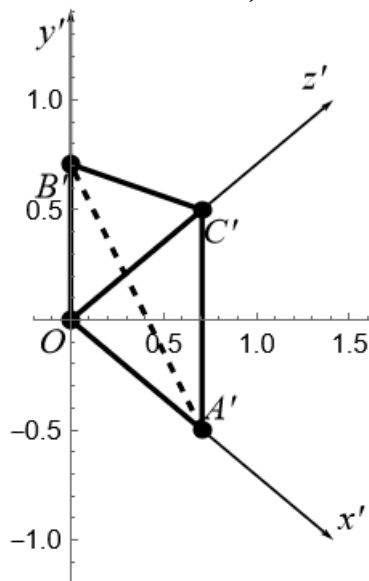


$$1.4. \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

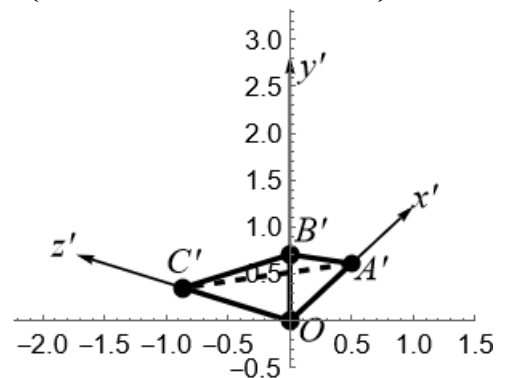
Ось  $Oy'$  направлена в сторону наблюдателя, её проекция вырождается в точку  $O$ , а проекции точек  $O$  и  $B$  совпадают.



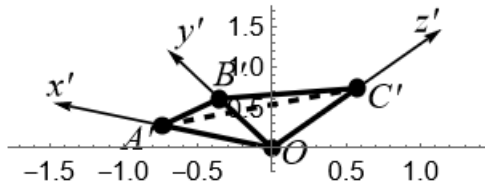
$$1.5. \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



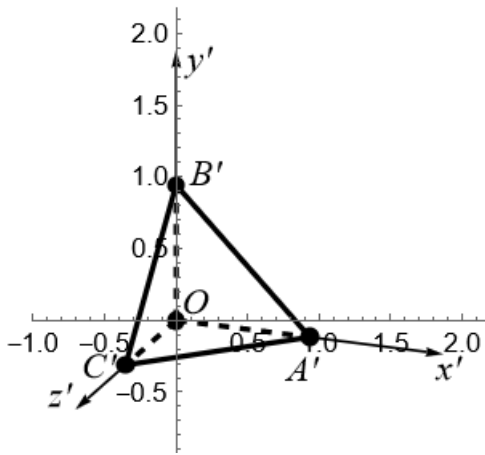
$$1.6. \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



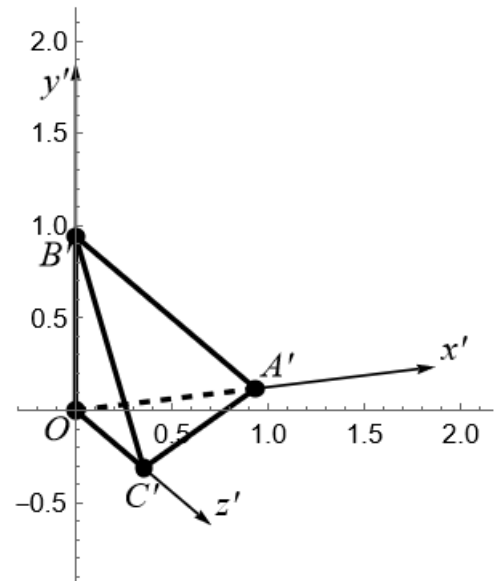
$$1.7. \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{6 - \sqrt{2}}{8} \\ \frac{3\sqrt{2} - 2}{8} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



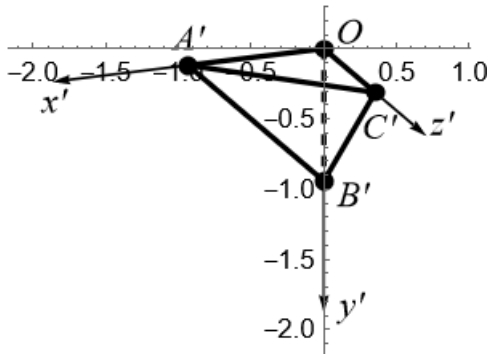
2.1.



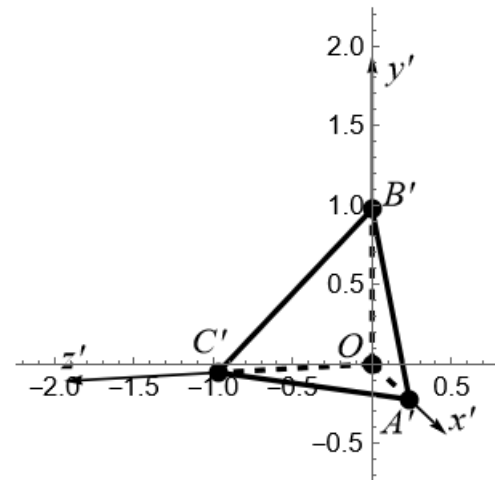
2.2.



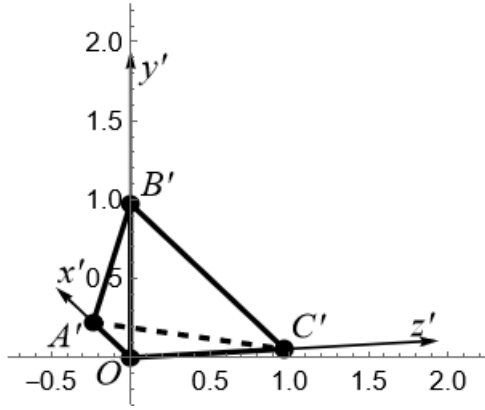
2.3.



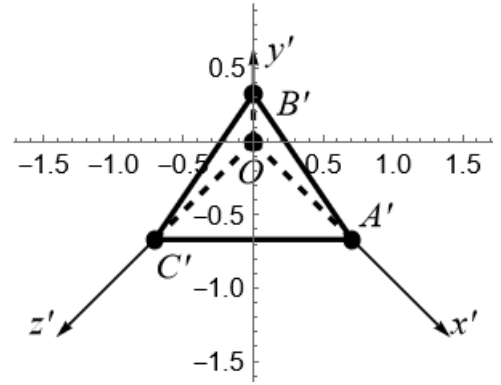
2.4.



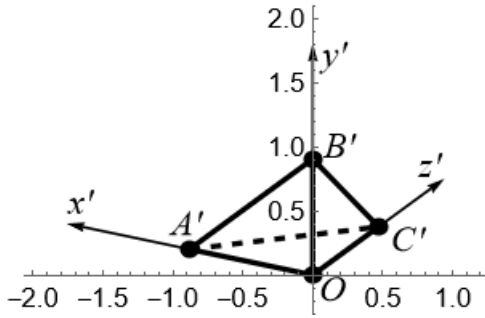
2.5.



2.6.

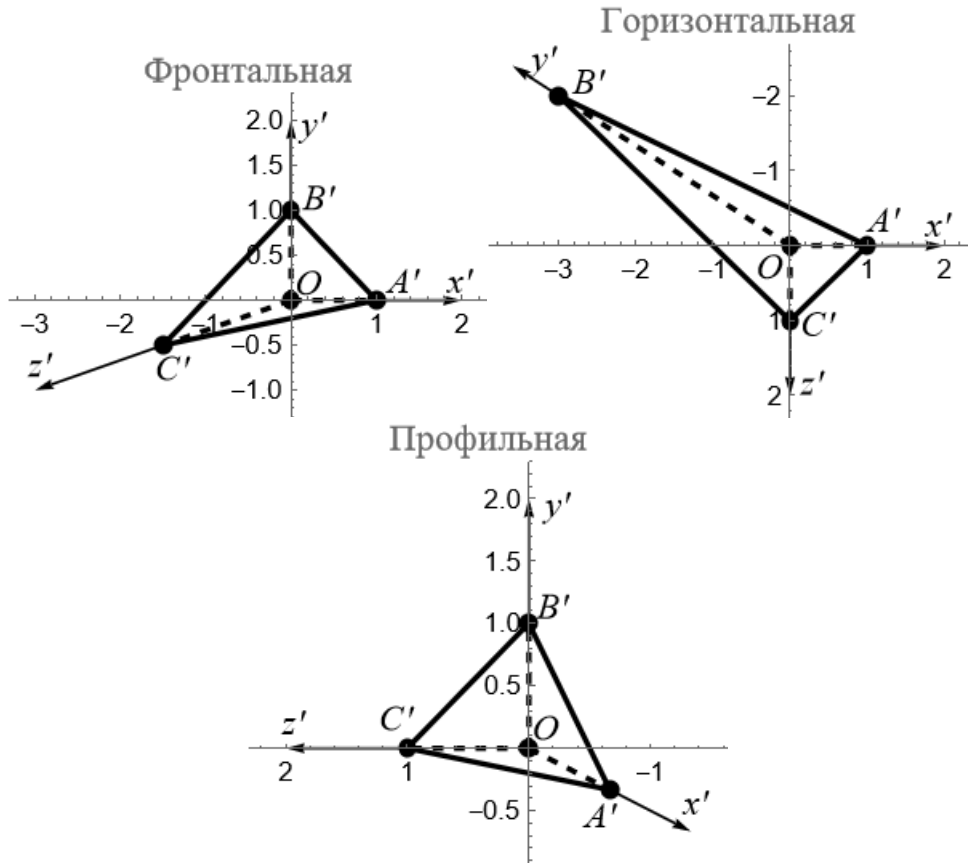


2.7.

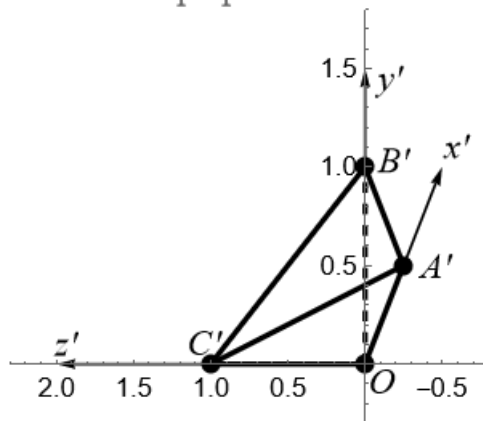
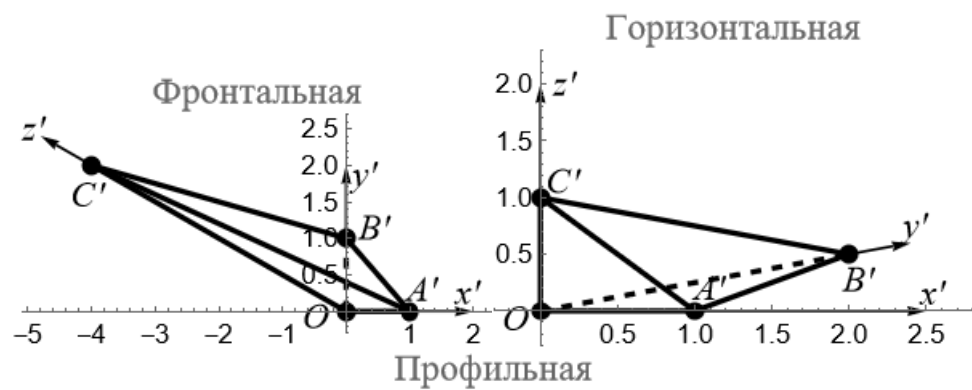


2.8. Такой проекции не существует

3.1.  $\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



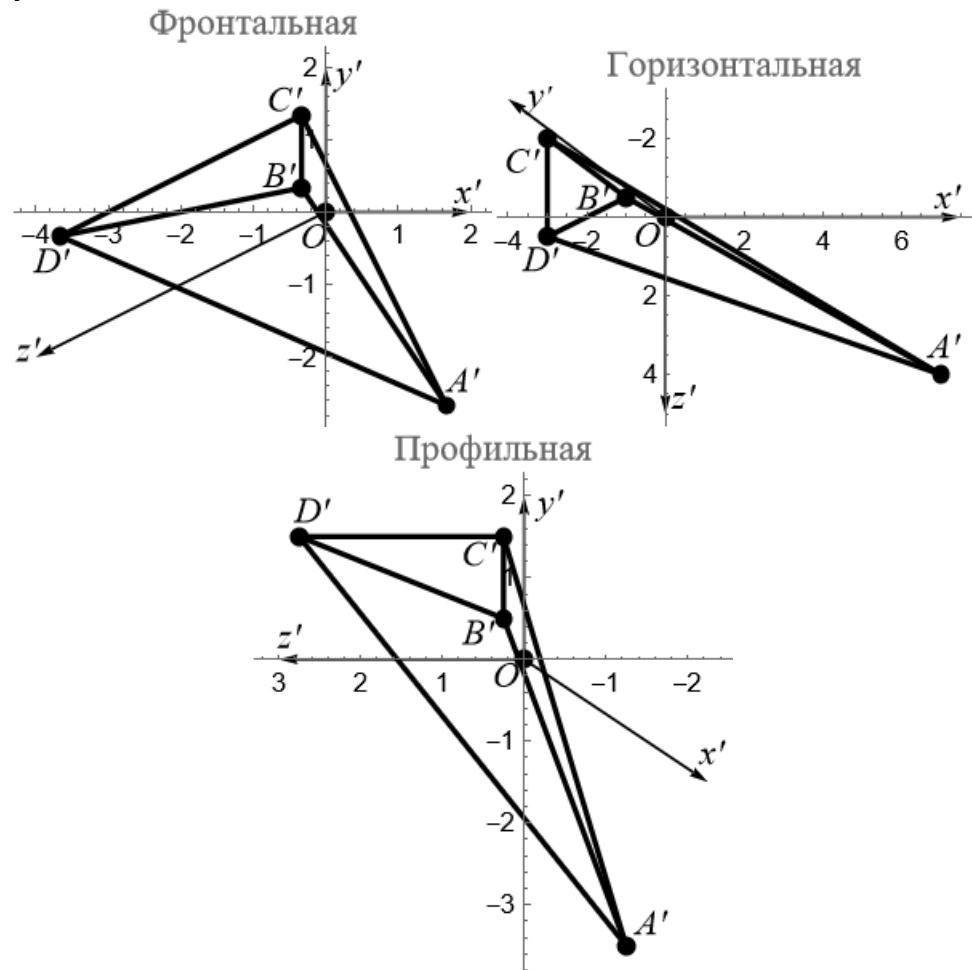
$$3.2. \Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





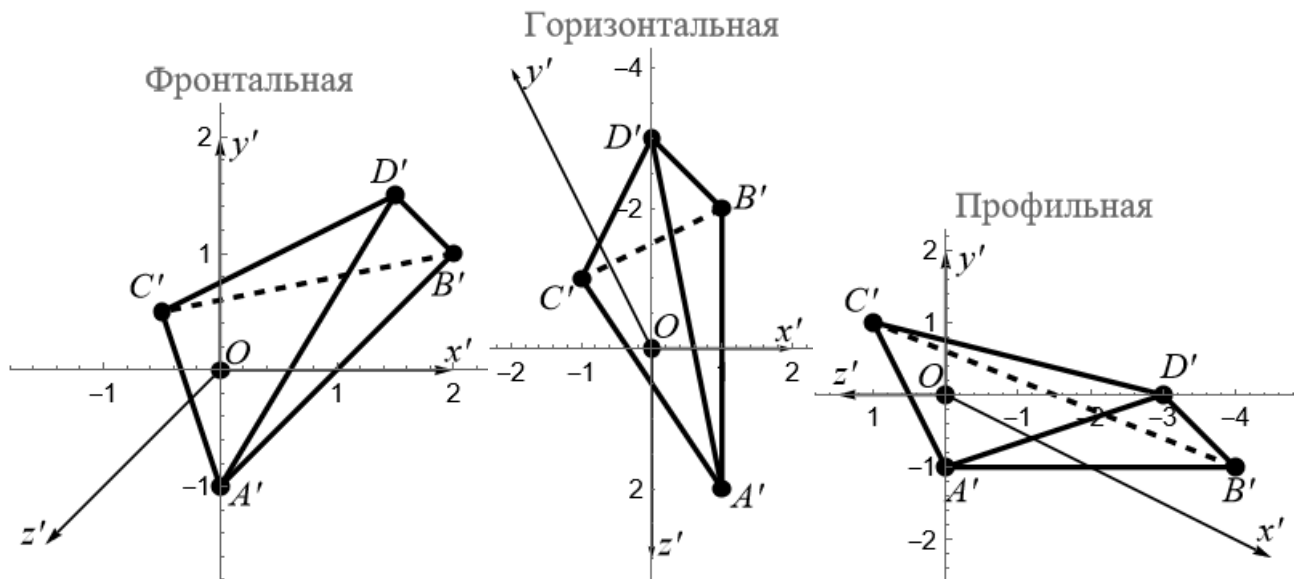
3.3.  $\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Вершины

имеют фронтальные проекции с координатами  $A'(5/3, -8/3)$ ,  $B'(-1/3, 1/3)$ ,  $C'(-1/3, 4/3)$ ,  $D'(-11/3, -1/3)$  в ПДСК  $Ox'y'$ , горизонтальные проекции с координатами  $A'(4, 7)$ ,  $B'(-1/2, -1)$ ,  $C'(-2, -3)$ ,  $D'(1/2, -3)$  в ПДСК  $Oz'x'$ , профильные проекции с координатами  $A'(-7/2, -5/4)$ ,  $B'(1/2, 1/4)$ ,  $C'(3/2, 1/4)$ ,  $D'(3/2, 11/4)$  в ПДСК  $Oy'z'$ .



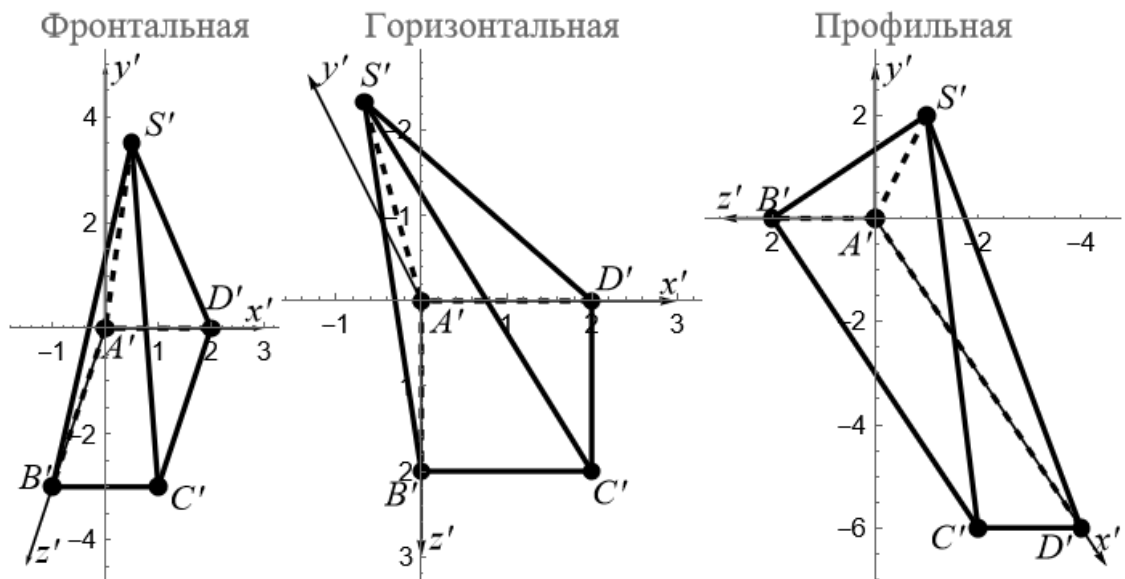
3.4.  $\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Вершины имеют

фронтальные проекции с координатами  $A'(0, -1)$ ,  $B'(2, 1)$ ,  $C'(-1/2, 1/2)$ ,  $D'(3/2, 3/2)$  в ПДСК  $Oxy$ , горизонтальные проекции с координатами  $A'(2, 1)$ ,  $B'(-2, 1)$ ,  $C'(-1, -1)$ ,  $D'(-3, 0)$  в ПДСК  $Ozx$ , профильные проекции с координатами  $A'(-1, 0)$ ,  $B'(-1, -4)$ ,  $C'(1, 1)$ ,  $D'(0, -3)$  в ПДСК  $Oyz$ .



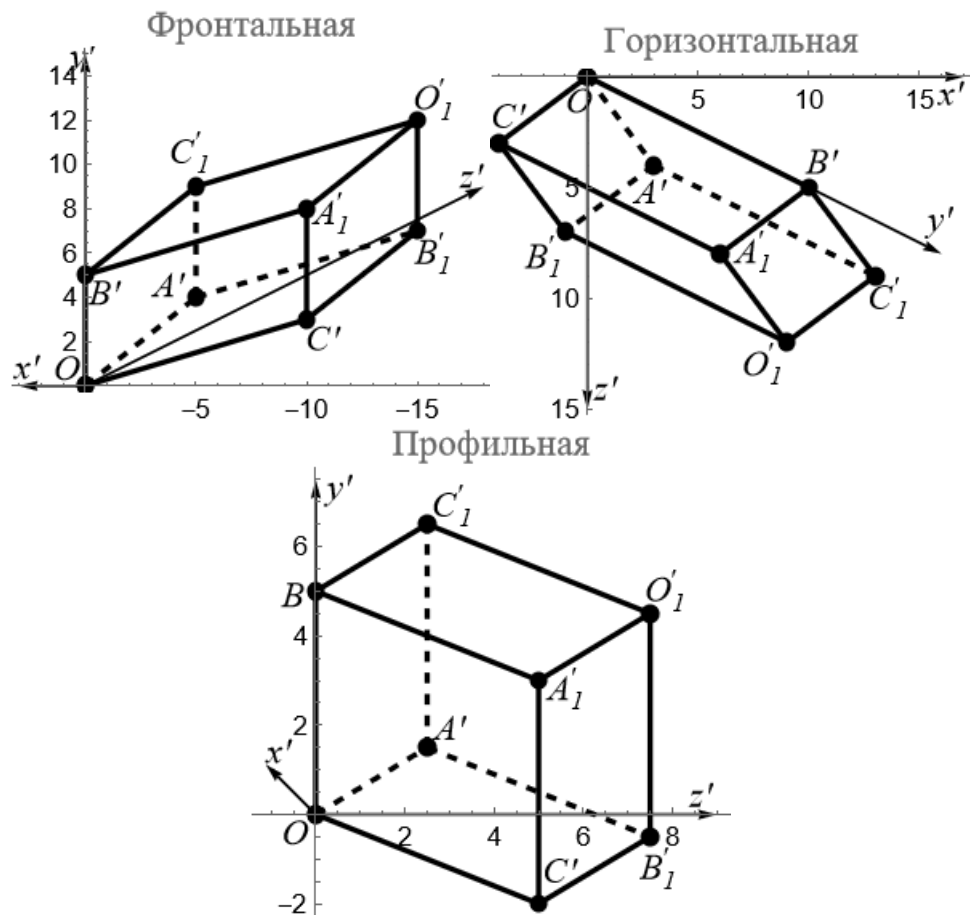
$$3.5. \Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Вершины}$$

имеют фронтальные проекции с координатами  $S'(1/2, 7/2)$ ,  $A'(0,0)$ ,  $B'(-1,-3)$ ,  $C'(1,-3)$ ,  $D'(2,0)$  в ПДСК  $Ox'y'$ , горизонтальные проекции с координатами  $S'(-7/3, -2/3)$ ,  $A'(0,0)$ ,  $B'(2,0)$ ,  $C'(2,2)$ ,  $D'(0,2)$  в ПДСК  $Oz'x'$ , профильные проекции с координатами  $S'(2,-1)$ ,  $A'(0,0)$ ,  $B'(0,2)$ ,  $C'(-6,-2)$ ,  $D'(-6,-4)$  в ПДСК  $Oy'z'$ .



3.6.  $\Phi_{kf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kh} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Phi_{kp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Обозначим через

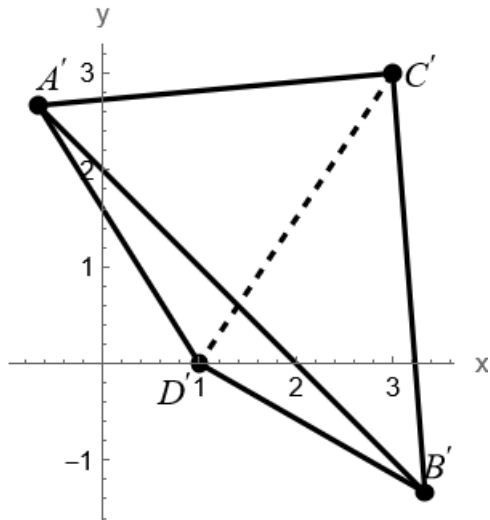
$O_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  вершины куба, являющиеся противоположными вершинам  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Тогда все вершины куба (за исключением начала координат) имеют фронтальные проекции с координатами  $A'(-5,4)$ ,  $B'(0,5)$ ,  $C'(-10,3)$ ,  $O'_1(-15,12)$ ,  $A'_1(-10,8)$ ,  $B'_1(-15,7)$ ,  $C'_1(-5,9)$  в ПДСК  $Ox'y'$ , горизонтальные проекции с координатами  $A'(4,3)$ ,  $B'(5,10)$ ,  $C'(3,-4)$ ,  $O'_1(12,9)$ ,  $A'_1(8,6)$ ,  $B'_1(7,-1)$ ,  $C'_1(9,13)$  в ПДСК  $Oz'x'$ , профильные проекции с координатами  $A'(3/2,5/2)$ ,  $B'(5,0)$ ,  $C'(-2,5)$ ,  $O'_1(9/2,15/2)$ ,  $A'_1(3,5)$ ,  $B'_1(-1/2,15/2)$ ,  $C'_1(13/2,5/2)$  в ПДСК  $Oy'z'$ .



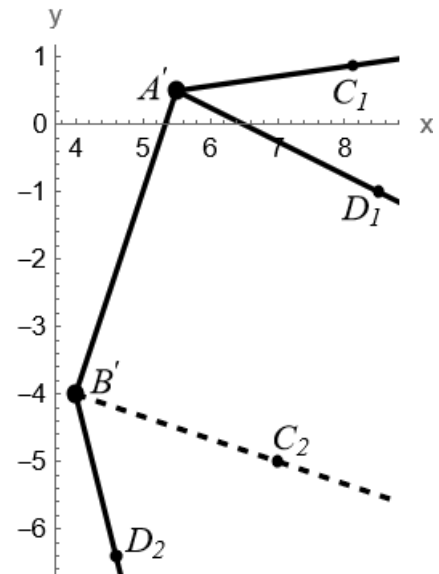
4.1.  $F_{\text{эф}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$ . Все верши-

4.2.  $F_{\text{эф}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$ . Две вер-

ны имеют действительные проекции (координаты даны в ПДСК  $Oxy$ ):  $A'(-2/3, 8/3)$ ,  $B'(10/3, -4/3)$ ,  $C'(3, 3)$ ,  $D'(1, 0)$ .

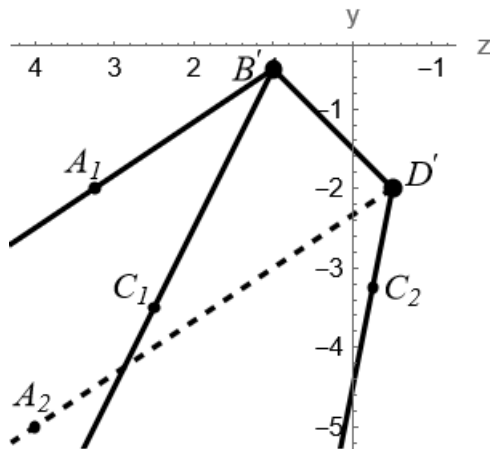


шины имеют действительные проекции (координаты даны в ПДСК  $Oxy$ ):  $A'(11/2, 1/2)$ ,  $B'(4, -4)$ . Рёбра  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  проектируются в лучи  $A'C_1$ ,  $A'D_1$ ,  $B'C_2$  и  $B'D_2$  соответственно, их направляющие векторы имеют координаты  $(7, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(3, -1)$  и  $(1, -4)$ .



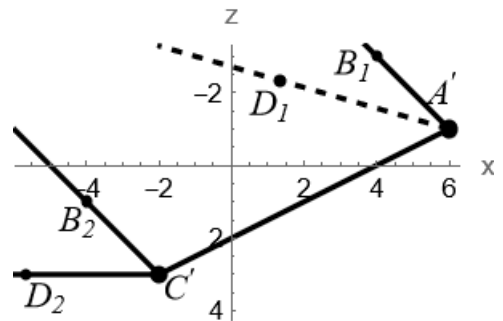
$$4.3. F_{\text{цр}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Две верши-}$$

ны имеют действительную проекцию (координаты даны в ПДСК  $Oyz$ ):  $B'(-1/2, 1)$  и  $D'(-2, -1/2)$ . Рёбра  $AB$ ,  $AD$ ,  $BC$  и  $CD$  проектируются в лучи  $B'A_1$ ,  $D'A_2$ ,  $B'C_1$  и  $D'C_2$  соответственно, координаты их направляющих векторов равны  $(-2, 3)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(-2, 1)$  и  $(-5, 1)$ .



$$4.4. F_{\text{wh}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Две вер-}$$

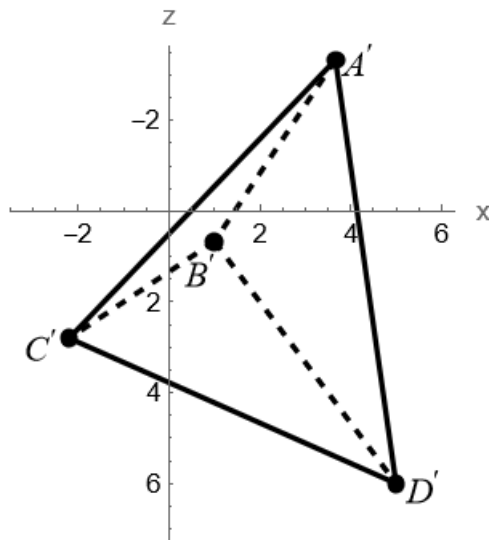
шины имеют действительную проекцию (координаты даны в ПДСК  $Ozx$ ):  $A'(-1, 6)$  и  $C'(3, -2)$ . Рёбра  $AB$ ,  $AD$ ,  $BC$  и  $CD$  проектируются в лучи  $A'B_1$ ,  $A'D_1$ ,  $C'B_2$  и  $C'D_2$  соответственно, координаты их направляющих векторов равны  $(-2, -2)$ ,  $(-2, -7)$ ,  $(-2, -2)$  и  $(0, -1)$ .



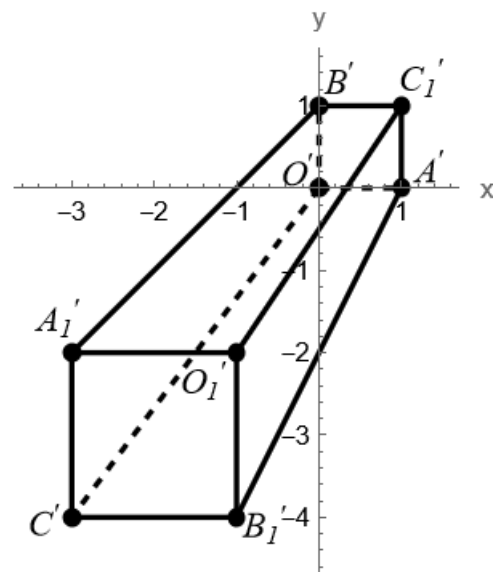
4.5.  $F_{wh} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Все верши-

4.6.  $F_{wf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ . Все вер-

ны имеют действительные проекции (координаты даны в ПДСК  $Ozx$ ):  $A'(-10/3, 11/3)$ ,  $B'(2/3, 1)$ ,  $C'(14/5, -11/5)$ ,  $D'(6, 5)$ .



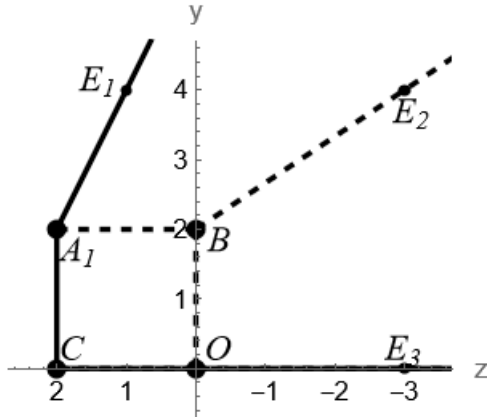
шины имеют действительные проекции (координаты даны в ПДСК  $Oxy$ ):  $O'(0, 0)$ ,  $A'(1, 0)$ ,  $B'(0, 1)$ ,  $C'(-3, -4)$ ,  $O_1(-1, -2)$ ,  $A_1(-3, -2)$ ,  $B_1(-1, -4)$ ,  $C_1(1, 1)$ , где  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – это вершины исходного куба, противолежащие вершинам  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно.



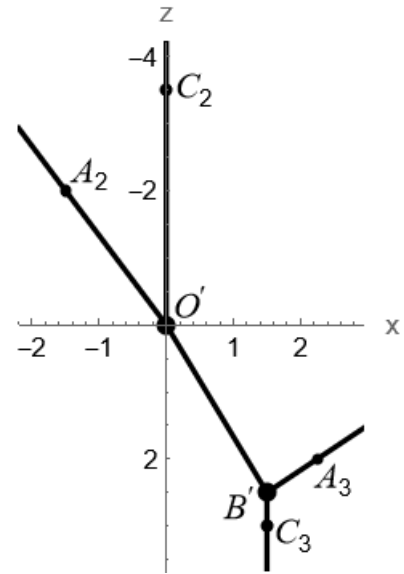
4.7.  $F_{\text{цр}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Пусть  $O_1, A_1,$

4.8.  $F_{\text{wh}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Пусть  $O_1,$

$B_1$  и  $C_1$  – это вершины исходного куба, противолежащие вершинам  $O, A, B$  и  $C$  соответственно. Тогда четыре вершины, лежащие на профильной плоскости, сами же являются своими действительными проекциями (координаты даны в ПДСК  $Oyz$ ):  $O(0, 0), B(2, 0), C(0, 2)$  и  $A_1(2, 2)$ . Рёбра  $A_1O_1, BC_1, OA$  и  $CB_1$  проектируются в лучи  $A_1E_1, BE_2, OE_3$  и  $CE_3$  соответственно. Их направляющие векторы имеют координаты  $(2, -1), (2, -3), (-1, 0)$  и  $(-1, 0)$ .

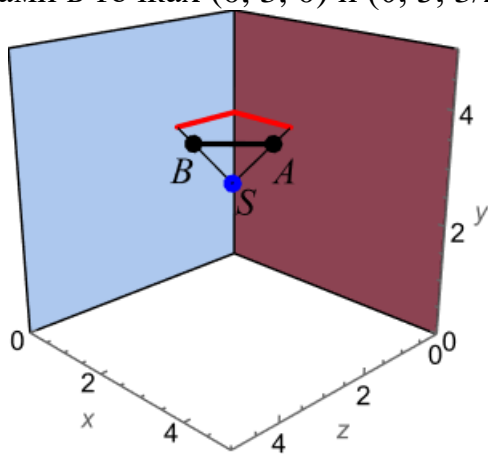


$A_1, B_1$  и  $C_1$  – это вершины исходного куба, противолежащие вершинам  $O, A, B$  и  $C$  соответственно. Тогда две вершины имеют действительные проекции (координаты даны в ПДСК  $Ozx$ ):  $O'(0, 0), B'(5/2, 3/2)$ . Рёбра  $OA, OC, BA_1$  и  $BC_1$  проектируются в лучи  $O'A_2, O'C_2, B'A_3$  и  $B'C_3$  соответственно, направляющие векторы которых имеют координаты  $(-2, -3/2), (-1, 0), (-1, 3/2), (1, 0)$ . Все рёбра являются видимыми, так как проектор расположен внутри исходного куба.

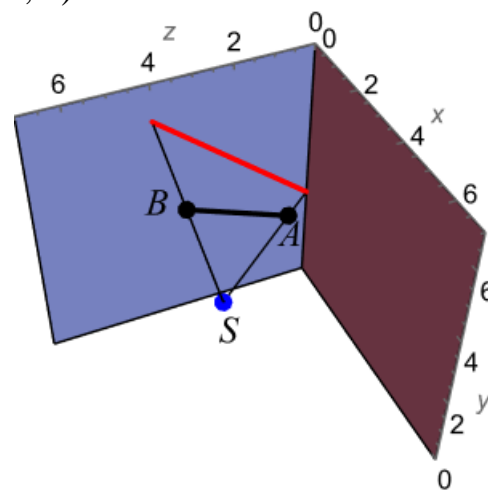




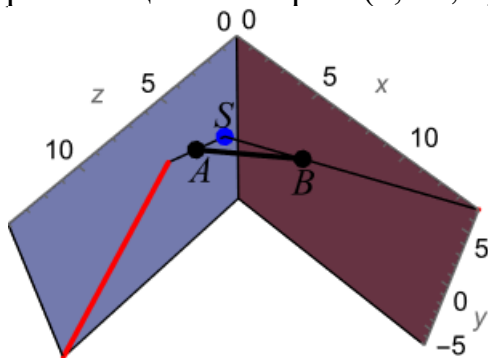
5.1. Отрезок на фронтальной плоскости с концами в точках  $(3/2, 3, 0)$  и  $(0, 3, 0)$ , отрезок на профильной плоскости с концами в точках  $(0, 3, 0)$  и  $(0, 3, 3/2)$



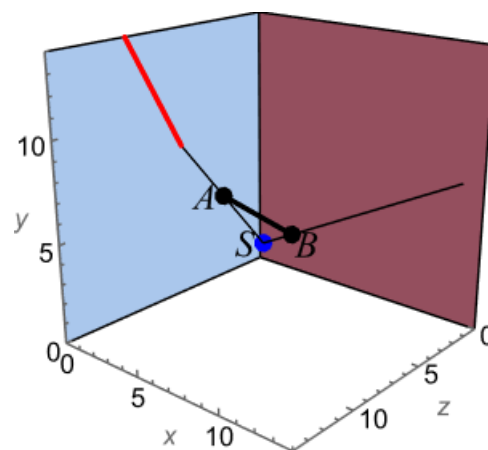
5.2. Отрезок на профильной плоскости с концами в точках  $(0, 8/3, 0)$  и  $(0, 6, 4)$



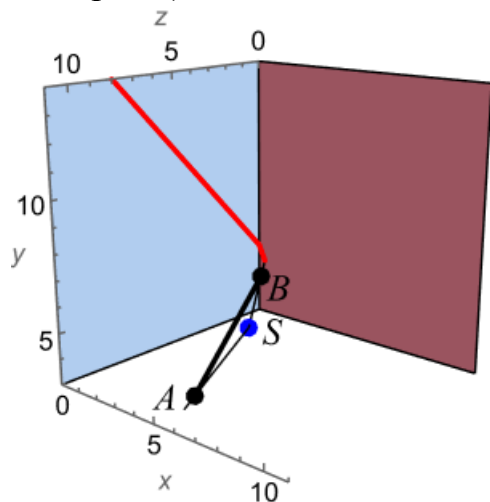
5.3. Луч на фронтальной плоскости с началом в точке  $(14, 7, 0)$  и направляющим вектором  $(1, 0, 0)$ , луч на профильной плоскости с началом в точке  $(0, 2, 5)$  и направляющим вектором  $(0, -1, 1)$



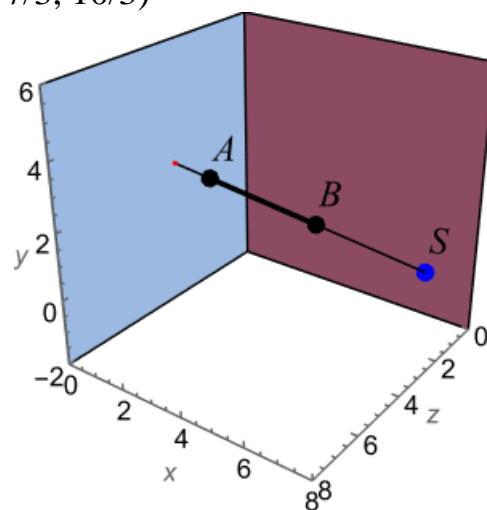
5.4. Луч на профильной плоскости с началом в точке  $(0, 8, 6)$  и направляющим вектором  $(0, 7, 4)$



5.5. Отрезок на фронтальной плоскости с концами в точках  $(1/3, 16/3, 0)$  и  $(0, 6, 0)$ , луч на профильной плоскости с началом в точке  $(0, 6, 0)$  и направляющим вектором  $(0, 23, 3)$



5.6. Точка на профильной плоскости:



### 3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

В течение семестра по учебной дисциплине предусмотрен контроль знаний в форме 2 коллоквиумов и 2 контрольных работ. В настоящем ЭУМК приведены вопросы первого коллоквиума и варианты первой контрольной работы, посвященные данной части дисциплины. Также приведен список вопросов к экзамену, часть из которых относится к темам, затронутым в настоящем ЭУМК.

#### 3.1. Вопросы к коллоквиуму №1

Ниже приведен перечень вопросов, которые могут быть заданы студентам на коллоквиуме по данному разделу дисциплины. Рекомендуется составлять варианты, содержащие по два вопроса (один из вопросов 1-15 и один из вопросов 16-30). Также рекомендуется оценивать ответ студента исходя из полноты ответа, владения отдельными терминами и темами заданий в целом, способностью применять наиболее подходящие способы решения поставленных задач.

1. Общее и нормальное уравнения прямой
2. Параметрические уравнения прямой
3. Каноническое уравнение прямой
4. Общее и нормальное уравнения плоскости
5. Параметрические уравнения плоскости
6. Взаимное положение точек
7. Положение точек относительно прямой
8. Положение точек относительно плоскости
9. Взаимное расположение прямых на плоскости и в пространстве
10. Взаимное расположение плоскостей в пространстве
11. Взаимное расположение отрезков на плоскости
12. Угол между векторами и его свойства
13. Самонепересекающиеся и выпуклые полигоны. Критерий самонепересекаемости полигона
14. Критерии принадлежности точки выпуклому полигону
15. Критерии принадлежности точки самонепересекающемуся полигону
16. Аффинные пространства: основные понятия и свойства
17. Декартовы системы координат аффинного пространства
18. Примеры и свойства аффинных преобразований
19. Вывод матрицы аффинного преобразования

- 20.Связь между матрицами аффинного преобразования в разных декартовых системах координат
  - 21.Геометрические свойства аффинных преобразований. Основная теорема аффинной геометрии
  - 22.Понятие движения аффинного пространства
  - 23.Матрицы ортогональных линейных преобразований и движений
  - 24.Примеры движений аффинной плоскости. Представление движения аффинной плоскости через композицию элементарных движений
  - 25.Основные понятия, связанные с проективными преобразованиями. Ортографические проекции
  - 26.Вывод матрицы аксонометрического проективного преобразования
  - 27.Основные характеристики аксонометрических проективных преобразований
  - 28.Косоугольные проекции
  - 29.Вывод матрицы центрального проективного преобразования
  - 30.Центральная проекция прямой. Точка схода прямой
- Кроме этих вопросов может быть также предложена задача по одной из тем, рассмотренных в разделе 2.

### 3.2. Варианты контрольной работы №1

Вариант №1

1. В декартовой системе координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$  некоторое аффинное преобразование имеет матрицу  $\Phi$ . Найти матрицу этого же линейного преобразования в декартовой системе координат  $(o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2))$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, o(0, -2), \vec{e}_1(-5, -3), \vec{e}_2(-2, 2),$$

$$o'(9, -3), \vec{e}'_1(-3, -5), \vec{e}'_2(-5, -3).$$

2. Построить центральную проекцию отрезка с концами в точках  $a$  и  $b$  на плоскость  $\Pi$  при расположении проектора в точке  $s$ :

$$a(2, 3, -5), b(0, 1, 0), s(-3, 2, 1),$$

$$\Pi: 2x + 3y - z + 5 = 0.$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(10, 7), A_2(10, -9), A_3(-6, 4), A_4(-2, 9), A_5(-9, 7), A_6(-10, -2), A_7(-7, -10).$$

Вариант №2

1. Найти матрицу аффинного преобразования, если для точек  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , известны их образы  $A_i \mapsto B_i$ :

$$A_1(-1, -3, 2), A_2(4, -2, 7), A_3(-3, -4, 1), A_4(2, -2, 4), \\ B_1(-3, 12, -4), B_2(12, -25, 1), B_3(-9, 26, -6), B_4(5, -9, -2).$$

2. Построить центральную проекцию отрезка с концами в точках  $a$  и  $b$  на плоскость  $\Pi$  при расположении проектора в точке  $s$ :

$$a(1, 1, 2), b(4, -7, 2), s(2, 0, 4), \\ \Pi: x + y - 5z + 1 = 0.$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(-9, 8), A_2(-8, 7), A_3(-2, 10), A_4(0, 0), A_5(0, 9), \\ A_6(1, 6), A_7(1, 8), A_8(4, 3), A_9(4, 7), A_{10}(9, 0).$$

Вариант №3

1. В декартовой системе координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$  некоторое аффинное преобразование имеет матрицу  $\Phi$ . Найти матрицу этого же линейного преобразования в декартовой системе координат  $(o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2))$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 5 & 26 & -74 \\ -1 & -9 & 33 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, o(0, -3), \vec{e}_1(1, 2), \vec{e}_2(2, 5), \\ o'(2, 4), \vec{e}'_1(-2, 5), \vec{e}'_2(-1, 3).$$

2. Построить аксонометрическую проекцию каркасной пирамиды с вершинами в точках  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , если направление на дальнего наблюдателя выражается вектором  $\vec{s}(2, 1, 2)$ :

$$A_1(0, 1, 0), A_2(-1, 2, 0), A_3(2, 2, -1), A_4(5, 0, 1).$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(-7, -10), A_2(1, -1), A_3(-4, -7), A_4(6, 2), A_5(7, -10), A_6(-1, -8), A_7(6, -4).$$

Вариант №4

1. Найти матрицу аффинного преобразования, если для точек  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , известны их образы  $A_i \mapsto B_i$ :

$$A_1(3, 2, 2), A_2(-2, -5, 1), A_3(4, 5, 1), A_4(4, 3, 3), \\ B_1(-1, 6, 13), B_2(31, -42, -35), B_3(-7, 16, 23), B_4(-9, 18, 25).$$

2. Построить аксонометрическую проекцию каркасной пирамиды с вершинами в точках  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , если направление на дальнего наблюдателя выражается вектором  $\vec{s}(0, 3, 4)$ :

$$A_1(2, 3, -1), A_2(2, 2, 0), A_3(3, 5, -2), A_4(1, 1, 6).$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(-1, -10), A_2(8, 9), A_3(2, 4), A_4(6, -2), A_5(-2, -7), A_6(8, 3), A_7(7, 2).$$

Вариант №5

1. Построить матрицу симметрического отражения относительно плоскости  $\Pi: x + y - z + 6 = 0$ .

2. Построить центральную проекцию каркасной пирамиды с вершинами в точках  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , на фронтальную плоскость, если проектор находится в точке  $s(2, 2, 5)$ :

$$A_1(2, -1, 2), A_2(1, 5, 3), A_3(0, 1, 1), A_4(-5, 2, 6).$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(5, -4), A_2(9, -9), A_3(-4, -1), A_4(0, -7), A_5(-10, -3), A_6(0, 5), A_7(-3, 9).$$

Вариант №6

1. Найти матрицу аффинного преобразования, если для точек  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , известны их образы  $A_i \mapsto B_i$ :

$$A_1(-4, 2, 1), A_2(-5, 2, -1), A_3(-8, -4, -5), A_4(-4, 3, 1), \\ B_1(16, -9, 1), B_2(6, 2, 0), B_3(-30, 21, 17), B_4(19, -8, -3).$$

2. Построить центральную проекцию отрезка с концами в точках  $a$  и  $b$  на поверхность  $f_+ \cup p_+$ , где  $f_+ = \{(x, y, z) : z = 0 \wedge x \geq 0\}$ ,  $p_+ = \{(x, y, z) : x = 0 \wedge z \geq 0\}$  при расположении проектора в точке  $s$ :

$$a(1, 2, 3), b(3, 5, 1), s(2, 4, 5).$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(-6, -7), A_2(-1, -5), A_3(-6, -8), A_4(3, 2), A_5(9, -7), A_6(2, 5).$$

Вариант №7

1. Найти матрицу аффинного преобразования, если для точек  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , известны их образы  $A_i \mapsto B_i$ :

$$A_1(-1, -5, 4), A_2(4, 0, 3), A_3(5, -3, 5), A_4(1, 2, 1), \\ B_1(26, -16, -11), B_2(-11, 6, 15), B_3(-5, -10, 17), B_4(-6, 18, 4).$$

2. Построить аксонометрическую проекцию каркасной пирамиды с вершинами в точках  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , на фронтальную плоскость мировой системы координат, если известны координаты точек  $A_i$  в объектной системе координат, которая получается из мировой поворотами на углы  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $\gamma = 0$  соответственно вокруг осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

$$A_1(2, 1, -3), A_2(3, 1, 2), A_3(1, 0, 1), A_4(-2, 1, 0).$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(9, -3), A_2(-6, -8), A_3(6, -2), A_4(-10, -6), A_5(1, -9), A_6(9, 9).$$

Вариант №8

1. Найти матрицу аффинного преобразования, если для точек  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , известны их образы  $A_i \mapsto B_i$ :

$$A_1(4, 2, 1), A_2(-5, 0, 0), A_3(1, 2, 4), A_4(1, 2, 5), \\ B_1(21, 25, 26), B_2(-22, -16, -25), B_3(24, 22, 23), B_4(29, 25, 27).$$

2. Построить косоугольную проекцию каркасной пирамиды с вершинами в точках  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , на фронтальную, горизонтальную и профильную плоскости, если направление на дальнего наблюдателя выражается вектором  $\vec{s}(1, 2, 5)$ :

$$A_1(5, 5, -2), A_2(0, 0, 7), A_3(-1, 0, 1), A_4(1, 5, 2).$$

3. Определить свойства полигона (самонепересекаемость, выпуклость, минимальность), заданного последовательностью вершин:

$$A_1(-9, 0), A_2(-6, -8), A_3(-2, -10), A_4(8, -5), A_5(9, 6), \\ A_6(9, 9), A_7(8, 10), A_8(-7, 10), A_9(-8, 8).$$

Вариант №9

1. В декартовой системе координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$  некоторое аффинное преобразование имеет матрицу  $\Phi$ . Найти матрицу этого же линейного преобразования в декартовой системе координат  $(o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2))$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, o(2, -3), \vec{e}_1(-1, 1), \vec{e}_2(-1, -2), \\ o'(5, 0), \vec{e}'_1(0, 3), \vec{e}'_2(-1, 1).$$

2. Построить центральную проекцию отрезка с концами в точках  $a$  и  $b$  на поверхность  $f_+ \cup p_+$ , где  $f_+ = \{(x, y, z) : z = 0 \wedge x \geq 0\}$ ,  $p_+ = \{(x, y, z) : x = 0 \wedge z \geq 0\}$  при расположении проектора в точке  $s$ :

$$a(1, 1, 1), b(6, 2, 3), s(4, 5, 3).$$

3. Определить принадлежность точки полигону, заданному последовательностью вершин:

$$M(-3, 1), \\ A_1(6, -4), A_2(-2, -4), A_3(0, 10), A_4(-5, -5), A_5(8, -7), A_6(8, 7).$$

Вариант №10

1. Построить матрицу симметрического отражения относительно плоскости  $\Pi: 2y - z + 1 = 0$ .

2. Построить косоугольную проекцию каркасной пирамиды с вершинами в точках  $A_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , на фронтальную, горизонтальную и профильную плоскости, если направление на дальнего наблюдателя выражается вектором  $\vec{s}(-2, 3, 2)$ :

$$A_1(2, 7, 1), A_2(1, 2, 3), A_3(1, 2, -2), A_4(0, 7, -1).$$

3. Определить принадлежность точки полигону, заданному последовательностью вершин:

$$M(-7, -6),$$

$$A_1(-3, -1), A_2(9, -1), A_3(10, 1), A_4(9, 9), A_5(5, 10), A_6(-10, -10).$$

#### Вариант №11

1. В декартовой системе координат  $(o, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$  некоторое аффинное преобразование имеет матрицу  $\Phi$ . Найти матрицу этого же линейного преобразования в декартовой системе координат  $(o', (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2))$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, o(3, -2), \vec{e}_1(-4, -3), \vec{e}_2(-2, 0),$$

$$o'(3, -2), \vec{e}'_1(2, 3), \vec{e}'_2(6, 6).$$

2. Построить центральную проекцию отрезка с концами в точках  $a$  и  $b$  на плоскость  $\Pi$  при расположении проектора в точке  $s$ :

$$a(2, 3, 4), b(-1, 2, 3), s(2, 2, 3),$$

$$\Pi: 2x - 5y + z + 4 = 0.$$

3. Определить принадлежность точки полигону, заданному последовательностью вершин:

$$M(1, 4),$$

$$A_1(10, -2), A_2(7, -2), A_3(2, 5), A_4(-1, 2), A_5(3, -8), A_6(3, -3).$$

#### Вариант №12

1. Найти матрицу аффинного преобразования, если для точек  $A_i, i = \overline{1, 4}$ , известны их образы  $A_i \mapsto B_i$ :

$$A_1(-5, 5, 3), A_2(-8, 3, -5), A_3(5, 4, -5), A_4(4, 5, 0),$$

$$B_1(67, -34, 13), B_2(69, -28, 25), B_3(-63, 27, -23), B_4(-35, 11, -20).$$

2. Построить центральную проекцию полигона  $A_1A_2A_3A_4A_1$  на фронтальную плоскость при расположении проектора в точке  $s(2, 5, 7)$ :

$$A_1(-2, 0, 0), A_2(1, 1, 0), A_3(7, 3, -1), A_4(-5, -1, 2).$$

3. Определить принадлежность точки полигону, заданному последовательностью вершин:

$$M(-4, 2),$$

$$A_1(6, 10), A_2(-10, -1), A_3(0, 4), A_4(5, -7), A_5(6, -2), A_6(4, 8).$$

### 3.3. Примерный перечень вопросов к экзамену

Ниже приведены полный перечень вопросов к экзамену. Жирным выделены вопросы, относящиеся к темам, затронутым в настоящем ЭУМК.



1. Моделирование прямой и плоскости
2. Взаимное положение графических элементов на плоскости и в пространстве
3. Плоские полигоны и их свойства
4. Понятие аффинного пространства
5. Декартовы системы координат в аффинном пространстве
6. Преобразования аффинных пространств. Аффинные преобразования
7. Движения в аффинном пространстве
8. Понятие и основные типы проективных преобразований. Ортографические проекции
9. Понятие и основные типы проективных преобразований. Аксонометрические проекции
10. Понятие и основные типы проективных преобразований. косоугольные проекции
11. Понятие и основные типы проективных преобразований. Центральные проекции
12. Базовые растровые алгоритмы
13. Выпуклая оболочка множества точек. Алгоритмы построения выпуклой оболочки
14. Триангуляция полигонов методом хорд
15. Триангуляция полигонов диагоналями. Триангуляция полигонов методом отрезания ушей
16. Триангуляция Делоне множества точек на плоскости
17. Алгоритмы отсечения и удаления невидимых рёбер. Алгоритм Сазерленда-Козна
18. Алгоритмы удаления невидимых граней. Метод трассировки лучей. Алгоритм художника. Алгоритм Робертса. Метод z-буфера
19. Основные понятия геометрической оптики. Законы геометрической оптики. Отражение и преломление светового луча
20. Методы построения оптических эффектов. Условия видимости оптических эффектов. Построение тени точки и других геометрических объектов
21. Методы построения оптических эффектов. Условия видимости оптических эффектов. Построение отражения точки и других геометрических объектов
22. Методы построения оптических эффектов. Условия видимости оптических эффектов. Построение преломления точки и других геометрических объектов
23. Приближение кривых и поверхностей. Интерполяция линий и поверхностей методом Лагранжа и методом наименьших квадратов

24. Приближение кривых и поверхностей. Аппроксимация линий и поверхностей методом наименьших квадратов
25. Классификация поверхностей. Построение каркаса для каркасной поверхности
26. Классификация поверхностей. Моделирование кинематических поверхностей
27. Цветовые модели. Геометрическая интерпретация и преобразования цветовых моделей
28. Моделирование освещённости и цвета поверхностей. Функция закраски Фонга
29. Моделирование освещённости и цвета поверхностей. Методы закраски поверхностей
30. Моделирование трёхмерных тел

## 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

### 4.1. Фрагмент учебной программы

#### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель** учебной дисциплины – ознакомить студентов с математическими методами графического представления разнообразных объектов, особенностями их моделирования и визуализации, обусловленными свойствами самих объектов, их расположением и сферами применения полученных изображений.

#### Задачи учебной дисциплины:

1. Закрепить ранее изученные и изучить новые математические модели основных геометрических объектов, их взаиморасположения и взаимодействия;
2. Изучить основные преобразования геометрических пространств, широко используемые при моделировании и визуализации компьютерной графики;
3. Сформировать навыки решения типовых задач в области компьютерной графики.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Компьютерная графика» компонента учреждения образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Математические методы компьютерной графики» тесно связана с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ». Методы, излагаемые в данном курсе, используются в дисциплине «Программирование компьютерной графики».

#### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математические методы компьютерной графики» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций:

***универсальные*** компетенции:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;

УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности;

***базовые профессиональные*** компетенции:

БПК-1. Применять аппарат дифференциального и интегрального исчисления, методы аналитической геометрии и линейной алгебры для построения математических моделей и решения прикладных задач;

***специализированные*** компетенции:

СК-2. Применять полученные теоретические и практические навыки для решения задач компьютерной графики в профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:** типы компьютерной графики; основные математические модели геометрических объектов; методы и алгоритмы определения их расположения относительно друг друга и наблюдателя; особенности визуализации геометрических объектов и их свойств (цвета, освещения, прозрачности);

**уметь:** строить математические модели геометрических объектов; выбирать и применять методы и алгоритмы визуализации для решения типовых задач вычислительной геометрии и компьютерной графики;

**владеть:** основными методами и алгоритмами моделирования и визуализации геометрических объектов.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается во 2 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Математические методы компьютерной графики» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 102 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Введение в компьютерную графику

### Тема 1.1. Введение в компьютерную графику

Определение и основные задачи компьютерной графики. Место компьютерной графики в современной информатике. Области применения компьютерной графики. История развития компьютерной графики. Интерактивная компьютерная графика. Виды компьютерной графики.

## Раздел 2. Математические основы компьютерной графики

### Тема 2.1. Моделирование элементарных геометрических объектов

Элементарные объекты: прямая, отрезок прямой, луч, полигон, полиэдр. Алгоритмы определения свойств и взаимного расположения объектов на плоскости и в пространстве. Алгоритмы генерирования случайных полигонов.

### Тема 2.2. Аффинные преобразования

Линейное преобразование, его основные свойства. Матрица линейного преобразования. Аффинные преобразования. Простейшие аффинные преобразования: перенос, поворот, масштабирование, вращение. Методы расчёта матриц сложных преобразований.

### Тема 2.3. Проективные преобразования

Системы координат в компьютерной графике. Классификация проекций. Типы параллельных проекций. Свойства параллельных проекций. Типы центральных (перспективных) проекций. Свойства центральных проекций. Точки схода. Однородные координаты. Проективные алгоритмы сложных преобразований.

## 4.2. Рекомендуемая литература

### Основная

1. Никулин, Е. А. Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учебное пособие / Е. А. Никулин. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 708 с.

2. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра. Практикум : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по спец. "Прикладная математика",

"Информатика", "Актуарная математика" и напр. спец. "Экономическая кибернетика", "Комп. безопасность", "Прикладная информатика" / Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов, В. М. Ширяев. — Минск : Вышэйшая школа, 2018. — 382 с. : ил. ; 20x14 см. — (Для студентов учреждений высшего образования). — Библиогр.: с. 380–381.

3. Геометрия и алгебра : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» [Электронный ресурс] / БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики ; сост.: Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов. — Минск : БГУ, 2020. — 2803 с. : ил. — Библиогр.: с. 2802–2803. — Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/242860>. — Дата доступа: 10.10.2023.

#### **Дополнительная**

4. Ершов, А. В. Линейные и аффинные пространства и отображения: учебно-методическое пособие / А. В. Ершов. — М. : МФТИ. — 2016. — 69 с.

5. Васильков, Д. М. Геометрическое моделирование и компьютерная графика: вычислительные и алгоритмические основы: курс лекций [Электронный ресурс] / Д. М. Васильков. — Минск: БГУ, 2011. — Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/27612>. — Дата доступа: 10.10.2023.

6. Казанцев, А. В. Основы компьютерной графики для программистов / А. В. Казанцев. — Казань : Казанский государственный университет — 2005. — 94 с.

### **4.3. Электронные ресурсы**

1. 3Blue1Brown [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.3blue1brown.com/>. — Дата доступа: 10.10.2023.

3Blue1Brown – это в первую очередь YouTube-канал, содержащий различные математические уроки, задачи и открытия. Как пишет его создатель Грант Сандерсон, «это некая комбинация математики и развлечения». Цель данного канала – упростить объяснения различных математических понятий, явлений и задач при помощи средств визуализации (построение графиков, анимации и др.). Также есть официальный сайт, где можно найти текстовые версии уроков. Темы можно разделить на две категории:

- те, которые люди специально ищут, например, линейная алгебра, нейронные сети, математический анализ и т.д.;

- математические задачи, о которых многие люди не слышали, и которые кажутся сложными на первый взгляд, однако если посмотреть на них под другим углом, то оказываются решаемыми и красивыми.

Говоря общо, первая категория раскрывает пользу математики, вторая – её красоту. Разумеется, грань между этими категориями довольно зыбкая. Более подробно о канале и его авторе можно прочитать здесь: <https://www.3blue1brown.com/about>. В контексте данного курса хотелось бы обратить внимание в первую очередь на его материалы по линейной алгебре: <https://www.3blue1brown.com/topics/linear-algebra>.

YouTube-канал: <https://www.youtube.com/3blue1brown>

Сайт: <https://www.3blue1brown.com/>

2. Desmos [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.desmos.com/calculator>. – Дата доступа: 10.10.2023.

Онлайн-калькулятор, позволяющий проводить различные манипуляции с графиками (строить, создавать анимации и т.д.).

<https://www.desmos.com/calculator>

Руководство на русском языке:

[https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos\\_User\\_Guide\\_RU.pdf](https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_RU.pdf)

3. Math24.pro [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://math24.pro/>. – Дата доступа: 10.10.2023.

На этом сайте размещено более 85 калькуляторов, осуществляющих множество различных операций: арифметических, алгебраических, решение уравнений, осуществление преобразований и т.д. Кроме ответа на поставленную задачу этот сервис выдаёт также подробное пошаговое решение.

В контексте данного курса наиболее полезными, пожалуй, являются следующие калькуляторы:

- Операции с матрицами: умножение, нахождение определителя, обратной, псевдообратной матрицы и другие

[https://math24.pro/matrix\\_product](https://math24.pro/matrix_product)

- Построение графиков функций (2D, 3D, в полярных координатах, параметрических функций)

<https://math24.pro/plot>

- Решение уравнений, в т.ч. алгебраических

<https://math24.pro/equation>

4. OnlineMSchool [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://onlinemschool.com/math/assistance/>. – Дата доступа: 10.10.2023.

Сайт, посвящённый обучению математике. Содержит множество калькуляторов, в т.ч. для построения графиков, операций с векторами и матрицами.

<https://onlinschool.com/math/assistance/>

5. Symbolab [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.symbolab.com/>. – Дата доступа: 10.10.2023.

Сайт с множеством инструментов, помогающих обучению математике. Включает программы, решающие уравнения различных типов (солверы), графический калькулятор и прочие вспомогательные инструменты, а также страницы с практическим обучением по разным математическим разделам: алгебра, тригонометрия, матричный анализ и т.д.

<https://www.symbolab.com/>