БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

_______________ О.Г. Прохоренко

«30» июня 2023 г.

Регистрационный № УД – 198/б.

Математический анализ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:

6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование

2023 г.

Учебная программа составлена на основе примерного учебного плана регистрационный № 6-05-05-031/пр. от 30.01.2023, учебных планов: № 6-5.4-61/01 от 15.05.2023 и № 6-5.4-62/01 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:
Н.В. Бровка, заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, профессор;
И.Л. Васильев, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
О.Б. Долгополова, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
Т.Н. Жоровина, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
В.Г. Кротов, профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Т.С. Мардвилко, доцент кафедры теории функций Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
В.А. Павловский, ассистент кафедры теории функций Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
А.Б. Антоневич, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Н.В. Гриб, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:
Кафедрой теории функций Белорусского государственного университета
(протокол № 18 от 07.06.2023);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий
кафедрой теории функций Н.В. Бровка

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Математический анализ» – создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Задачи учебной дисциплины «Математический анализ»:

1. Формирование у студентов понятия числа.
2. Изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;
3. Изучение основ дифференциального и интегрального исчисления;
4. Использование основ дифференциального и интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

Место учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Математический анализ» относится **к модулю** «Основы анализа» государственного компонента для специальности 6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование.

Связи с другими учебными дисциплинами

Учебная дисциплина «Математический анализ» является основой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Вариационное исчисление и методы оптимизации», «Интегральные уравнения».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математический анализ» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-4. Применять понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа для изучения моделей окружающего мира;

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

– новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

владеть:

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Математический анализ» изучается в 1, 2, 3 семестрах очной формы получения высшего образования.

Всего на изучение дисциплины отведено 636 часов, в том числе 422 аудиторных часа, из них: лекции – 198 часов; практические занятия – 188 часов, управляемая самостоятельная работа – 36 часов, из них:

– 1 семестр – всего: 216 часов, в том числе 142 аудиторных часа, из них: лекции – 66 часов, практические занятия – 64 часа, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 5 зачетных единиц.

– 2 семестр – всего: 204 часа, в том числе 136 аудиторных часов, из них: лекции – 64 часа, практические занятия – 60 часов, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетных единиц.

– 3 семестр – всего: 216 часов, в том числе 144 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, практические занятия – 64 часа, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет и экзамен в каждом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I. Элементы теории множеств

Тема 1.1 Правила логического вывода. Множества, отношения, функции

Высказывания. Кванторы общности и существования. Множества и операции над ними. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Понятие отображения (функции). Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение. Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Тема 1.2 Множество действительных чисел

Аксиоматика и модели множества действительных чисел. Важнейшие подмножества. Границы числовых множеств. Ограниченные множества. Точные границы множества. Теорема Дедекинда.

Принцип Архимеда. Позиционные системы счисления.

Понятие о мощности множества, основные мощности. Теорема Кантора о несчетности континуума.

РАЗДЕЛ II. Теория пределов

Тема 2.1 Предел последовательности

Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности). Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

Тема 2.2 Предел функции

Определение предела функции по Коши и по Гейне. Общие свойства предела функции. Предел и операции над функциями. Предел функции и неравенства. Замечательные пределы.

Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы Харди и Ландау. Критерий Коши существования предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Тема 2.3 Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.

РАЗДЕЛ III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема 3.1 Дифференцируемые функции

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости. Связь дифференцирования с операциями над функциями. Производная обратной функции. Производные высших порядков.

Экстремумы функции. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши). Правила Лопиталя.

Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши. Разложение элементарных функций.

Монотонность и знак производной. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

РАЗДЕЛ IV. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 4.1 Неопределенный интеграл

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Интегрирование по частям и замена переменной.

Интегрирование рациональных функций, интегрирование некоторых иррациональностей.

Тема 4.2 Определенный интеграл Римана

Примеры задач, приводящих к понятию интеграла. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.

Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении.

Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

Тема 4.3 Приложения определенного интеграла

Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции, площадь криволинейного сектора, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

Тема 4.4 Несобственные интегралы

Несобственные интегралы и их свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

РАЗДЕЛ V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Тема 5.1 Метрические пространства

Метрика, шары, открытые множества. Внутренние точки множества, внутренность. Предельные и изолированные точки множества. Замкнутые множества, замыкание, граница. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Компактные и связные множества.

Предел последовательности и функции в метрическом пространстве. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.

Непрерывные функции на метрических пространствах. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Тема 5.2 Дифференцируемые функции многих переменных

Линейные отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, гиперплоскость, общий вид линейного отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$. Дифференцируемость, производная и ее свойства. Формула Лагранжа.

Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца.

Полином Тейлора, формула Тейлора.

Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Тема 5.3 Дифференцируемые векторные функции

Векторные функции, компоненты. Линейные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Дифференцируемые векторные функции. Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции.

Гомеоморфизм. Теорема Брауера. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

РАЗДЕЛ VI. Теория рядов

Тема 6.1 Числовые ряды

Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши.

Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши.

Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Ассоциативность и коммутативность в теории рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Тема 6.2 Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, критерий Коши. Теорема о перестановке предельных переходов. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини. Степенные ряды.

Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.

Тема 6.3 Ряды Фурье

Тригонометрическая система, ряды Фурье. Интегральные представления для сумм Фурье.

Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Дирихле-Жордана.

Тема 6.4 Интегралы, зависящие от параметра

Элементарная теория. Собственные интегралы, зависящие от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Несобственные интегралы от параметра: равномерная сходимость, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле. Гамма- и бета-функции Эйлера.

РАЗДЕЛ VII. Интегрирование в евклидовых пространствах

Тема 7.1 Мера Жордана в $\mathbb{R}^d$

Построение меры Жордана на евклидовых пространствах. Критерии измеримости. Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, неизмеримое по Жордану множество. Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Тема 7.2 Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану. Необходимое условие интегрируемости.

Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла. Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия. Замена переменной в интеграле Римана.

Тема 7.3 Криволинейные интегралы. Формула Грина

Положительная ориентация плоского контура. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Тема 7.4 Поверхностные интегралы

Поверхность, площадь поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности, ориентация. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского. Теория поля.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР (аудиторный контроль)	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Элементы теории множеств**	**14**	**14**				2	
1.1	Правила логического вывода. Множества, отношения, функции	6	8					
1.2	Множество действительных чисел	8	6				2	контрольная работа
2	**Теория пределов**	**26**	**30**				**6**	
2.1	Предел последовательности	10	14				4	коллоквиум, контрольная работа
2.2	Предел функции	4	10					
2.3	Непрерывные функции	12	6				2	контрольная работа по темам 2.2-2.3
3	**Дифференциальное исчисление функций одной переменной**	**26**	**20**				**4**	
3.1	Дифференцируемые функции	26	20				4	коллоквиум, контрольная работа
	Всего за 1 семестр	**66**	**64**				**12**	
4	**Интегральное исчисление**	**30**	**34**				**8**	

	функций одной переменной							
4.1	Неопределенный интеграл	6	14				2	контрольная работа
4.2	Определенный интеграл Римана	14	4					
4.3	Приложения определенного интеграла	4	8				2	контрольная работа по темам 4.2-4.3
4.4	Несобственные интегралы	6	8				4	коллоквиум, контрольная работа
5	**Дифференциальное исчисление функций многих переменных**	**34**	**26**				**4**	
5.1	Метрические пространства	10	6					
5.2	Дифференцируемые функции многих переменных	14	14				2	коллоквиум
5.3	Дифференцируемые векторные функции	10	6				2	контрольная работа по темам 5.2-5.3
	Всего за 2 семестр	**64**	**60**				**12**	
6	**Теория рядов**	**38**	**38**					
6.1	Числовые ряды.	8	12				2	контрольная работа
6.2	Функциональные последовательности и ряды.	12	10				4	коллоквиум, контрольная работа
6.3	Ряды Фурье.	8	4					
6.4	Интегралы, зависящие от параметра.	10	12				2	контрольная работа
7	**Интегрирование в евклидовых пространствах**	**30**	**26**					
7.1	Мера Жордана в $\mathbb{R}^d$.	4	2					

7.2	Интеграл Римана в $\mathbb{R}^{d}$.	10	14				2	коллоквиум
7.3	Криволинейные интегралы. Формула Грина.	10	6				2	контрольная работа по темам 7.2-7.3
7.4	Поверхностные интегралы.	6	4					
	Всего за 3 семестр	**68**	**64**				**12**	
	Всего по дисциплине	**198**	**188**				**36**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1 Зорич, В. А. Математический анализ: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и направлениям 01.03.01 Математика, 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.01 Математика и компьютерные науки : в 2 ч. / В. А. Зорич. - Изд. 10-е, испр. - Москва : МЦНМО, 2020.

2 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : Учебник. – 5-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 444 с.

3 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ : Учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 467 с.

4 Кротов, В. Г. Математический анализ : учеб. пособие для студ. уво по математическим спец. / В. Г. Кротов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2017. - 375 с. – URL:http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394.

5 Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие [для студентов физических и механико-математических специальностей вузов] / Б. П. Демидович. - Изд. 24-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 623 с. – URL: https://reader.lanbook.com/book/332675.

6 Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 1 / [И. Л. Васильев и др.]. – 2022. – 293 с.

7 Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 2 / [С. А. Бондарев и др.]. – 2023. – 355 с.

Перечень дополнительной литературы

8 Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.

9 С. М. Никольский. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука. 1990 и другие издания.

10 Э. И. Зверович. Вещественный и комплексный анализ. Т. 1–6. Минск: Вышэйшая школа, 2008.

11 Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М.: Наука. 2001 и другие издания.

12 Сборник задач по математическому анализу /Под ред. Л. Д. Кудрявцева, М.: Наука, Т. 1. – 1984, Т. 2. – 1986, Т. 3 – 1994 и другие издания.
13 В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. Математический анализ. М.: Наука, 1985 и другие издания.
14 А. М. Тер-Крикоров, И. И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.
15 У. Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976 и другие издания.
16 Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.
17 Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Перечень рекомендуемых средств диагностики:
- Контрольная работа.
- Коллоквиум.

Формой промежуточной аттестации учебным планом предусмотрен **зачет и экзамен в каждом семестре.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Формирование отметки текущей аттестации: отметка текущей аттестации представляет собой среднеарифметическую величину отметок по всем формам текущего контроля знаний по учебной дисциплине.

Итоговая отметка по учебной дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки текущей аттестации составляет 40 %, экзаменационной отметки– 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Примерный перечень вопросов для коллоквиума

Тема 2.1 Предел последовательности (2 ч.)
Примерный перечень вопросов:

Ограниченные последовательности.

Предел последовательности и его свойства.

Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности.

Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 3.1 Дифференцируемые функции (2 ч.)
Примерный перечень вопросов:

Задачи, приводящие к понятию производной.

Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Производные элементарных функций.
Правила дифференцирования.
Связь непрерывности и дифференцируемости.
Связь дифференцирования с операциями над функциями.
Производная обратной функции.
Производные высших порядков.
Экстремумы функции.
Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).
Правила Лопиталя.
Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.
Разложение элементарных функций.
Монотонность и знак производной.
Достаточные условия экстремума.
Алгоритм отыскания глобального экстремума.
Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.
Форма контроля – коллоквиум.

Тема 4.4 Несобственные интегралы (2 ч.)
Примерный перечень вопросов:
Несобственные интегралы и их свойства.
Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.
Главное значение по Коши.
Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
Абсолютная и условная сходимость.
Признак сравнения для интегралов от положительных функций.
Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.
Форма контроля – коллоквиум.

Тема 5.2 Дифференцируемые функции многих переменных (2 ч.)
Примерный перечень вопросов:
Линейные отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, гиперплоскость, общий вид линейного отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$.
Дифференцируемость, производная и ее свойства.
Формула Лагранжа.
Частные производные.
Достаточное условие дифференцируемости.
Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.
Частные производные высших порядков.
Теорема Шварца.
Полином Тейлора, формула Тейлора.
Квадратичные формы и их матрицы.
Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
Локальные экстремумы функции.
Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции.

Достаточное условие экстремума.
Форма контроля – коллоквиум.

Тема 6.2 Функциональные последовательности и ряды (2 ч.)
Примерный перечень вопросов:
Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, критерий Коши.
Теорема о перестановке предельных переходов.
Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.
Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда.
Теорема Дини.
Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.
Форма контроля – коллоквиум.

Тема 7.2 Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$ (2 ч.)
Примерный перечень вопросов:
Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану.
Необходимое условие интегрируемости.
Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу.
Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега.
Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность.
Неравенства для интеграла.
Мера декартова произведения измеримых множеств.
Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия.
Форма контроля – коллоквиум.

Примерный перечень заданий для контрольной работы

Тема 1.2 Множество действительных чисел (2 ч.)

1. Доказать тождество
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

2. Пользуясь формулой бинома Ньютона, найти:
   a) 6-й член разложения $\left(\sqrt{x}+x\right)^{11}$;
   b) член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{20}$, не содержащий x;
   c) наибольший коэффициент многочлена $(2+3x)^{12}$.

3. Является ли число $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ рациональным?

4. Найти $\sup X$ и $\inf X$, а также указать наибольший и наименьший элементы (в случае их существования):
   a) $X = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; b) $X = \{\log_2 x : 2 < x \le 8\}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2.1 Предел последовательности (2 ч.)

1. Сформулировать определения того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ а) на языке «$\varepsilon - \delta$», б) с помощью понятия окрестности, в) доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{7n^2+n} = \frac{3}{7}$.

2. Установить, является ли последовательность $a_n = (3^{(-1)^n} + 4^{(-1)^{n+1}n})^{1/n}$ сходящейся и обосновать ответ.

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5n^{12}-1)(4n+2)^{12}}{(3n^2+2)^6(n+4)^{14}}$.

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3^n+2}{3^n}\right)^{2\cdot 3^n-1} + \frac{5n\cos^3 n}{2n^2+1}\right)$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2.2 Предел функции. Тема 2.3 Непрерывные функции (2 ч.)

1. Запишите определение на языке «$\varepsilon - \delta$» следующего утверждения и приведите соответствующий пример $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

2. Используя определение понятия предела, докажите, что $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}} = \frac{1}{3}$.

3. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2 3^x}{1+x^2 4^x}\right)^{\frac{1}{tg^2 x}}$ б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos x}-1}{\ln \sin x}$

4. Найдите эквивалентную в виде $A(x-2)^\alpha$ для функции

$$f(x) = 2^x - 4 + \lg^2(x-1).$$

5. Доказать по определению, что функция $f(x) = -2x^2 - 4$ непрерывна в точке $x_0 = 3$

6. Исследовать функцию на непрерывность, выяснить характер точек разрыва и построить график

$a)\quad f(x)=\begin{cases} |x|, & x<0,\\ x^2+1, & x\geq 0;\end{cases}\qquad b)\quad f(x)=x\,\mathrm{sign}\,x.$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.1 Дифференцируемые функции (2 ч.)

1. Найти производные функций

a) $y=\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}$, b) $y=e^{8\sin 5x+7\cos 3x}$, c) $y=\frac{2^x\ln\cos x}{x^2+\mathrm{tg}\,x}$.

2. Построить графики функции, определив экстремумы, интервалы монотонности и интервалы выпуклости

a) $y=x^3-5x^2+4$, b) $y=x^2e^x$, c) $y=\frac{x}{x^2-4}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4.1 Неопределенный интеграл (2 ч.)

Найти неопределенные интегралы

1) $\int \mathrm{tg}\,2x\,dx$, 2) $\int\frac{e^{2x}\sqrt[3]{\arcsin e^{2x}}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx$, 3) $\int(2x+3)\cos 5x\,dx$, 4) $\int\ln^2 x\,dx$,

5) $\int\frac{3x-2}{x^2+x+1}dx$, 6) $\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x^2(x^2+1)}dx$, 7) $\int\frac{dx}{\sin x}$, 8) $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4.2 Определенный интеграл Римана. Тема 4.3 Приложения определенного интеграла (2 ч.)

1. Вычислить по определению $\int_0^1 x dx$.

2. Вычислить

$a)\ \int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}},\ b)\ \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x},\ c)\ \int_0^1 xe^{-x}\,dx.$

3. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

$a)\ x=-2y^2,\ x=1-3y^2;$

$b)\ \rho=1\ (\rho\geq 1), \rho=3\cos 5\varphi.$

4. Вычислить длину кривой $x=5(t-\sin t), y=5(t-\cos t), 0\leq t\leq 2\pi$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4.4. Несобственные интегралы (2 ч.)

1. Исследовать несобственные интегралы на сходимость

a) $\int_3^{+\infty} \frac{xdx}{\ln^2 x}$, b) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x|\ln x|^p}$, c) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} dx$, d) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, $\quad p, q \in \mathbb{R}$.

2. Доказать, что несобственные интегралы сходятся условно:

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x^3}{x} dx, \qquad b) \int_e^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x} dx.$$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 5.2 Дифференцируемые функции многих переменных. Тема 5.3 Дифференцируемые векторные функции (2 ч.)

1. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x) = \|x\|, x \in \mathbb{R}^d$.

2. Найти частные производные и выписать полный дифференциал функции

$$f(x) = \ln(x + yz) - \operatorname{tg}(xy + z).$$

3. Исследовать на локальные экстремумы функцию двух переменных

$$f(x) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

4. Найти матрицу Якоби функции

a) $f(x, y) = (e^x \cos y\,, e^x \sin y)$,

b) $f(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \sin\theta\,, r \sin\varphi \cos\theta\,, r\cos\theta)$.

5. Проверить условия теоремы об обратной функции для функции $f(x, y) = (e^x \cos y\,, e^x \sin y)$ и найти области обратимости.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.1 Числовые ряды (2 ч.)

1. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{36k^2 - 24k - 5}.$$

2. Исследовать ряды на сходимость

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{3^{k^2}}, b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{k^2 + 8}, c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} + \sqrt[4]{k}}{3k - \sqrt[3]{k}}, d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k^2}, e) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k!)}.$$

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 3k}{k\sqrt[5]{2k+1}},\ b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln(k+1)},\ c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k}{k}.$$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.2 Функциональные последовательности и ряды (2 ч.)

1. Доказать равномерную сходимость последовательности

$$f_n(x)=\sqrt{n}\sin\frac{x}{n\sqrt{n}}$$

на множестве $D=[0,1]$.

2. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве D:
   a) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin^2\frac{\sqrt{x}}{1+k^2x}$, $D=[0,+\infty)$;
   b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} k\sin^3 kx}{\sqrt{k}}$, $D=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Исследовать функцию

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x}{k+x}$$

на дифференцируемость.

4. Найти область сходимости степенного ряда:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{e^k}(x-e)^k; \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^k}{2^k+3^k}x^k.$$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.4 Интегралы, зависящие от параметра (2 ч.)

1. Найти области равномерной сходимости несобственных интегралов от параметра

$$a)\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^y},\qquad b)\ \int_1^{2}\frac{dx}{(x-1)^y},\ c)\ \int_1^{\infty}x^y e^{-x^y}\,dx,\ d)\ \int_0^{\infty}(y^3+x)e^{-yx^2}\,dx.$$

2. Доказать равномерную сходимость интеграла на указанном множестве S

$$a)\ \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx,\ \ S=[0,\infty);$$

$$b)\ \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x^2y^2},\ \ S=(-\infty,+\infty).$$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 7.2 Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$. Тема 7.3 Криволинейные интегралы. Формула Грина (2 ч.)

1.Изменить порядок интегрирования

a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$, b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$, c) $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

2. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядках

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$, b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$, c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy$

3. Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми

a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2 \geq a^2$,

b) $(x^2+y^2)^2 = a(x^2-3xy^2)$,

c) $(x^2+y^2)^2 = 8axy$, $(x-a)^2+(y-a)^2 \leq a^2$.

4. Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода

a) $\oint\limits_C (x+y)ds$, C - треугольник с вершинами в точках $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$,

b) $\oint\limits_C y^2 ds$, C - арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$,

c) $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, C - окружность $x^2+y^2=ax$.

5. Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода

a) $\oint\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, C - парабола $y=x^2, x\in[-1,1]$, ориентированная возрастанием x,

b) $\oint\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy$, C - положительно ориентированный эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

c) $\oint\limits_C (2a-y)dx+xdy$, C - арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$

Форма контроля – контрольная работа.

Примерная тематика практических занятий

1 семестр

Занятие № 1. Высказывания. Кванторы общности и существования. Множества и операции над ними.

Занятие № 2. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Понятие отображения (функции). Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение.

Занятие № 3. Индукция, тождества и неравенства.

Занятие № 4. Комбинаторика. Бином Ньютона.

Занятие № 5. Аксиоматика и модели множества действительных чисел. Важнейшие подмножества.

Занятие № 6. Границы числовых множеств. Ограниченные множества Точные границы множества.

Занятие № 7. Понятие мощности множества, основные мощности. Теорема Кантора о несчетности континуума.

Занятие № 8. Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства.

Занятие № 9. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.

Занятие № 10. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Занятие № 11. Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Занятие № 12. Смежные и рекуррентные последовательности.

Занятие № 13. Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности).

Занятие № 14. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

Занятие № 15. Определение предела функции по Коши и по Гейне. Общие свойства предела функции. Предел и операции над функциями.

Занятие № 16. Предел функции и неравенства. Замечательные пределы.

Занятие № 17. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы.

Занятие № 18. Сравнение асимптотического поведения функций.

Занятие № 19. Критерий Коши существования предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции

Занятие № 20. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Занятие № 21. Классификация разрывов функции.

Занятие № 22. Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Занятие № 23. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Занятие № 24. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости.

Занятия № 25, 26. Связь дифференцирования с операциями над функциями. Производная обратной функции. Производные высших порядков.

Занятие № 27. Экстремумы функции. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

Занятие № 28. Правила Лопиталя.

Занятие № 29. Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.

Занятие № 30. Разложение элементарных функций.

Занятие № 31. Монотонность и знак производной. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Занятие № 32. Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

2 семестр

Занятие № 1. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.

Занятие № 2. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций.

Занятие № 3. Интегрирование по частям и замена переменной.

Занятие № 4. Интегрирование рациональных функций.

Занятие № 5. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и гиперболические функций.

Занятия № 6, 7. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Занятие № 8. Примеры задач, приводящих к понятию интеграла. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

Занятие № 9. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Занятие № 10. Длина пространственной кривой.

Занятие № 11. Площадь криволинейной трапеции.

Занятие № 12. Площадь криволинейного сектора.

Занятие № 13. Площадь поверхности вращения. Объем тела вращения.

Занятие № 14. Несобственные интегралы и их свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Занятие № 15. Признак сравнения для интегралов от положительных функций.

Занятие № 16. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

Занятие № 17. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

Занятие № 18. Предел последовательности и функции в метрическом пространстве. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности.

Занятие № 19. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества.

Занятие № 20. Непрерывные функции на метрических пространствах. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве.

Занятие № 21. Линейные отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, гиперплоскость, общий вид линейного отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$. Дифференцируемость, производная и ее свойства. Формула Лагранжа.

Занятия № 22, 23. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца.

Занятие № 24. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

Занятие № 25. Полином Тейлора, формула Тейлора.

Занятия № 26, 27. Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Занятие № 28. Векторные функции, компоненты. Линейные отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Дифференцируемые векторные функции.

Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции.

Занятие № 29. Гомеоморфизм. Теорема Брауера. Теорема об обратной функции.

Занятие № 30. Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

3 семестр

Занятие № 1. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши.

Занятия № 2, 3, 4. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши.

Занятия № 5, 6. Абсолютная и условная сходимость, связь между ними. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Занятие № 7. Равномерная сходимость функциональной последовательности, критерий Коши. Теорема о перестановке предельных переходов.

Занятие № 8. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.

Занятие № 9. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда.

Занятия № 10, 11. Степенные ряды.

Занятие № 12. Ряды Фурье 2π-периодических функций.

Занятие № 13. Ряды Фурье $2l$-периодических функций.

Занятие № 14. Элементарная теория интегралов с параметром. Собственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Занятие № 15. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов от параметра.

Занятие № 16. Равномерная сходимость несобственных интегралов от параметра.

Занятие № 17. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Занятия № 18, 19. Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле. Гамма- и бета-функции Эйлера.

Занятие № 20. Построение меры Жордана на евклидовых пространствах. Критерии измеримости. Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, неизмеримое по Жордану множество. Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Занятие № 21. Двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному.

Занятие № 22. Замена переменных в двойном интеграле.

Занятие № 23. Вычисление площадей.

Занятие № 24. Вычисление объемов.

Занятия № 25, 26. Тройные интегралы. Замена переменных в тройном интеграле.

Занятие № 27. Некоторые приложения тройных интегралов.

Занятие № 28. Криволинейные интегралы первого рода и их приложения.

Занятие № 29. Криволинейные интегралы второго рода и их приложения.

Занятие № 30. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Занятие № 31. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Занятие № 32. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского. Теория поля.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Математический анализ» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, учебное пособие для практических занятий, материалы текущего контроля, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Высказывания. Кванторы общности и существования.
2. Множества и операции над ними.
3. Декартово произведение множеств.
4. Бинарные отношения. Понятие отображения (функции).
5. Сюръекция, инъекция, биекция.
6. Обратное отображение.
7. Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.
8. Аксиоматика и модели множества действительных чисел.
9. Важнейшие подмножества.
10. Границы числовых множеств.
11. Ограниченные множества.
12. Точные границы множества.
13. Теорема Дедекинда.
14. Принцип Архимеда.
15. Позиционные системы счисления.
16. Понятие о мощности множества, основные мощности.
17. Теорема Кантора о несчетности континуума.
18. Ограниченные последовательности.
19. Предел последовательности и его свойства.
20. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.
21. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
22. Теорема о сходимости монотонных последовательностей.
23. Число Эйлера.
24. Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности.

25. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.
26. Определение предела функции по Коши и по Гейне.
27. Общие свойства предела функции.
28. Предел и операции над функциями.
29. Предел функции и неравенства.
30. Замечательные пределы.
31. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы.
32. Символы Харди и Ландау.
33. Критерий Коши существования предела функции.
34. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
35. Непрерывность функции в точке.
36. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями.
37. Непрерывность композиции.
38. Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши.
39. Теорема о непрерывном образе отрезка.
40. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.
41. Колебание функции.
42. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции.
43. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.
44. Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.
45. Задачи, приводящие к понятию производной.
46. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.
47. Производные элементарных функций.
48. Правила дифференцирования.
49. Связь непрерывности и дифференцируемости.
50. Связь дифференцирования с операциями над функциями.
51. Производная обратной функции.
52. Производные высших порядков.
53. Экстремумы функции.
54. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).
55. Правила Лопиталя.
56. Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.
57. Разложение элементарных функций.
58. Монотонность и знак производной.
59. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.
60. Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости.
61. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.
62. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.

63. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций.
64. Интегрирование по частям и замена переменной.

2 семестр

1. Интегрирование рациональных функций.
2. Интегрирование некоторых иррациональностей.
3. Примеры задач, приводящих к понятию интеграла.
4. Определение интеграла Римана.
5. Необходимое условие интегрируемости.
6. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу.
7. Классы интегрируемых функций.
8. Свойства определенного интеграла.
9. Теоремы о среднем значении.
10. Формула Ньютона-Лейбница.
11. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
12. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.
13. Длина пространственной кривой.
14. Площадь криволинейной трапеции.
15. Площадь поверхности вращения.
16. Объем тела вращения.
17. Несобственные интегралы и их свойства.
18. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.
19. Главное значение по Коши.
20. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
21. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
22. Признак сравнения для интегралов от положительных функций.
23. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.
24. Метрика, шары, открытые множества.
25. Внутренние точки множества, внутренность.
26. Предельные и изолированные точки множества.
27. Замкнутые множества, замыкание, граница.
28. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств.
29. Компактные и связные множества.
30. Предел последовательности и функции в метрическом пространстве.
31. Непрерывность функции на метрическом пространстве.
32. Глобальный критерий непрерывности.
33. Ограниченные множества.
34. Последовательность Коши, полнота метрического пространства.
35. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.
36. Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.
37. Непрерывные функции на метрических пространствах.
38. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества.
39. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве.

40. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
41. Линейные отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, гиперплоскость, общий вид линейного отображения.
42. Дифференцируемость, производная и ее свойства.
43. Формула Лагранжа.
44. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости.
45. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.
46. Частные производные высших порядков.
47. Теорема Шварца.
48. Полином Тейлора, формула Тейлора.
49. Квадратичные формы и их матрицы.
50. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
51. Локальные экстремумы функции.
52. Необходимые условия локального экстремума, стационарные точки функции.
53. Достаточное условие локального экстремума.
54. Векторные функции, компоненты.
55. Линейные отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.
56. Дифференцируемые векторные функции.
57. Свойства производной и связь с производными компонент.
58. Матрица Якоби.
59. Производная композиции.
60. Гомеоморфизм.
61. Теорема Брауера.
62. Теорема об обратной функции.
63. Теорема о неявной функции.
64. Формулы для определения производных неявной функции.
65. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы.
66. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда.
67. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда.
68. Операции над сходящимися рядами.
69. Необходимое условие сходимости ряда.
70. Критерий Коши.
71. Положительные ряды, критерий сходимости.
72. Признак сравнения и его различные формы.
73. Признак Коши.
74. Теорема Куммера.
75. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса.
76. Интегральный признак Коши.
77. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.
78. Преобразование Абеля.
79. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов.
80. Ряды Лейбница.
81. Ассоциативность и коммутативность в теории рядов.
82. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

3 семестр

1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, критерий Коши.
2. Теорема о перестановке предельных переходов.
3. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.
4. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини.
5. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.
6. Тригонометрическая система, ряды Фурье.
7. Интегральные представления для сумм Фурье.
8. Лемма Римана-Лебега.
9. Принцип локализации.
10. Условия сходимости ряда Фурье в точке.
11. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье.
12. Теорема Дирихле-Жордана.
13. Элементарная теория интегралов с параметром.
14. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.
15. Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле.
16. Гамма- и бета-функции Эйлера.
17. Положительная ориентация плоского контура.
18. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
19. Формула Грина.
20. Односвязные области.
21. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла.
22. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.
23. Поверхность, площадь поверхности.
24. Нормаль и касательная плоскость к поверхности, ориентация.
25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.
27. Теория поля.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дифференциальные уравнения	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Изменений не требуется (протокол № 18 от 07.06.2023)
Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется (протокол № 18 от 07.06.2023)
Экстремальные задачи и вариационное исчисление	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется (протокол № 18 от 07.06.2023)
Теория функций комплексного переменного	Кафедра теории функций	нет	Изменений не требуется (протокол № 18 от 07.06.2023)
Уравнения математической физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Изменений не требуется (протокол № 18 от 07.06.2023)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
______________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
Доктор педагогических наук, профессор _______________Н.В. Бровка

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
Доктор физико-математических наук _______________С.М. Босяков