Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
______________ Самаль С.А.
«29» июня 2023 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_____________ Босяков С.М.
«29» июня 2023 г.

Основы высшей математики и теории вероятностей

Электронный учебно-методический комплекс
для специальности: 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации»

Регистрационный № 2.4.2-24/351

Авторы:
Велько О. А., старший преподаватель;
Моисеева Н. А., старший преподаватель.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 31.08.2023 г., протокол № 10.

Минск 2023

УДК 51(075.8)+519.2(075.8)
В 282

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 10 от 31.08.2023 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 10 от 29.06.2023 г.

А в т о р ы:

Велько Оксана Александровна, старший преподаватель кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ,

Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ.

Рецензенты:

кафедра общенаучных дисциплин Института предпринимательской деятельности (заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, кандидат философских наук, доцент Г.В. Бороздина);

Гулина О.В., заместитель декана факультета экономики и менеджмента, учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Велько О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации» / О. А. Велько , Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 244 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 241–244.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей» предназначен для студентов специальности 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, тестовые задания, контрольные работы, задания эвристического типа, вопросы для подготовки к экзамену, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей» предназначен для студентов 1 курса специальности 6-05-0321-03 «Социальные коммуникации».

Комплекс подготовлен в соответствии с требованиями Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением министерства образования Республики Беларусь от 26.07.2011 № 167.

Содержание разделов ЭУМК соответствует образовательным стандартам, структуре и тематике типовой учебной программы по дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей».

Главные цели ЭУМК: помощь студентам в организации самостоятельной работы, повышение качества подготовки и усиление практико-ориентированности учебного процесса по дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей».

ЭУМК состоит из следующих разделов.

Теоретический. Включает аннотацию учебного пособия, написанного в соответствии с программой дисциплины. Материал данного пособия, наряду с конспектом лекций, может быть использован для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям, контрольным работам и экзамену.

Практический. Содержит задания практических занятий. Данные материалы используются для подготовки к практическим занятиям и их организации, для самостоятельной работы над курсом.

Раздел контроля знаний представлен вопросами к зачету, тренировочными тестами и промежуточными контрольными работами. Описаны формы диагностики и технология определения оценки по дисциплине с учетом текущей успеваемости.

Вспомогательный раздел включает рекомендуемую литературу и содержание учебной программы курса по отдельным темам, на основе которой построено изучение дисциплины и контроль знаний.

Связь социально-гуманитарной сферы и математики в последние годы становится все более тесной и многоплановой. Потребности развития как теории социальной коммуникации, так и ее экспериментальных и прикладных направлений требуют использования математических методов для описания и анализа тех явлений, которые она изучает, наблюдается стремление выражать законы социологии в математической форме. Проникновение математических методов в социально-гуманитарную сферу, связанное прежде всего с развитием экспериментальных и прикладных исследований, оказывает достаточно сильное влияние на ее развитие.

Изучение математики будущими специалистами социально-гуманитарной сферы, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует более успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умению задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления. В основе решения многих прикладных задач лежат методы математического моделирования. Умения корректно сформулировать вопрос на языке узких специалистов (например, математиков или программистов), адекватно интерпретировать полученные результаты с точки зрения социальных наук, уточнить и скорректировать выстроенную математическую модель являются важнейшими в методологическом арсенале будущего специалиста социально-гуманитарной сферы.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста. Учебная дисциплина «Основы высшей математики и теории вероятностей» основана на школьной учебной дисциплине «Математика» и является базой для изучения следующих учебных дисциплин: «Анализ и представление результатов социальных исследований», «Компьютерный анализ данных», «Прикладная статистика», формирующих навыки работы с профессиональной информацией. Кроме того, практические навыки, полученные при изучении дисциплины, будут полезны студентам при написании курсовых и дипломной работ, проведении исследовательских проектов, а также в самообразовании.

Целями изучения учебной дисциплины «Основы высшей математики и теории вероятностей» являются:

– изучить роль и место математики в современном мире и социологических исследованиях;

– овладеть основным математическим понятиям и методам;

– развить умение сформулировать проблему, используя математический язык, анализировать данные посредством количественных методов;

– использовать основные математические методы для решения задач, используемых в профессиональной деятельности;

– объяснить природу математических абстракций и возможности их использования в социально-гуманитарной и экономической сферах.

Задачами изучения дисциплины «Основы высшей математики и теории вероятностей» студентами являются:

– освоение математических методов решения задач, используемых в профессиональной деятельности;

– освоение междисциплинарных знаний, связанных с применением математических и статистических методов в профессиональной деятельности;

– стимулирование познавательного интереса к вопросам применения математических и статистических методов в социологических исследованиях.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен *знать*:

– роль и место математики в современном мире и социологических исследованиях;

– основные математические методы решения задач, используемых в профессиональной деятельности;

– природу математических абстракций и возможности их использования в социальной и экономической сферах;

– элементы теории множеств и их применение к социальным объектам;

– основы матричного исчисления;

– элементы комбинаторики и их применение к анализу социологических явлений;

– основы теории вероятностей и их использование в обработке социологических данных;

– основы математического моделирования социальных процессов.

Студенты должны *уметь*:

– использовать математический язык и аппарат при описании явлений и закономерностей окружающего мира;

– делать оценки правдоподобности информации, основанной на количественных параметрах и соотношениях;

– применять теорию множеств в социально-гуманитарной и экономической сферах;

– выполнять основные матричные операции, использовать матричное исчисление в экономических задачах, применять матричный аппарат к моделированию социальных процессов;

– применять комбинаторику к обработке и анализу социологических данных;

– приводить примеры случайных величин в социологических исследованиях;

– использовать основы теории вероятностей в обработке социологических данных;

– делать социологические выводы на основе анализа математических моделей.

Студенты должны *владеть*:

– терминологией дисциплины «Основы высшей математики и теории вероятностей»;

– математическими методами решения задач, используемых в профессиональной деятельности;

– навыками применения теории множеств к социальным группам и к анализу ответов на вопросы социологических анкет;

– навыками использования матричного исчисления социально-гуманитарной и экономической сферах;

– навыками вычисления вероятности событий при решении прикладных задач;

– навыками делать выводы на основе анализа математических моделей.

Освоение учебной дисциплины «Основы высшей математики и теории вероятностей» должно обеспечить формирование следующей специализированной компетенции:

– СК-2. Применять математические методы вычислений и статистический инструментарий для количественной оценки социальных явлений.

Дисциплина изучается в 1 семестре дневной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Основы высшей математики и теории вероятностей» отведено 130 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, семинарские занятия – 26 часов, управляемая самостоятельная работа – 8 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.
Форма текущей аттестации – экзамен.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СОЦИАЛЬНЫМ ОБЪЕКТАМ

1.1.1. Роль и место математики в гуманитарных науках и социологических исследованиях

Математические методы уже давно и с успехом применяются в социологических исследованиях. Процесс математизации науки необратим, он захватывает в наше время такие области знаний, которые совсем недавно исключались из сферы возможностей использования в них математических методов исследования и измерения. В наше время развитие теории и успешность практических приложений любой науки в значительной степени предопределяется мерой математизации данной области знаний. Хорошо известны мысли ученых мира о важности математики во многих науках. Математические методы позволяют также систематизировать и классифицировать результаты исследований, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений.

На вопрос «для чего изучают математику?» замечательно ответил еще в XIII веке английский философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Выделим еще несколько причин, которые указывают на необходимость изучения высшей математики студентами гуманитарных специальностей.

1. Математика – часть общечеловеческой культуры и универсальный язык науки. На протяжении нескольких тысячелетий развития человечества шло накопление математических фактов. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных математических понятиях: число, функция, множество, непрерывность, вероятность и др.

2. «Математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит» (М. В. Ломоносов). Математика влияет на упорядочение ума такими особенностями как общность и абстрактность своих конструкций. Логические рассуждения представляют собой метод математики, поэтому ее изучение воспитывает логическое мышление, позволяет правильно устанавливать причинно-следственные связи, что должен уметь каждый специалист. Математика развивает абстрактное мышление, умение работать с абстрактными, неосязаемыми объектами. Математика воспитывает такой склад ума, который требует критической проверки и логического обоснования тех или иных положений и точек зрения. Изучение математики приучает к полноценной аргументации и предостерегает от необоснованных обобщений.

3. Математика предлагает общие и четкие логические модели для изучения окружающей действительности. Математической моделью изучаемого объекта называется логическая конструкция, отражающая геометрические формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами. Исследование модели дает новую информацию о самом объекте.

Традиционно считают, что использование математики в социальных науках выражается в получении только количественных характеристик. Такое понимание крайне упрощено, поскольку количественные определенности всегда связаны с качественными определённостями. Конкретные социологические исследования могут успешно развиваться и будут иметь практическое и теоретическое значение только в том случае, если они используют математические методы при анализе различных механизмов социальных процессов, а также при сборе и обработке первичной социальной информации.

История конкретных социальных исследований была связана с широким и более специализированным использованием математики. Впервые классификация методов исследования приводится в 1918 г. в одной из первых программ учебного курса социологии. Автор данной классификации – К. М. Тахтарев. К числу общенаучных методов К. М. Тахтарев относит индуктивно-дедуктивный метод, в состав которого он включает наблюдение и опыт, анализ, сопоставление и сравнение, умозаключение и вывод, классификацию и систематизацию, предположение и проверку, обобщение и установление общих положений. Главными тенденциями, характеризующими развитие методологических принципов советской социологии этого периода, являются ее ведомственная специализация, связанная с этим отраслевая дифференциация, преобладание дескриптивных эмпирических социологических исследований, дающих богатейший материал. В ряде исследований ставится вопрос о необходимости глубокой разработки теоретически обоснованной исследовательской программы. В методологическом плане эмпирические исследования носили описательный и экстенсивный характер и охватывали почти все сферы жизнедеятельности общества.

Простейшие математические и статистические средства были взяты на вооружение в первых конкретных социальных исследованиях 50-х – начала 60-х годов XX в. – метод средних чисел, метод аналитических группировок, индексный метод анализа, т. е. методы, так называемой дескриптивной статистики. В это же время был остро поставлен вопрос о репрезентативности исследований. В 60-х гг. XX столетия развитие эмпирических исследований стимулировало серьезный интерес к методике. Появляются работы о методах сбора и анализа эмпирической информации, составлении исследовательских программ, подготовке отчетов и интерпретации результатов, а также об отношениях с заказчиком и о разработке практических рекомендаций. По мере развития конкретных исследований применялись все более точные математические методы анализа данных и выборки. Оперирование с большими массивами социальной информации привело к проблеме использования вычислительной техники – счетно-перфорационных и электронно-вычислительных машин. Социологи столкнулись с необходимостью измерения качественных социальных переменных и моделирования социальных процессов и явлений. Все это вызвало большой интерес к обсуждению методологических проблем применения математики в социологии. Таким образом, разработка проблем достоверности и надежности (качества) эмпирической информации на основе теории измерения, применения математических методов и обоснования репрезентативности эмпирических результатов является одним из ведущих методологических направлений периода 50-60 гг. XX в.

Помимо моделей социальных явлений и процессов (процесса принятия решения в организационных структурах, мобильности трудовых ресурсов и т.д.), здесь был ряд статей, касающихся проблем социологического измерения, а также общих вопросов, связанных с осмыслением роли математики в социологии. Одна из первых комплексных разработок в области анализа данных представлена Т.И. Заславской и Н.Г. Загоруйко. Авторы предложили интересную систематизацию методов распознавания образов к потребностям социологии, а также несколько оригинальных алгоритмов классификации и поиска эффективной системы признаков. Исследования с успехом были продолжены далее. Группа ученых под руководством Н.Г. Загоруйко и Г.С. Лбова, разработала оригинальную теорию поиска закономерностей, задаваемых всевозможными логическими сочетаниями значений признаков, измеренных по шкалам произвольных типов. Сотрудничая с Т.И. Заславской, математики И.Б. Мучник и Н.Г. Загоруйко применили разработанный ими аппарат для многомерной классификации социально-экономических показателей состояния агропромышленного комплекса, построения типологии миграционных потоков. Группа сотрудников ИЭиОПП, руководимая Ф.М. Бородкиным, предложила ряд оригинальных алгоритмов анализа номинальных и порядковых данных, дающих возможность решать задачи факторизации признаков и классификации объектов. Алгоритмы основаны на представлении каждого рассматриваемого признака в виде матрицы близостей между объектами. Позже под руководством П. С. Ростовцева там же были разработаны методы анализа таблиц сопряженности, существенно дополняющие традиционные приемы: возможность учета данных, отвечающих неальтернативным (многозначным) признакам; основанный на методе случайного моделирования (boot strap) способ проверки устойчивости структуры таблицы, алгоритм ее кластерного анализа и т.д.

Большое внимание уделялось исследованию влияния социальных факторов на вид экономических моделей. Оказалось, что включение в модель таких факторов может привести к сильному изменению ее свойств. Так, в модели с переменной структурой населения рыночное равновесие становится неустойчивым. По существу, тем самым доказывается невозможность чисто рыночного регулирования упомянутой структуры. Г.Г. Татарова анализировала разные стратегии работы социолога и сформулировала рекомендации по проведению типологического анализа. Ю.Н. Толстова предложила обобщенный подход к пониманию социологического измерения, исследовала проблему адекватности ряда методов относительно разных типов шкал, разработала методические рекомендации по использованию математики в социологии. Конечно, не могли быть оставлены в стороне проблемы выборки в социологическом исследовании. В 90-е гг. создала первую в России надежную общероссийскую выборку, основанную на отборе хозяйств. В.Т. Перекрест предложил оригинальный метод многомерного шкалирования и – на его базе – подход к осуществлению нелинейного типологического анализа. Сотрудничество группы ленинградских социологов с этим исследователем (в конце 70-х-начале 80-х гг.) принесло ощутимый эффект в построении детерминационных моделей поведения инженеров-проектировщиков и в разработке типологических структур различных социальных процессов.

Большое внимание научной общественностью уделялось общим методологическим вопросам применения математики в социологических исследованиях. О том, насколько применение различных математических процедур оказалось продуктивным в достижении содержательных результатов, свидетельствуют многочисленные исследования с использованием различных процедур кластерного анализа. Это работы математиков А.Т. Терехина, П.Ф. Андруковича под руководством Л.А. Гордона. В середине 70-х гг. И.Б. Мучник, С.Г. Новиков, Е.С Петренко разработали типологию городов. Интереснейшие результаты удалось получить в начале 90-х гг. Г А. Сатарову, который путем многомерного шкалирования выявил структуры политических предпочтений россиян, а также структуру политических группировок Верховного Совета СССР А его коллега Ю.А. Качанов на основе применения психологических тестов с помощью кластерного анализа выделил различные типологические группы по критерию. В 80-х гг., когда в высших учебных заведениях СССР были образованы первые подразделения, готовящие профессиональных социологов, а в 1989 г. открылись первые социологические факультеты, встал вопрос об учебных пособиях, методических материалах по математической социологии. Были изданы учебные пособия по моделированию социальных процессов.

Конкретные социологические исследования проводятся на самых различных уровнях: на уровне общей теории, специальных социологических теорий и т.д., поэтому важнейшей задачей является изучение и выработка специфических математических теорий, средств и методов для каждого уровня в отдельности. Рассмотрим основные направления применения математических методов в современной социологии. Во всех областях социологического исследования математические методы играют огромную роль. Арсенал применяемых в социальных науках математических средств весьма обширен и многообразен. В данном учебно–методическом комплексе рассмотрены несколько важнейших разделов, которые охватывают основные направления применения математических методов. Представим их ниже: «Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам», «Элементы линейной алгебры в социально – экономической сфере», «Элементы теории вероятностей в социально-гуманитарных исследованиях», «Основы математического моделирования в социологии».

Так, например, при изучении темы «Элементы теории множеств и их применение к социальным объектам» рассмотрены конкретные задачи на применение теории множеств к анкетным опросам и социальным группам. Анализируя одну из главных задач социолога – поиск сочетаний значений рассматриваемых признаков, детерминирующих то или иное поведение человека, приходим к языку математической логики и теории множеств. На конкретных примерах показано, как мощность симметрической разности может служить количественной мерой различия между множествами социологических опросов. Бинарные отношения, т.е. отношения между двумя элементами какого-либо множества являются основным инструментом для моделирования и исследования социальных отношений. Рассматриваются такие бинарные отношения, как «быть одноклассником», «быть родственником», «быть старше». Студенты учатся самостоятельно моделировать социальные процессы с помощью бинарных отношений.

Элементы линейной алгебры, а именно матрицы, также находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально – экономическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, она помогает структурировать социологическую информацию. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод в социологических исследованиях. В теме «Матричное исчисление» студенты учатся строить матрицу приростов доходов. В теме «Решение систем линейных уравнений» можно рассмотреть один из важных вопросов анализа социально-экономической деятельности: равновесие спроса и предложения.

Для описания и исследования социальных явлений используются математические модели. Они позволяют представить механизм взаимодействия различных переменных. С одной стороны, модель – это теоретическая конструкция, с другой – эмпирическая, так как параметры моделей оцениваются на основе данных случайной выборки. Необходимо проверить, адекватна ли модель данным, существенны ли все ее параметры. В большинстве случаев построение таких моделей основано на теории вероятностей. В практических задачах, маркетинговых исследованиях, опросах общественного мнения заказчику нужен достоверный результат, но достоверный результат требует статистической проверки. Таким образом, теория вероятностей и математическая статистика (ее продолжение) дают возможность сформулировать, что такое «существенное различие», «существенная зависимость», что позволяет избежать ненадежных выводов, изучить некоторые аспекты репрезентативности выборки, построить вероятностные модели социальных явлений.

В основе решения многих прикладных социологических задач лежат методы математического моделирования. Умения корректно сформулировать вопрос на языке узких специалистов адекватно интерпретировать полученные результаты с точки зрения социальных наук, уточнить и скорректировать выстроенную математическую модель являются важнейшими в методологическом арсенале будущего социолога. Поэтому рекомендуется включить тему: «Основы математического моделирования в социологии». Студенты изучают различные математические модели социальных процессов и явлений, строят математические модели в экономике и социологии в виде систем линейных уравнений. Рассматривается задача моделирования человеческого поведения, которая в ее сегодняшнем представлении, отражает в себе основные проблемные моменты, сложившиеся в философии, психологии, социологии, кибернетике и в прочих науках. Очевидно, что вопросы, поднятые в ней, имеют фундаментальное значение как для познания человеком окружающего мира, так и самого себя.

Очевидно, что математика играет немалую роль, как в дальнейшем образовании студентов, так и в будущей профессиональной деятельности. Математика позволяет количественно сравнивать явления, проверяет правильность словесных утверждений, позволяет обоснованно прогнозировать будущие события, математическая статистика лежит в основе социологического эксперимента, а стремление к корректности проведения исследования приводит к изучению соответствующих разделов высшей математики. Знание высшей математики необходимо также и при построении моделей социальных процессов.

1.1.2. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами

Любая теория начинается с введения основных начальных понятий, т. е. минимального списка неопределяемых терминов, понятий, которые называются *неопределяемыми* потому, что любая попытка определить их через другие термины приводит появлению других понятий, которые также нуждаются в определении. Примерами неопределяемых понятий является *точка* – то, что не имеет частей в интерпретации древнегреческих философов, или, *линия* – длина без ширины и т. д. Центральным местом в иерархии математических сущностей является математический объект и понятие *множество*. Понятие множества является в математике первичным, несводимым к более простым понятиям.

Теория множеств является основой современной математики. Она возникла в конце XIX века в связи с необходимостью обоснования ряда разделов математики (например, теория вероятностей, теория чисел). Основоположник теории множеств немецкий математик и философ **Георг Кантор** под **множеством** понимал «любое собрание определённых и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое как единое целое». Георг Кантор впервые в математической науке изучил свойства абстрактных множеств и осуществил их классификацию, отвлекаясь от конкретной природы элементов множеств.

В математике под ***множеством*** *понимается совокупность некоторых объектов, объединяемых по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве единого.* Канторовское определение множества потребовало введения следующих трех символов.

Первый символ должен представлять множество как «единое», т. е. представлять само множество. Для ***обозначения множеств*** используются прописные буквы латинского алфавита A, B, C, …, X, Y, Z, или какого-либо другого по соглашению.

Второй символ должен представлять «многое», т. е. рассматриваться как «элемент множества». ***Элементами множества*** называются объекты, составляющие множество. Например, если множество представляет собой совокупность студентов-социологов конкретной группы, то его элементами будут фамилии студентов. Для ***обозначения элементов*** используются строчные буквы того же алфавита, например, a, b, c, … x, y, z.

Третий символ должен ***соотносить элемент*** множеству. Тот факт, что «*x является элементом множества M*» записывается в виде $x \in M$. Это высказывание можно также прочесть следующим образом: «*x принадлежит множеству M*» или «*x содержится в множестве M*». Символ $\in$ называется ***символом принадлежности***. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι – быть. Если «*x не является элементом множества M*», то пишут $x \notin M$ и читают, как «*x не принадлежит множеству M*», «*x не содержится в множестве M*».

Введение понятия множества в математику оказалось очень полезным и плодотворным. Элементами множеств могут быть объекты различной природы, поэтому одни и те же утверждения о множествах могут быть отнесены как к утверждениям о числах, так и к утверждениям о социальных объектах.

Множество считается ***заданным***, если о каждом объекте можно сказать принадлежит он этому множеству или нет. Например, совокупность студентов-социологов на потоке является множеством, так как про каждого студента можно сказать числится он на данном потоке или нет.

<u>Упражнение.</u> Определить, какие из следующих совокупностей задают множества, а какие нет:

1. Совокупность лиц, работающих в БГУ, имеющих высшее образование,
2. Совокупность произведений искусства,
3. Совокупность красивых девушек в аудитории,
4. Совокупность студентов-социологов в университете,
5. Совокупность зрителей в кинотеатрах города Минска.

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих во множество.

Множество, состоящие из конечного числа элементов, называется ***конечным множеством***. *Конечное множество можно задать*, *перечисляя его элементы*. Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя фигурными скобками и разделяют их запятыми.

Например, множество букв алфавита белорусского языка – {а, б, в,…я}; множество студентов данной учебной группы определяется их списком в зачетационной ведомости – {Баранкина О.В., Иванов А.П., …, Петрова И.Н.}; множество всех стран на земном шаре – их списком в последнем издании географического атласа; множество арабских цифр десятичной системы счисления: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}; половой диморфизм П={м, ж}, где м и ж – мужчины и женщины соответственно.

Но этот способ задания множеств, т.е. способ перечисления элементов множества, применим лишь к конечным множествам, да и то не ко всем. Например, множество рыб в океане конечно, однако задать их списком, перечислить их трудно.

Замечание. *В дальнейшем, для удобства, будем давать словесное описание множества в кавычках,* например*, множество А – «множество студентов-социологов»*.

Если число элементов бесконечное, то множество называется ***бесконечным***. Примерами бесконечных множеств являются множество натуральных чисел, множество сценариев развития исторических событий в будущем, множество точек на отрезке. К бесконечным множествам способ перечисления элементов множества вовсе не применим. Множество всех целых чисел таким способом задать нельзя!

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом $\varnothing$. *Пустое множество единственно и оно является конечным*. Например, множество динозавров в зоопарке города Минска является пустым, так как не содержит ни одного элемента, множество электронных баз данных в 19 веке, множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$ также являются пустыми.

Замечание. *Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно*.

Отметим, что введение понятия пустого множества можно объяснять тем, что при задании множества характеристическим свойством (т.е. с помощью описания свойств его элементов) не всегда известно, существует ли элемент с таким свойством. Например, мы говорим о множестве решений какого-либо уравнения, которое может и не иметь решения, т.е. это множество решений уравнения является пустым множеством.

В общем случае множество задается с помощью указания характеристических свойств его элементов, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества (появляется строгое математическое описание). Так запись

$$\{x\text{: } x \textit{ обладает свойством } P\}$$

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство *P*. Двоеточие в этой записи можно читать как «*такой, что*».

Таким образом, множества задают либо перечислением его элементов, либо описанием характеристического свойства множества, которое четко определяет совокупность его элементов.

Пример. Множество A = {2, 4, 6, …} = {x: x – четное натуральное число}, B = {1, 2, 3, 4, 5} или множество B = {x: x – натуральное число, такое, что x < 6}.

Замечание. *Множество состоящее из одного элемента* {*x*} *не следует путать с самим этим элементом x.*

Например, множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ являются различными, так как $\varnothing$ – это пустое множество, не содержащее ни одного элемента, а множество $\{\varnothing\}$ – не пусто, его единственным элементом является само пустое множество, т.е. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

Множество, состоящее из одного элемента *a*, обозначается $\{a\}$ и называется ***одноточечным*** множеством; его следует отличать от элемента a.

Например, множество корней уравнения x-7=0 является одноточечным. Если рассмотреть такое множество людей, как семья, то в социальных науках выделяется понятие «семья, состоящая из одного человека» – тоже одноточечное множество.

Мощностью *конечного множества S называется число элементов в этом множестве.* Мощность *конечного множества S* обозначается $n(S)$.

Диаграммы Эйлера-Венна

Определение подмножества. Множество А называется подмножеством множества В, обозначается $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества А является элементом множества В.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: символ $\forall$ – **квантор всеобщности** («для всех», «для любого»), знак $\Rightarrow$ — ***импликация*** (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает: «*если X, то Y*», «в случае *X* выполняется *Y*»), наконец, логическая связка $\Leftrightarrow$ – **эквивалентность** («*если и только если*», ритуальное выражение «*тогда и только тогда, когда*»), называемая иногда «двойной импликацией».

Например, множество *A* – «множество студентов–социологов БГУ» является подмножеством множества *B* – «множество студентов ФФСН БГУ», т. е. $A \subset B$, и если рассмотреть множество *C* – «множество студентов БГУ», тогда $A \subset B \subset C$.

Замечание. *В число «подмножеств» непустого множества А удобно включить само А и пустое множество $\varnothing$, т. е.*

$$A \subset A \text{ и } \varnothing \subset A.$$

Таким образом, всякое множество есть подмножество самого себя. Второе включение можно мотивировать исходя из следующего рассуждения. Если бы пустое множество $\varnothing$ не было подмножеством множества *A*, то оно содержало бы элемент принадлежащий $\varnothing$, но не принадлежащий *A*, а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно.

Эти два подмножество, т. е. $\varnothing$ и *A*, называются ***несобственными подмножествами*** множества *A*. Остальные подмножества, если таковые есть, называются ***собственными подмножествами*** множества *A*. Например, множество гласных букв является собственным подмножеством множества букв русского алфавита.

Пример. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества $\{1, 2\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$;

б) Подмножествами трехэлементного множества {0, 1, 3} являются восемь множеств: ∅, {0}, {1}, {3}, {0, 1}, {0, 3}, {1, 3}, {0, 1, 3}.

У конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n *подмножеств, включая пустое и его самого*.

Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого ***универсальным множеством***. Будем обозначать его через ***U***.

Существует очень удобный прием наглядного изображения взаимоотношений между множествами, позволяющий иллюстрировать операции над ними, – это, так называемые, ***диаграммы Эйлера–Венна***. Это графический способ изображения множеств в виде кругов, которым активно пользовались Леонард Эйлер, а затем и Джон Венн. Существует очень удобный приём наглядного изображения множеств и операций над ними. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее их внутренностью и получаемыми из них фигурами, а прямоугольник изображает *универсальное множество* ***U.*** В диаграммах Эйлера-Венна не имеет значения относительный размер кругов, важно только их взаимное расположение.

На рисунке 1 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что множество A включено в множество B, т. е. $A \subset B$, и A – собственное подмножество множества B, которое не совпадает с ним.

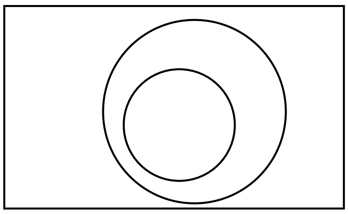


Рисунок 1 – Изображение множеств.

Определение равенства множеств. Множества А и В **равны**, обозначается А = В, если все элементы множества А принадлежат также множеству В, а все элементы множества В принадлежат также множеству А:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Согласно этому определению, $A = B$, если каждое из двух множеств есть подмножество другого множества, поэтому можно говорить, что множества A и B «состоят из одних и тех же элементов» (. 2).

Примером равенства множеств A и B является следующие множества: Пусть множество X={2, 3}, а множество $Y = \{y: y^2 - 5 \cdot y + 6 = 0\}$, тогда $X = Y$.

Определение неравенства множеств. *Множества A и B* ***не равны****, обозначается A ≠ B, если в одном из этих множеств есть хотя бы один элемент, которого нет в другом множестве.*

Пример. Если $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{1,2,4\}$, то множества A и B не равны, то есть $A \neq B$.

Замечание. Для неравных множеств не выполняется хотя бы одно из этих включений $A \subset B$, $B \subset A$.

Пример. Если $A = \{1,2\}$ и $B = \{1,2,4\}$, то $A \neq B$, так как множество B не является подмножеством множества A, то есть $B \not\subset A$.

Операции над множествами и их основные свойства

Над множествами можно производить различные операции, результатом которых будут являться новые множества. Задать операцию над множествами – это означает указать способ как по двум заданным множествам A и B строить третье.

Определение пересечения множеств. **Пересечением** двух множеств А и В, обозначается А ∩ В, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств А и В:

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x\colon\ x \in A \ \textbf{и}\ x \in B\}.$$

Символ «равенства с *def*, т.е. запись $\overset{def}{=}$ в этой формуле означает «равенство по определению», т. е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а *def* — это сокращение от латинского слова *definito* — определение. Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B отражает степень близости этих множеств.

Примеры:

1. Пусть A – «множество студентов 1-го курса отделения социология», а B – «множество девушек-социологов ФФСН», то $A \cap B$ – «множество девушек–социологов 1-го курса ФФСН»;
2. Пусть A – «множество нечетных чисел», а B – «множество двузначных чисел», то $A \cap B$ – «множество нечетных двузначных чисел»;
3. Пусть A – «множество всех левшей», а B – «множество всех людей, носящих очки», тогда $A \cap B$ – «множество всех левшей, носящих очки»;
4. Пусть A – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не ниже 7, т. е. на 7, 8, 9, 10», и пусть B – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы не выше 8, т. е. на 4, 5, 6, 7, 8», тогда $A \cap B$ – «множество всех студентов, сдавших сессию на баллы 7 и 8»;

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, пишем $A \cap B = \varnothing$, и в таком случае говорят, что множества A и B ***не пересекаются***. На рисунке 2 приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях когда, соответственно $A \cap B \neq \varnothing$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

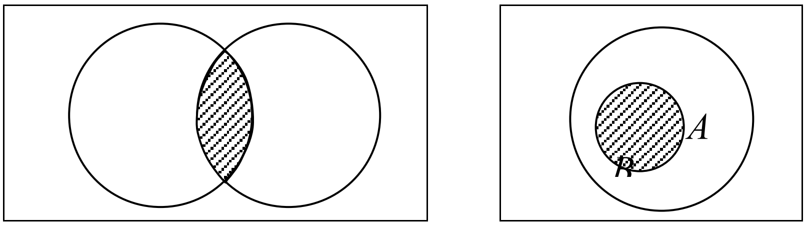


Рисунок 2 – Диаграммы Эйлера–Венна.

Обратим внимание на то, что в описании пересечения множеств использована связка «и» вместе с символами принадлежности элемента «$\in$».

Операция *пересечения множеств* обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции *умножения* чисел. Однако некоторые свойства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. Рис. 1.4), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A, и только они.

Замечание. *Отметим, свойства пересечения, справедливые для любых множеств A, B и C:*

$$A \cap B \subset A \quad \text{и} \quad A \cap B \subset B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \cap \varnothing = \varnothing \text{ и } A \cap \boldsymbol{U} = A.$$

Также верно равенство $A \cap A = A$.

Замечание. *Для любых двух множеств A и B выполняются* ***свойства коммутативности*** *операции пересечения:*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях.

Замечание. *Для любых трех множеств A, B и C выполняются* ***свойства ассоциативности*** *для операции пересечения:*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Пример. Пусть А – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОСОФИЯ», В – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем пересечение этих множеств А $\cap$ В.

Множество А состоит из 6 различных букв: А = {Ф, И, Л, О, С, Я},

а множество В состоит из другой совокупности 6 букв: В = {Ф, И, Л, О, Г, Я}.

Пересечением этих множеств является следующий набор из 5 букв:

А $\cap$ В = {Ф, И, Л, О, Я},

которые содержится как во множестве А, так и во множестве В.

Определение объединения множеств. **Объединением двух множеств А и В,** обозначается А ∪ В, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств А и В.

$$A \cup B \stackrel{def}{=} \{x\colon\ x \in A \ \textbf{или}\ \ x \in B\}.$$

Примеры:

1. Пусть A – «множество всех государственных предприятий города Минска», а B – «множество всех негосударственных предприятий города Минска», тогда $A \cup B$ – «множество всех как государственных, так и негосударственных предприятий города Минска»;
2. Пусть A – «множество всех нечетных натуральных чисел», а B – «множество всех четных натуральных чисел», то $A \cup B$ – «множество всех натуральных чисел»;
3. Пусть A – «множество всех девушек, которые учатся на факультете философии и социальных наук (ФФСН)», а B – «множество всех юношей, которые учатся на ФФСН», то $A \cup B$ – «множество всех студентов ФФСН»;
4. Пусть A={3,5,7}, B={1,3,9}, C={4,6}, тогда $A \cup B$={1,3,5,7,9}; $A \cup C$ ={3,4,5,6,7}.

Операция *объединения множеств* обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции *сложения* чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$, так как элементы из множества A принадлежат множеству B и второй раз включать их в объединение не надо.

На рисунке 3 приведены диаграмма Эйлера–Венна для двух множеств А и В в случаях, когда А ∩ В ≠ ∅, когда А ⊂ В и А ∩ В = ∅. Множеству А ∪ В на рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

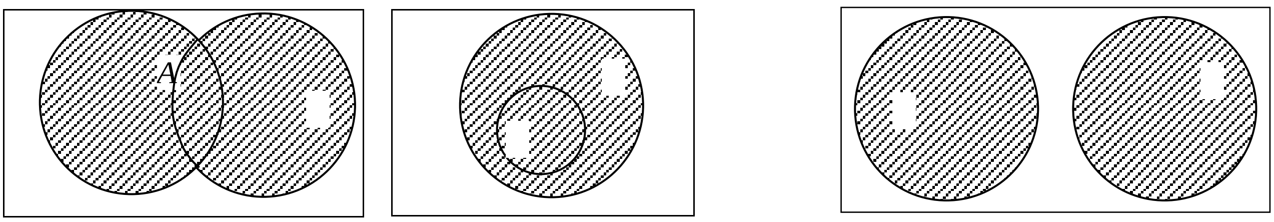


Рисунок 3 – Диаграммы Эйлера–Венна.

Замечание. *Отметим свойства объединения, справедливые для любых множеств А, В и С:*

$$A \subset A \cup B \quad \text{и} \quad B \subset A \cup B.$$

Кроме того, из включения А ⊂ В следует включение А ∪ С ⊂ В ∪ С. В частности, для любого множества А имеют место равенства:

$$A \cup \varnothing = A \text{ и } A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}.$$

Также верно равенство $A \cup A = A$.

Соотношение $A \cup B = \varnothing$ равносильно двум соотношениям $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

Замечание. *Для любых двух множеств А и В выполняются* ***свойства коммутативности*** *операции объединения:*

$$A \cup B = B \cup A.$$

Замечание. *Для любых трех множеств А, В и С выполняются* ***свойства ассоциативности*** *для операции объединения:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Замечание. *При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств А, В, и С выполняются* ***свойства дистрибутивности*** *одной операции относительно другой:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем объединение этих множеств $A \cup$ В.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{С, О, Ц, И, Л, Г, Я\},$$

а множество В состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{Ф, И, Л, О, Г, Я\}.$$

Объединением этих множеств является следующий набор из 8 букв:

$$A \cup B = \{С, Ц, Ф, И, Л, О, Я, Г\}.$$

Поскольку 5 букв И, Л, О, Г, Я принадлежащих пересечению множеств А и В вошли в объединение этих множеств только один раз, то мы получили только 8 букв, а не 7 + 6 = 12 букв, так как (7 + 6) – 5 = 8.

Определение разности множеств. Разностью *двух множеств А и В, обозначается А \ В (или А – В), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству А, но не принадлежащих множеству В:*

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{x:\ x \in A \ \textbf{и}\ x \notin B\}.$$

В определении разности множеств не предполагается, что множество B является подмножеством множества A.

Примеры:

1. Пусть A и B – «множества студентов отделения социология, изучающих английский и немецкий языки, соответственно», то $A \setminus B$ – «множество студентов отделения социология, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык»;
2. Пусть A={3,5,7}, B={1,3,9}, C={4,6}, тогда $A \setminus B$ ={5,7}, $A \setminus C = \varnothing$;
3. Пусть $A = \{x: |x| \le 5\}$ и множество $B = \{x: x < 2\}$, то тогда разность $A \setminus B = \{x: 2 \le x \le 5\}$;
4. A – «множество всех студентов ФФСН,» B – «множество всех людей, которые имеют автомобиль», тогда $A \setminus B$– «множество всех студентов ФФСН,

которые не имеют автомобиля», а $B \setminus A$ – «множество людей, которые имеют автомобиль, но не являются студентами ФФСН», т. е. $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Операция *разность множеств* обладает рядом свойств напоминающих свойства операции вычитания или *разности* чисел. Но следует обратить внимание на то, что *разность множеств не является операцией, обратной объединению множеств*.

На рисунке 4 приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях, когда $A \cap B \neq \varnothing$, когда $B \subset A$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \setminus B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

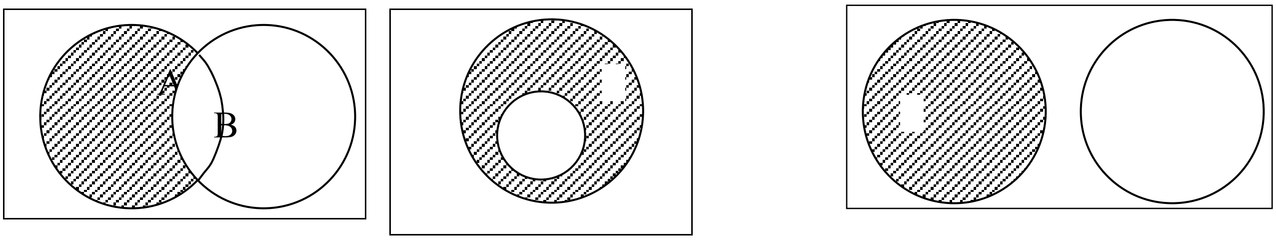


Рисунок 4 – Диаграммы Эйлера–Венна.

Замечание. Отметим свойство разности, справедливое для любых множеств A, B и C:

$$A \setminus B \subset A.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следуют включения:

$$(A \setminus C) \subset (B \setminus C) \text{ и } (C \setminus B) \subset (C \setminus A).$$

В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \setminus A = \varnothing, \quad A \setminus \varnothing = A \quad \text{и} \quad \varnothing \setminus A = \varnothing.$$

Замечание. Операция разности множеств «не симметрична» относительно множеств A и B, в том смысле, что $A \setminus B \neq B \setminus A$. Более того, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Замечание. «Вычитание» из множества A множества B сводится к «удалению» из множества A общей части A и B, т. е. множества $A \cap B$:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем разность этих множеств $A \setminus B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{\text{С, О, Ц, И, Л, Г, Я}\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{\text{Ф, И, Л, О, Г, Я}\}.$$

Разностью этих множеств вида $A \setminus B$ является набор из букв двух букв: $A \setminus B = \{\text{С, Ц}\}$, которые принадлежат множеству A, но не содержатся в множестве B.

Определение дополнения множеств. Если **U** — универсальное множество, содержащее множество A, то разность **U** \ A называется **дополнением** множества A и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} \overset{def}{=} \{x\colon\ x \in \boldsymbol{U}\ \boldsymbol{и}\ \ x \notin A\} = \boldsymbol{U} \setminus A.$$

Заметим, что дополнение $\overline{A}$ множества A – это множество элементов фиксированного универсального множества $\boldsymbol{U}$, не входящих в множество A.

Например, если $\boldsymbol{U}$ – множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то дополнением множества всех рациональных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ». Найдем дополнение множества A, т. е. множество $\overline{A}$:

Множество А состоит из 7 различных букв: A = {С, О, Ц, И, Л, Г, Я}.

Поскольку в русском алфавите 33 буквы, то дополнением $\overline{A}$ является следующее множество, состоящее из 26 букв, среди которых нет букв из которых состоит множество A

$$\overline{A} = \{А, Б, В, Д, Е, Ё, Ж, \ldots, Ш, Щ, Ъ, Ь, Ы, Э, Ю\}.$$

Замечание. *Отметим следующие свойства дополнения, справедливые для любого множества А и содержащего его универсального множества* $\boldsymbol{U}$*:*

$$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U} \quad и \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ – закон двойного дополнения, } \overline{\varnothing} = \boldsymbol{U},\ \overline{\boldsymbol{U}} = \varnothing.$$

Замечание. Выделим также свойство дополнения для включения множеств, т. е. если $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$ или $\boldsymbol{U} \setminus B \subset \boldsymbol{U} \setminus A$

Замечание. Разность множеств A и B можно выразить через пересечение множеств A и $\overline{B}$, а именно, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, т. е. разность множеств $A \setminus B$ есть пересечение множества A и дополнения множества B.

Определение симметрической разности. Симметрической разностью *множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \Delta B$ и состоящее из элементов, которые принадлежат лишь одному из двух множеств, т.е. либо только A, либо только B,*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, A – множество всех социологов, проводящих анкетирование традиционно на бумажных бланках, B – множество всех социологов, проводящих анкетирование при помощи компьютера, тогда $A \Delta B$ – множество всех социологов, которые проводят анкетирование на бланке, но не проводят анкетирование на компьютере, или множество всех социологов, которые проводят анкетирование на компьютере, но не проводят анкетирование на бланках.

Рассмотрим на рисунке 5 диаграммы Эйлера–Венна для симметрической разности двух множеств A и B в случаях, когда соответственно $A \cap B \neq \varnothing$, $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \Delta B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграммы.

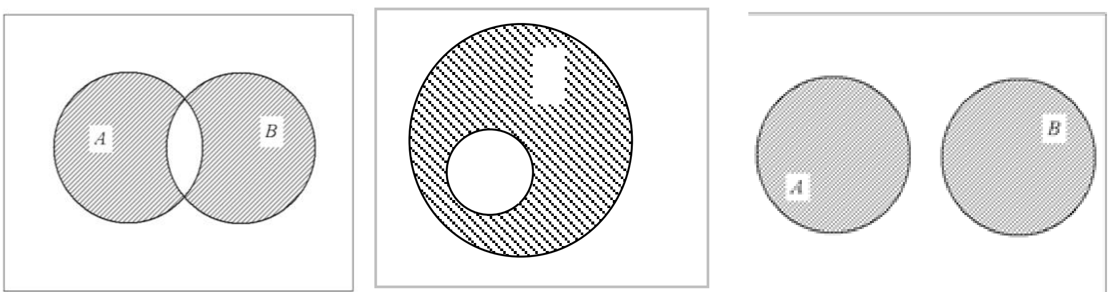


Рисунок 5 – Диаграммы Эйлера–Венна.

Замечание. Если множества A и B не пересекаются, т.е. $A \cap B = \varnothing$, тогда

$$A \Delta B = A \cup B$$

Замечание. Симметрическую разность можно вычислять, в частности, следующим образом:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Замечание. Отметим следующие свойства симметрической разности:

$$A \Delta A = \varnothing,\ A \Delta \varnothing = A,\ \varnothing \Delta A = A.$$

Замечание. Для любых двух множеств A и B выполняются свойства коммутативности операции симметрической разности:

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

Замечание. Для любых трех множеств A, B и C выполняются свойства ассоциативности для операции симметрической разности:

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

Замечание. Законы дистрибутивности. При чередовании операций пересечения и симметрической разности для любых трех множеств A, B, и C выполняются свойства дистрибутивности одной операции относительно другой:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Напомним, что в числовых примерах есть аналог дистрибутивности умножения относительно сложения, но нет дистрибутивности сложения относительно умножения.

Пример. Пусть A – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово СОЦИОЛОГИЯ», B – «множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово ФИЛОЛОГИЯ». Найдем симметрическую разность этих множеств $A \Delta B$.

Множество A состоит из 7 различных букв:

$$A = \{С, О, Ц, И, Л, Г, Я\},$$

а множество B состоит из другой совокупности 6 букв:

$$B = \{Ф, И, Л, О, Г, Я\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B состоит из трех букв: $A \Delta B = \{С, Ц, Ф\}$, которые принадлежат разностям $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Симметрическая разность множеств А и В состоит их тех элементов, которые принадлежат в точности одному из этих множеств. В *определении симметрической разности, по существу, используется связка* «***исключающее или***».

В заключение рассмотрим в следующем примере все рассмотренные операции над множествами: пересечение, объединение, разность и симметрическая разность.

Пример. Пусть A – «множество студентов отделения философия ФФСН», а B – «множество студентов, обучающихся на ФФСН». Опишем множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, $\overline{A}$.

Получим следующие множества:

$A \cap B$ – «множество студентов отделения философия ФФСН»;

$A \cup B = B$= «множество студентов, обучающихся на ФФСН»;

$A \setminus B = \varnothing$;

$B \setminus A$ – «множество студентов ФФСН отделений психология, социология и социальные коммуникации»;

$A \Delta B = B \setminus A$ – «множество студентов ФФСН отделений психология, социология и социальные коммуникации»;

$\overline{A}$ – «множество студентов ФФСН отделений психология, социология и социальные коммуникации». В качестве универсального множества рассмотрели множество B, т.е. $\boldsymbol{U} = B$.

Обозначим через $n(S)$ – *число элементов конечного множества* S. Посчитаем число элементов $n(A \cup B)$ объединения множеств A и B, в случае когда их пересечение не пусто, т. е. если $A \cap B \neq \varnothing$.

Пример. Множество всех студентов отделения социология является объединением следующих трех множеств: A – «множество всех успевающих студентов», B – «множество всех девушек», C – «множество всех неуспевающих юношей». Опишем множества, входящие в равенства законов дистрибутивности.

$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ясно, что каждый студент отделения социология принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Заметим, что множества A и B имеют общие элементы – успевающие девушки входят и в первое, и во второе множество.

Поскольку $B \cap C = \varnothing$, то $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = A$. С другой стороны, $A \cup B$ – «множество всех успевающих студентов и всех девушек», $A \cup C$ – «множество всех успевающих студентов и всех неуспевающих юношей», следовательно, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ – «множество всех успевающих студентов», т. е. это множество A. В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cup (B \cap C) = A = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Поскольку $B \cup C$ – «множество всех девушек и всех неуспевающих юношей», то $A \cap (B \cup C)$ – «множество всех успевающих девушек», с другой стороны, так как $A \cap C = \varnothing$, то $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B$ – «множество всех успевающих девушек». В этом примере для множеств A, B и C справедливы равенства

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Утверждение. *Для произвольных конечных множеств A и B число элементов объединения этих множеств* $n(A \cup B)$ *равно:*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Эта формула следует из того факта, что когда число элементов множества A суммируется с числом элементов множества B, то элементы, принадлежащие множеству $A \cap B$, учитываются дважды. Чтобы повторяющие элементы не учитывались их необходимо «удалить».

Пример. В группе 25 человек изучают английский язык, 10 человек – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов изучают английский или немецкий язык?

Решение. Пусть множество A – «множество студентов, изучающих английский язык», множество B – «множество студентов, изучающих немецкий язык». Тогда, в силу предыдущего утверждения, количество студентов, изучающих английский или немецкий языки, равно

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 25 + 10 - 5 = 30.$$

Пример. Социолог опросил 100 граждан. По данным этого социологического опроса 75 граждан посещает государственные медицинские учреждения, 60 – коммерческие, а 45 граждан – одновременно и государственные и коммерческие медицинские учреждения, в зависимости от вида лечения. Сколько граждан посещает государственные или коммерческие медицинские учреждения?

Решение. Пусть A – множество граждан, посещающих государственные медицинские учреждения, B – множество граждан, посещающих коммерческие медицинские учреждения, $A \cup B$ – множество граждан, посещающих государственные или коммерческие медицинские учреждения. Тогда, в силу предыдущего утверждения найдем

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70+60-45 = 90.$$

Замечание (*Законы де Моргана (законы двойственности)*). Обратим внимание на свойство дополнения от объединения множеств, т. е. справедливость равенства вида

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ или } \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B),$$

а также на свойство дополнения от пересечения множеств, т. е. справедливость равенства вида

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ или } \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B).$$

Пример. В группе из 40 студентов 25 человек изучают английский язык, 10 – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Решение. Пусть A – «множество студентов, изучающих английский язык», В – «множество студентов, изучающих немецкий язык», а универсальное множество $\boldsymbol{U}$ – это группа из 40 студентов. Тогда множество студентов, не изучающих ни английский, ни немецкий язык равно пересечению дополнений $\overline{A} \cap \overline{B}$ или $(\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)$. В силу свойства дополнения для объединения множеств имеем

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \text{ или } (\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B) = \boldsymbol{U} \setminus (A \cup B).$$

Напомним, что, по решению предыдущего примера, число студентов группы, изучающих английский или немецкий язык, равно $n(A \cup B) = 30$. Поэтому, так как

$$n((\boldsymbol{U} \setminus A) \cap (\boldsymbol{U} \setminus B)) = n(\boldsymbol{U} \setminus (A \cup B)) = 40 - 30 = 10$$

или $\quad n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 40 - 30 = 10,$

то всего 10 студентов группы не изучают эти иностранные языки.

Применение теории множеств в анкетировании

1. На множестве может существовать либо не существовать отношение порядка типа «больше - меньше», «лучше - хуже», «более высокого уровня - более низкого уровня». Соответственно выделяются упорядоченные и неупорядоченные множества. Например, порядок элементов отсутствует во множестве полового диморфизма (поэтому, если 0 означает женский пол, а 1- мужской пол, то это не значит, что женский хуже, чем мужской, хотя 1>0), а вот множество «очень плохой, плохой, хороший, очень хороший» упорядочено по возрастанию значения элементов.

Пусть x, y пара элементов множества X. Если $x \leq y$ либо, $y \leq x$ будем говорить, что эти элементы сравнимы, иначе они не сравнимы.

Отношение порядка будем называть также *упорядочением* или *ранжировкой*. Очевидно, что на одном и том же множестве могут быть заданы различные отношения порядка и, в частности, разные линейные порядки. Это важно по той причине, что данные, значениями которых являются ранжировки, в социологии часто встречаются, например, когда респонденту предлагается упорядочить по важности какие-либо ценности.

Примеры. Определим, можно ли установить отношение порядка на множестве или на его подмножестве

На какой срок Вы строите жизненные планы?

1. На длительную перспективу (более 5 лет).
2. На период от 3 до 5 лет.
3. На период в 2-3 года.
4. На период до 1 года.
5. Не планирую, живу сегодняшним днем.
6. Затрудняюсь ответить

Здесь 1<2<3<4<5 по отношению «беспечность» и 1>2>3>4>5 по отношению «предусмотрительность»; по любому из этих отношений 6 не сравнимо ни с одной из других позиций.

Как связано содержание Вашей работы с уровнем Вашего образования и квалификации? Мое образование и квалификация:

1. Выше, чем того требует выполняемая мной работа.
2. Примерно соответствует выполняемой мной работе.
3. Ниже, чем того требует выполняемая мной работа.
4. Не связано с выполняемой мной работой.
5. Затрудняюсь ответить.

По отношению «уровень образования и квалификации по отношению к выполняемой работе» 1>2>3. 4 и 5 не сравнимы между собой и с 1, 2, 3.

2. Число элементов симметрической разности, т.е. $n(A\Delta B)$, может служить количественной мерой различия между множествами.

Пример. Пусть в трех последовательно проведенных анкетных опросах (таблица 1) задавался следующий вопрос с соответствующими вариантами ответов.

Таблица 1. – Анкетные опросы.

Опрос 1	Опрос 2	Опрос 3
Какие из перечисленных качеств наиболее важны для современного специалиста		
Ответственность	Ответственность	Компетентность
Коммуникабельность	Компетентность	Коммуникабельность
Мобильность	Коммуникабельность	Трудолюбие
Самостоятельность	Мобильность	Мобильность
	Исполнительность	Самостоятельность

Между какими двумя последовательными опросами различия в вариантах ответов больше?

Решение. Рассмотрим Опрос 1и обозначим множество ответов на него через A, множество ответов на Опрос 2 через B, а множество ответов на Опрос 3 через C, тогда $A\Delta B=${самостоятельность, исполнительность, компетентность}, тогда n(A Δ B)=3, $A\Delta C$ ={самостоятельность, исполнительность, компетентность}, тогда = n(A Δ C)=3, и наконец $B\Delta C$ ={самостоятельность, исполнительность, компетентность}, тогда n(B Δ C)=4. Таким образом, между вторым и третьим последовательными опросами различия в вариантах ответов больше, а в обоих парах A, B и A, C множества отличаются друг от друга на 3 элемента.

1.1.3. Бинарные отношения

Пусть даны два множества *A* и *B*, которые могут как совпадать, так и нет.

Декартовым произведением двух множеств *A* и *B* называется множество всех упорядоченных пар элементов, первый из которых принадлежит множеству *A*, а второй – множеству *B*. Обозначается декартово произведение $A\times B$.

Например, пусть $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c\}$, тогда $A\times B=\{(a,a);(a,c);\ (b,a);\ (b,c)\}$.

<u>Упражнение.</u> Обладает ли декартово произведение свойством коммутативности, т.е. выполняется ли равенство $A\times B=A\times B$?

Например, если множества *A* и *B* – числовые интервалы, то декартово произведение $A\times B$ представляет собой прямоугольник, сторонами которого являются множества *A* и *B*.

Если *A*=*B*, то допустимо писать $A\times A$, и в этом случае результатом произведения будет квадрат. Если *R* – множество действительных чисел, то $R\times R$ – множество точек плоскости.

Аналогично определяется декартово произведение большего числа множеств: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. Отметим, что элементами нового множества являются всевозможные упорядоченные наборы элементов, содержащие ровно по одному представителю каждого из перемножаемых множеств. Такие наборы в общем случае принято называть ***кортежами*** и обозначать ($x_1, x_2, \ldots, x_n$).

В математике для обозначения какой-либо связи между переменными или понятиями часто пользуются термином «отношение». Бинарные отношения, т.е. отношения между двумя элементами какого-либо множества являются основным инструментом для моделирования и исследования социальных отношений.

Бинарным отношением назовём некоторое подмножество R множества $A \times A$.

При этом будем говорить, что элемент a находится в бинарном отношении R с элементом b, если a и b принадлежат A и $(a,b) \in R$, и обозначается aRb.

Содержательный смысл этого формального определения состоит в том, что для задания бинарного отношения достаточно задать или знать список пар элементов, находящихся в данном отношении. На практике же социолог работает с качественным определением отношения, и никто ему готового списка не даст. Это множество, формально определяющее бинарное отношение, надо ещё построить. Для решения этой задачи необходимо сначала записать его на языке математики.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется некоторое подмножество натуральных чисел $A=\{1,2,4\}$ и пусть на нём задано отношение "быть делителем". *Число* ***x*** *является делителем числа* ***y****, если число* ***y*** *делится на* ***x*** *без остатка.* Это качественное определение. Известно, что число x будет являться делителем числа y, если последнее представимо в виде: $y=n \cdot x$, где n – натуральное число. Это уже формализованное определение, которое позволяет построить множество, задающее отношение "быть делителем": $R = \{(x,y)\colon y = n \cdot x\} = \{(1,1); (1,2); (1,4); (2,2); (2,4); (4,4)\}$.

Для формализации социальных отношений, где элементами являются отдельные индивиды, надо иметь ещё некоторую дополнительную информацию или анкету об этих индивидах, которую можно записать в виде кортежа $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Рассмотрим несколько примеров бинарных отношений.

1. Отношение "быть младше". Индивид x младше индивида y, если он родился позже. Это качественное определение. Для того чтобы определить кто младше, достаточно знать дату рождения каждого, dx и dy, соответственно. Отметим, что у младшего дата рождения должна быть больше, тогда формализованное определение "быть старше" имеет следующий вид: $R=\{(x,y)\colon dx>dy\}$.

2. Отношение "быть родственником". Родственные отношения – это связь между людьми, основанная на происхождении от общего предка. Однако такое определение оказывается слишком широким. Поэтому приходиться вводить понятие степени родства. В этом случае, для каждого индивида x и y кортеж представляет собой множество всех прародителей до k-ого колена включительно, т.е. $P_k(x)$, $P_k(y)$. Два индивида будут родственниками k-ой степени, если их соответствующие множества прародителей содержат хотя бы одного общего предка, т. е. $P_k(x) \cap P_k(y) \neq 0$.

Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности.

Анализировать бинарные отношения можно через выявление тех свойств, которыми обладают или не обладают рассматриваемые отношения. Рассмотрим наиболее важные свойства.

1. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***рефлексивным***, если для всех элементов из этого множества имеет место xRx. Из рассмотренных примеров отношения "быть родственником", "быть делителем" являются рефлексивными. Отношение "быть старше" этим свойством не обладает.

2. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***симметричным***, если из xRy следует yRx.

Из рассмотренных примеров отношение "быть родственником" является симметричными. Отношения "быть делителем" и "быть старше" этим свойством не обладают.

3. Бинарное отношение R на множестве A будем называть ***транзитивным***, если из выполнения условий xRy и yRz следует, что xRz.

Транзитивными являются отношения "быть делителем" и "быть старше". Родственные отношения свойством транзитивности не обладают. Если отец и сын, и, соответственно, сын и мать (жена отца) находятся в близких родственных отношениях, то отсюда не следует, что муж и жена – близкие родственники.

Упражнение. Какими из вышеперечисленных свойств обладает бинарное отношение «быть одноклассником»?

Выявление свойств отношений, выполняющихся для любых множеств, позволяет классифицировать эти отношения и выделять целые классы отношений, обладающих общими свойствами. Один из таких классов образуют отношения *эквивалентности*. Понятие эквивалентности, в том или ином виде, присутствует во всех без исключений научных дисциплинах и используется для выявления элементов близких по своим характеристикам.

Бинарное отношение R на множестве A будем называть отношением ***эквивалентности*** (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Для произвольного $y \in A$ множество всех x, эквивалентных y, называется ***классом эквивалентности***. Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают. Т.е. любая эквивалентность определяет разбиение множества A на непересекающиеся классы.

Если в качестве множества A возьмём множество респондентов, заполнивших анкету с закрытыми вопросами, то одинаковые ответы на некоторые из вопросов определят эквивалентность. Отношениями эквивалентности могут быть следующие отношения: "состоять в одной партии", "иметь одинаковый пол" и т. п.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Раньше, когда обработка анкет производилась вручную, часто приходилось их сортировать, складывая в отдельные пачки анкеты с

одинаковыми ответами на некоторые из вопросов. Эта операция приводила к разбиению множества заполненных анкет на классы эквивалентности;

2. Пусть группа студентов из 30 человек сдала зачет со следующими результатами:

"отлично" – 7;

"хорошо" – 12;

"удовлетворительно" – 6;

"неудовлетворительно" – 5.

Если ввести отношение "получить одинаковую оценку", то данное отношение будет эквивалентностью и группа студентов окажется разбитой на четыре класса: "отличники", "хорошисты", "троечники" и "двоечники".

Если возьмём отношение "родиться в одном году", то множество жителей города будет разбито на классы ровесников.

1.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

1.2.1. Матрицы, определители

Матрицы находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально-экономическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, она помогает структурировать социологическую информацию. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод в социологических исследованиях. Особенно важны матрицы при разработке и использовании баз данных, в которых вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Определение матрицы. Матрицей A *называется система* $\boldsymbol{m \times n}$ *элементов, расположенных в прямоугольной таблице из* $\boldsymbol{m}$ *строк и* $\boldsymbol{n}$ *столбцов.*

Заметим, что элементами матрицы могут быть числа, алгебраические или символьные выражения.

Обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначаются $\boldsymbol{a_{ij}}$, где $\boldsymbol{i}$ – номер строки, $\boldsymbol{j}$ – номер столбца (числа i и j называют индексами элемента).

Матрицу, имеющую $\boldsymbol{m}$ *строк и* $\boldsymbol{n}$ *столбцов, называют матрицей размера* $\boldsymbol{m \times n}$ (читается: эм на эн).

Употребляется и более короткое обозначение матрицы размера $\boldsymbol{m \times n}$:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \text{ или } A=[a_{ij}]_{mn}.$$

Например, запишем матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -4 & 6\end{pmatrix}$. Это матрица размера 2×3, а элемент a_{22} равен (–4).

Матрица A, состоящая лишь из одной строки, называется ***строчной матрицей*** *или* ***матрицей-строкой****:*

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_n\end{pmatrix}.$$

Матрица A имеющая лишь один столбец, называется ***столбцевой матрицей*** *или* ***матрицей-столбцом****:*

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \ldots\\ a_m\end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** *и обозначается буквой O, тогда по определению*

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей *называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов* $m=n$, т.е. матрица вида:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Порядком *квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).*

Элементы $a_{11}, \quad a_{22}, \quad \ldots, \quad a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее ***главную диагональ***, а элементы $a_{1n}, \quad a_{2\,n-1}, \quad \ldots, \quad a_{n1}$ – ***побочную диагональ***.

Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим единственным элементом. Выпишем квадратные матрицы первого, второго и третьего порядков:

$$\left(a_{11}\right),\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***симметрической****, если равны её элементы, симметричные относительно главной диагонали*. Например, $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Упражнение. Приведите пример симметрической матрицы третьего порядка.

Диагональной матрицей *называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали равны нулю, т.е. матрица*

$$diag(a_{11}, a_{22},..., a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей *называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице*. Единичная матрица обозначается буквой ***E***. Так, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Треугольной матрицей *называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю*. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B называются ***равными*** $A = B$, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1,2,..., m$, $j = 1,2,..., n$).

Линейными операциями *над матрицами* называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой *двух матриц* $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых, то *есть*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (i = 1,2,..., m, \ j = 1,2,..., n).$$

Сумма двух матриц обозначается $C = A + B$.

Пример. Найдите $C = A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим по определению

$$C= A+B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2) & 6+4\\ 2+3 & -4+7\\ -3+8 & 9+(-11)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

***Разностью** двух матриц* $A=(a_{ij})_{mxn}$ и $B=(b_{ij})_{mxn}$ называется матрица $D=(d_{ij})_{mxn}$, элементы которой равны разности соответствующих элементов этих матриц, то есть

$$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij},$$
$$(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n).$$

Разность двух матриц имеет обозначение $D=A-B$.

Пример. Найдите $D=A-B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}$.

Решение. По определению

$$D=A-B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-2) & 6-4\\ 2-3 & -4-7\\ -3-8 & 9-(-11)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & 20\end{pmatrix}.$$

Замечание. Разность двух матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{mn}$ ***на число*** α называется матрица $\alpha A=(\alpha\cdot a_{ij})_{mn}$, т. е. матрица, полученная из данной матрицы умножением всех ее элементов на число α.

Пример. Найдите матрицу $(-2A)$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}$.

Решение. $-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1 & -2\cdot 6\\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-4)\\ -2\cdot(-3) & -2\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -12\\ -4 & 8\\ 6 & -18\end{pmatrix}.$

Матрицу $(-1)A$ называют матрицей, ***противоположной*** матрице A, и обозначают $-A$.

Линейные операции над матрицами обладают следующими ***свойствами***:

Пусть матрицы A, B и C – матрицы одинакового размера $m\times n$, O – нулевая матрица, $(-A)$ – матрица, противоположная матрице A, а α и β – любые действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства:

- $A+B=B+A$ *(коммутативность сложения матриц)*;
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ *(ассоциативность сложения матриц)*;
- $A+O=A$;
- $A+(-A)=O$;
- $1\cdot A=A$;
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;

- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Таким образом, многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами.

Докажем, например, что *A*+*B*=*B*+*A*. Известно, что *A*+*B*=$\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$, а *B*+*A*=$\left(b_{ij}+a_{ij}\right)_{m\times n}$, ($i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$), а так как $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, то *A*+*B*=*B*+*A*.

Пусть даны две матрицы *A* и *B*. Произведение матриц определено только для согласованных матриц. *Матрица A называется* ***согласованной*** *с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B*.

Произведением матрицы *A размера m×n* ***на матрицу*** *B* размера *n×k* называется такая матрица *C* размера *m×k*, у которой элементы c_{ij} определяются формулой

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\cdot b_{lj}\text{, где } i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,k,$$

т.е. элемент c_{ij} матрица *C* равен сумме произведений элементов ***i***-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы ***j***-го столбца матрицы *B*. Матрица *C* имеет *m* строк (как и матрица *A)* и *k* столбцов (как матрица *B)*. Произведение матрицы *A* на матрицу *B* имеет обозначение *AB*.

Замечание. Из того, что *A можно умножать на B, не следует, что B* можно умножать на *A*.

Если для матриц *A* и *B* определены произведения *AB* и *BA*, то в общем случае *AB≠BA* (так как из согласованности *A* с *B* не следует согласованность *B* с *A*).

Так, умножение матрицы *A* размеров 3×3 на матрицу *B* размеров 3×2 дает

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}&a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}\\a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}&a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}\\a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21}+a_{33}\cdot b_{31}&a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}+a_{33}\cdot b_{32}\end{pmatrix},$$

тогда как произведение *BA* не определено.

В случае, если AB=BA, матрицы A и B называются ***перестановочными***.

<u>Упражнение.</u> Приведите пример перестановочных матриц.

Пример. Найдите, если это возможно, произведения *AB* и *BA*, где

$$A=\begin{pmatrix}4&-5&8\\1&3&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&5\\-2&-3\\3&4\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение *AB* имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы *A* равно трём и равно числу строк матрицы *B*. Размер матрицы *A* равен 2×3, размер матрицы *B* равен 3×2, тогда размер матрицы *AB* равен 2×2 и $A\cdot B=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Найдём элементы искомой матрицы

$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}=4\cdot(-1)+(-5)\cdot(-2)+8\cdot 3=-4+10+24=30$,

$c_{12}=a_{11}\cdot b_{21}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}=4\cdot 5+(-5)\cdot(-3)+8\cdot 4=20+15+32=67$,

$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31}=1\cdot(-1)+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3=-1-6-3=-10$,

$c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}=1\cdot 5+3\cdot(-3)+(-1)\cdot 4=5-9-4=-8$.

Таким образом $A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

Проверим, можно ли получить произведение *BA*. Поскольку число столбцов матрицы *B* равно двум и равно числу строк матрицы *A,* произведение *BA* имеет смысл. Вычислим его.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

Если имеют смысл соответствующие произведения матриц, то справедливы следующие ***свойства умножения матриц***:

- $(AB)C = A(BC)$;
- $(A+B)C=AC+BC$;
- $C(A+B)=CA+CB$;
- $\alpha(AB)=(\alpha A)B$;
- $AE=EA=A$;
- $AO=OA=O$.

Целой положительной степенью A^k *(k>1) квадратной матрицы A* называется произведение *k* матриц, каждая из которых равна *A,* т.е.

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \text{раз}}.$$

Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица *A*.

<u>Упражнение.</u> Верно ли утверждение «Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей»?

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной*** относительно данной. Матрица, транспонированная относительно матрицы *A,* обозначается через A^T. Пусть дана исходная матрица *A*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно определению, матрица, транспонированная относительно матрицы A имеет вид

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A – матрица размера $n\times m$, то матрица A^T имеет размеры $m\times n$.

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется транспонированием матрицы. Для операции транспонирования матрицы с*праведливы следующие свойства*:

1. $(A^T)^T=A$;
2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;.
3. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

Пример. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Матрица называется симметрической, если $A^T=A$.

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определение определителя матрицы. Каждой такой матрице ставится в соответствие по определённому правилу действительное число, которое называется определителем (детерминантом) матрицы и обозначается $|A|,\quad \det A,\quad \Delta$.

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11}, т.е. A=(a_{11}), тогда определителем первого порядка соответствующим такой матрице, назовём величину этого элемента.

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка А= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называют число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, т.е.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя $|A|$, имея в виду элементы, строки и столбцы соответствующей ему матрицы А.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называют элементами определителя матрицы второго порядка. Правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей матрице А: определителем второго порядка называют число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример. Вычислить определители следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 50, \quad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 1 \cdot (-4) = 50 + 4 = 54.$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

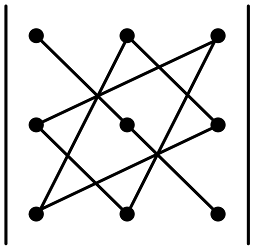
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

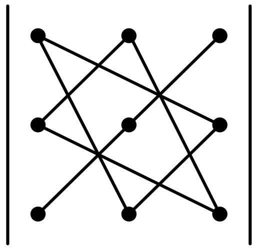
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с соответствующим знаком. Чтобы легче было запомнить, какие произведения берутся со знаком плюс, а какие со знаком минус, можно воспользоваться правилом треугольников, представленным схематически ниже.



«+»



«–»

Правило треугольников: три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; три отрицательных члена определителя представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны второй диагонали.

Определитель третьего порядка состоит из $6 = 3!$ ($3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, читается: три факториал) слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя. Элементы произведения каждого слагаемого берутся по одному из каждой строки и каждого столбца.

Пример. Вычислить определитель следующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot (-8) + 2 \cdot (-1) \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \cdot 5 - (-4) \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot (-8) - 1 \cdot 5 \cdot (-1) =$$

$$= -48 - 6 - 40 + 72 + 32 + 5 = -94 + 109 = 15.$$

Определители матриц второго и третьего порядка будем называть определителями второго и третьего порядка.

Вычисление определителей более высоких порядков довольно трудоёмко. При практическом вычислении определителей используется свойство понижения порядка, позволяющее вычислить определитель n-го порядка через определитель (n–1)-го порядка, в свою очередь определитель (n–1)-го порядка вычисляется через определитель (n–2)-го порядка и т.д.

***Минором** элемента* $\boldsymbol{a_{ij}}$ *матрицы* n*-го порядка называется определитель порядка* n–1*, соответствующий той матрице, которая получается из данной матрицы вычеркиванием* $\boldsymbol{i}$*-ой строки и* $\boldsymbol{j}$*-го столбца (той строки и того столбца на пересечении которых стоит данный элемент)*. Минор элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ обозначим *через* M_{ij}.

Пример. Рассмотрим определитель $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Минором элемента a_{12} является $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, а минором элемента a_{23} является $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

***Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы **A** называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.*

Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента либо совпадают, либо противоположны. Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Для него найдём A_{12} и A_{22}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot 7) = -15,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 19.$$

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице ***A*** называют число, равное

$$\boldsymbol{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}.$$

Это сумма всех произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

Последняя формула выражает правило составления определителя n-го порядка по элементам матрицы и по алгебраическим дополнениям этих элементов, которые являются определителями порядка $n-1$, взятыми с надлежащими знаками.

Равенство для определителя третьего порядка можно записать так:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Возникает вопрос, а нельзя ли использовать для получения величины определителя элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы, а также вопрос о разложении определителя по элементам любого столбца. Ответ на эти вопросы дают следующие основные теоремы, приводимые здесь без доказательства.

Теорема. *Определитель матрицы **n**-го порядка равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.*

Таким образом, справедливы следующие формулы:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = \overline{1, n});$$
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Особенно удобно разлагать определитель по элементам строки (столбца), если в ней много нулей.

При решении задач используются *свойства определителей*, которые облегчают их вычисление. Рассмотрим свойства определителей без доказательств, демонстрируя их на примере определителя второго порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $\det A = \det A^T$.

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = |A|.$$

2. При перестановке двух соседних строк или столбцов определитель меняет лишь знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

4. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0.$$

6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{22}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых, а у другого – из вторых слагаемых; элементы же, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим без доказательства следующую теорему.

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

На практике часто пользуются следующим способом вычисления определителей: *применяя свойства определителей добиваются, чтобы в какой-либо строке (столбце) определителя стало как можно больше нулей, а затем полученный определитель разлагают по этой строке (столбцу)*.

Пример. Вычислить определитель матрицы четвёртого порядка

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

<u>1 способ:</u>

Разложим данный определитель, например, по элементам 3-ей строки:

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = a_{31}\cdot(-1)^4\cdot M_{31} + a_{32}\cdot(-1)^5\cdot M_{32} +$$

$$+a_{33}\cdot(-1)^6\cdot M_{33} + a_{34}\cdot(-1)^7 M_{34} = 3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Далее надо вычислить четыре определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot2 + 3\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot(-3)\cdot4 - 4\cdot5\cdot1 - 3\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot2\cdot(-3) =$$

$$= 20 + 6 + 12 - 20 + 6 + 12 = 36;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot2 + 3\cdot2\cdot1 + 4\cdot0\cdot(-3) - 4\cdot5\cdot1 - 3\cdot0\cdot2 - 2\cdot(-3)\cdot1 = 10 + 6 - 20 + 6 = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1 = -2+4+4-2=4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-3) + 2\cdot 5\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot(-3) - 5\cdot 1\cdot 1 = 3+10+3-5=11.$$

Получаем

$$\det A = 3\cdot(-1)^4\cdot 36 + 2\cdot(-1)^5\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)^6\cdot 4 + 4\cdot(-1)^7\cdot 11 = 3\cdot 36 - 4 - 4 - 44 = 56.$$

2 способ:

Данный определитель можно найти, используя свойства определителей. Вычтем из четвёртой строки первую, а из третьей утроенную первую получаем

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам первого столбца, поскольку первый столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\det A = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из последнего столбца удвоенный первый, а затем разложим полученный определитель по третьему столбцу

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & -10 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 4\cdot(24-10) = 56.$$

Итак, значение определителя равно 56.

Квадратная матрица называется ***невырожденной****, если её определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется* ***вырожденной****.*

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная квадратная матрица того же порядка.

Определение обратной матрицы. Квадратная матрица A^{-1} называется ***обратной*** к квадратной матрице A, если она удовлетворяет условиям

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема. *Если обратная матрица существует, то она единственна.*

Доказательство. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – обратные матрицы к матрице A. Покажем, что $A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Действительно,

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной*.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для матрицы *A* существует обратная матрица. Тогда из соотношения $AA^{-1}=E$ следуют равенства $|A|\cdot|A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E|=1$, т. е. $|A|\neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

Достаточность. Возьмем матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

такую, что $|A|\neq 0$. Покажем, что *A* имеет обратную матрицу.

Рассмотрим матрицу *B* вида

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

в *i*-том столбце которой расположены алгебраические дополнения элементов *i*-той строки матрицы *A*. *Матрица B называется* ***присоединенной*** *к матрице A.*

Перемножим матрицы *A* и *B*.

$$AB=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=|A|E.$$

Следовательно, $A\cdot\left(\frac{1}{|A|}B\right)=E$.

Таким образом,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}B.$$

Теорема доказана.

Из последней формулы вытекает ***алгоритм построения обратной матрицы***: *необходимо составить присоединенную матрицу B, а затем каждый ее элемент разделить на число* $|A|$.

Таким образом у всякой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, заметим, что алгебраические дополнения элементов i-й строки матрицы A расположены в i-м столбце матрицы C.

Заметим, *что вырожденная матрица не имеет обратной*.

Далее рассмотрим некоторые свойства обратной матрицы, которые часто используются при решении задач, будем их принимать без доказательства.

Свойства обратной матрицы

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$
2. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$
3. $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n};$
4. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}.$

Пример. Найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot (-1) = 8 - 3 = 5.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, значит данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную матрицу. Далее находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4$, $\boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1$, $\boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-3)=3$, $\boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$.

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что матрица A^{-1} найдена верно. Для этого вычислим $A \cdot A^{-1}$ и $A^{-1} \cdot A$:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot\frac{4}{5}+(-3)\cdot\frac{1}{5} & 2\cdot\frac{3}{5}+(-3)\cdot\frac{2}{5}\\ -1\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{2}{5} & -1\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично убедитесь, что $A^{-1}\cdot A=E$.

Использование матриц при решении задач с экономическим и социологическим содержаниями

Пример. Данные о доходах холдинговой компании по трём областям трёх компаний за 2016 и 2018 года в тыс. ден. ед. представлены в матрицах A и B:

$$A=\begin{pmatrix}550 & 680 & 340\\ 2000 & 330 & 170\\ 2200 & 240 & 600\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}600 & 800 & 350\\ 2300 & 500 & 250\\ 2000 & 950 & 600\end{pmatrix}.$$

Здесь элемент a_{ij} матрицы A означает доход i-й компании в j-ой области за 2016 год, а элементы матрицы B за 2018 год. Вычислите матрицу C прироста доходов за период с 2016 по 2018 года и проанализируйте её. Рассчитайте матрицу $C_{\text{ср}}$, характеризующую средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год.

Решение. Матрица приростов доходов за рассматриваемый период равна

$$C=B\text{-}A=\begin{pmatrix}600-550 & 800-680 & 350-340\\ 2300-2000 & 500-330 & 250-170\\ 2000-2200 & 950-240 & 600-600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & 120 & 10\\ 300 & 170 & 80\\ -200 & 710 & 0\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы C выражают изменение доходов с 2016 по 2018 года. Так третья компания по первой области потерпела убытки в размере 200 тыс. ден. ед., так как c_{31}=(–200), эта же компания по третьей области не принесла доходов, так как c_{33}=0.

Матрица $C_{\text{ср}}$, характеризующая средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год, равна матрице C, делённой на количество лет в рассматриваемом периоде. В рассматриваемый период с 2016 по 2018 год входят 2 года (2016 и 2017 года), тогда

$$C_{\text{ср}}=\frac{1}{2}\cdot C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 50 & \frac{1}{2}\cdot 120 & \frac{1}{2}\cdot 10\\ \frac{1}{2}\cdot 300 & \frac{1}{2}\cdot 170 & \frac{1}{2}\cdot 80\\ \frac{1}{2}\cdot(-200) & \frac{1}{2}\cdot 710 & \frac{1}{2}\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 60 & 5\\ 150 & 85 & 40\\ -100 & 355 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример. В социально-экономической сфере широко используются матрицы, моделирующие территориально-экономические связи между районами страны. Такая матрица должна быть квадратной. Элемент a_{ij} указанной матрицы выражает объем рассматриваемого вида продукции, произведенной в i-м районе и потребленной в j-м. Элементы, стоящие на главной диагонали показывают объем продукции, которая потребляется в том же районе, где и производится.

Каждая симметрично расположенная относительно главной диагонали пара элементов матрицы (a_{ij} и a_{ji}) характеризует двусторонние транспортно-экономические связи между районами. Сумма элементов, лежащих на главной диагонали, показывает общий объем производства для местных нужд всех районов. Сумма остальных элементов матрицы равна общему объему продукции, перевозимой между районами. Каждая строка данной матрицы $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ представляет собой вектор, характеризующий размер производства в одном районе и объем поставок его продукции по остальным районам. Каждый столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

представляет собой вектор, характеризующий размеры потребления в одном из районов и его состав по местам производства.

Матрица территориально-экономических связей наглядно моделирует экономические связи, упрощает их анализ и при составлении ряда других сопряженных с ней матриц позволяет решать ряд социально-экономических задач по рационализации экономических связей, упорядочению размещения производства и т. д. Выполнение арифметических действий с матрицами открывает возможности для упрощения обработки экономической информации и осуществления расчетов непосредственно по сгруппированным данным.

Пример. Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент a_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$ показывает, сколько единиц сырья *j*-го типа расходуется на производство единицы продукции *i*-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = \begin{pmatrix} 120 & 90 & 150 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом

$$B = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем общую стоимость сырья, затраченную на производство продукции.

Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 120 \cdot 3 + 90 \cdot 4 + 150 \cdot 5 = 1470$ ед. и 2-го сырья $S_2 = 120 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 150 \cdot 3 = 750$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение

$$S = CA = \begin{pmatrix} 120 & 90 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1470 & 750 \end{pmatrix}.$$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 1470 \cdot 40 + 750 \cdot 20 = 73800$ ден. ед. может быть записана в матричном виде:

$$Q = SB = (CA)B = \begin{pmatrix} 1470 & 750 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 73800 .$$

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычисляют матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т. е. матрицу

$$R = AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix},$$

а затем общую стоимость сырья:

$$Q = CR = C(AB) = \begin{pmatrix} 120 & 90 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix} = 73800 .$$

Рассмотренный пример иллюстрирует выполнение ассоциативного закона для произведения матриц: $(CA)B = C(AB)$.

1.2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + ... & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + ... & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + ... & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{ij} $(i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n)$ называют ***коэффициентами системы***, а числа b_i $(i = 1,2,...,m)$ – ***свободными членами***, j – номер соответствующего неизвестного. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых i указывает на номер уравнения, а второй j на номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Мы будем рассматривать только случаи, когда число $\boldsymbol{m}$ уравнений равно или меньше $\boldsymbol{n}$ числа неизвестных.

Если все свободные члены равны нулю, т. е. $\boldsymbol{b}_i = 0$, $i = 1,2,...,m$, то система (1) называется ***однородной***.

Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \quad + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \quad + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \quad + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если среди свободных членов имеются отличные от нуля, то линейная система называется ***неоднородной***.

Решением линейной системы (1) называется упорядоченная совокупность n чисел c_1, c_2, ... c_n, которая при подстановке в каждое из уравнений системы вместо соответствующих переменных x_1, x_2, ... x_n ($x_1=c_1$, $x_2=c_2$, ... $x_n=c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, а система, не имеющая ни одного решения, – ***несовместной***.

Решить систему – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения.

Система, имеющая только одно решение, называется ***определённой,*** если система имеет больше одного решения, то она называется ***неопределённой***. В случае неопределённой системы каждое её решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Две системы называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Линейную систему (1) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (1) ***называется основной матрицей системы*** (или матрицей системы).

Матрица-столбец составленная из неизвестных:

$$X = \begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \dots \\ x_n. \end{bmatrix}.$$

Матрица-столбец составленная из свободных членов:

$$B=\begin{bmatrix} b_1, \\ b_2, \\ \dots \\ b_m. \end{bmatrix}.$$

Заметим что матрица A имеет размер $m\times n$ согласована с матрицей X, имеющей размер $n\times 1$, а значит можно найти произведение AX.

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\ +a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\ +a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots\ +a_{mn}x_n. \end{bmatrix}.$$

Так как элементами этой столбцевой матрицы размера $m\times 1$ являются левые части уравнений системы (1), то по определению равенства матриц

$$AX=B. \qquad (3)$$

Таким образом, система линейных уравнений (1) может быть записана в виде одного матричного уравнения (3). Эта запись системы называется ***матричной***.

Если (c_1, c_2, ... c_n) – решение системы (1), то матрица $C=\begin{bmatrix} c_1, \\ c_2, \\ \dots \\ c_n. \end{bmatrix}$

называется решением этой системы.

Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему ***n*** линейных алгебраических уравнений с ***n*** неизвестными $x_1, x_2,\dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+\dots & +a_{1n}x_n= & b_1, \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+\dots & +a_{2n}x_n= & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+\dots & +a_{nn}x_n= & b_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Матрица A данной системы – квадратная. ***Определителем системы*** (4) называется определитель матрицы A, составленной из коэффициентов этой системы, обозначим его через Δ ($\Delta=\det A$).

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то для матрицы данной системы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Систему (4) можно записать в матричном виде

$$AX = B.$$

Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1} и получим

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

тогда

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Эта формула является матричной записью решения системы (4).

Пример. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Сначала найдём определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad .$$

Определитель не равен нулю, значит данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную. Найдём алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Итак $$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдём искомую матрицу

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ то есть: } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Формулы Крамера

Рассмотрим систему ***n*** линейных алгебраических уравнений с ***n*** неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (4).

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (4) тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

В 1750 году швейцарский математик Габриэль Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные системы линейных уравнений через определители, составленные из коэффициентов системы, которые отображены в следующей теореме.

Теорема (Крамера). *Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое называется* ***формулами Крамера****:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Запишем систему (4) в матричной форме: $AX = B$. Поскольку определитель Δ матрицы A отличен от нуля, она имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда

$$AX = B \;\Rightarrow\; A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\Rightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; EX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B.$$

Полученная формула является матричной записью решения системы. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы.

Матричное равенство имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_n = \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

так как $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n = \Delta_k$ для всякого $k = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Следствие. Если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta = 0$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Составим определитель системы и найдём его

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-7) \cdot 3 = 5 + 21 = 26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-7) \cdot 11 = 1 + 77 = 78,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - 1 \cdot 3 = 55 + 3 = 52.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2.$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Формулы Крамера требуют довольно сложных вычислений (при больших n), связанных с вычислением определителей Δ и Δ_k. А также заметим, что методом Крамера нельзя решить систему, если матрица A данной системы вырожденная. *Для практического решения систем линейных алгебраических уравнений используют метод Гаусса, основанный на последовательном исключении неизвестных и пригодный для решения произвольных линейных систем.* Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода упоминалось еще в китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I в. до н. э. и II в. н. э.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases}$$

Матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

полученная из основной матрицы системы добавлением столбца свободных членов, называется ***расширенной матрицей системы***.

Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:

1. умножение любого уравнения на число, не равное нулю;

2. прибавление к одному уравнению системы другого её уравнения, умноженного на любое число, при этом сохраняются остальные уравнения системы, в том числе и то, которое прибавлялось;

3. перестановка местами любых двух уравнений системы.

4. вычеркивание нулевой строки, т.е. строки, у которой все элементы равны нулю.

С помощью таких преобразований каждый раз получается система уравнений, эквивалентная исходной системе.

Метод Гаусса состоит в приведении исходной системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований к эквивалентной ей системе, способ решения которой весьма прост.

Метод Гаусса состоит в следующем

Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (это всегда можно сделать за счет перестановки уравнений). Для этого ко второму уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. Затем к третьему уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. Аналогичным образом преобразуем все остальные уравнения, в результате чего получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{5}$$

где a'_{ij}, b'_i $(i = \overline{2, m},\ \ j = \overline{2, n})$ – новые значения коэффициентов и правых частей.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$, и оставляя без изменения первые два уравнения системы (5), преобразуем её таким образом, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 превратился в нуль. Продолжая этот процесс, приведём систему (5) к одной из систем вида (6) или (7) или (8). Вид таких систем называется ***ступенчатым.***

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $c_{kk} \neq 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$; c_{kk} – некоторые новые коэффициенты, d_k – свободные члены.

Система (6) имеет единственное решение. Находим из последнего уравнения $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Затем, подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение системы и находим x_{n-1} и т.д. значение x_1 из первого.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{7}$$

где $k < n$.

Система (7) имеет бесконечное множество решений. Придавая свободным переменным $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ произвольные значения, последовательно находим $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ из системы

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k = d_1 - c_{1\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2\,k}x_k = d_2 - c_{2\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{2\,n}x_n, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k = d_k - c_{k\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{k\,n}x_n. \end{cases}$$

В формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \; c_{12}x_2 + \; c_{13}x_3 + \ldots + \; c_{1n}x_n \; = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \; c_{23}x_3 + \ldots + \; c_{2n}x_n \; = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + \; c_{3n}x_n \; = d_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 \cdot x_n \; = d_r, \end{cases} \tag{8}$$

где $k \le n$.

Система (8) *несовместна*, т.е. не имеет решений, так последнее равенство не выполняется ни при каких значениях неизвестных.

Отметим, что метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему методом Гаусса, преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Замечание. На практике удобнее работать не с системой (1), а с расширенной матрицей $\overline{A}$ данной системы, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (для этого нужно переставить местами уравнения системы, либо разделить обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 1$*)*.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 24, \\ 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = -14, \\ 13x_1 + 16x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -8 & 9 & 24 \\ 3 & 12 & -5 & -14 \\ 13 & 16 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–7), к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–3), а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–13) и получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -10 & -40 & -30 \end{array}\right).$$

Четвертую строку разделим на (-10) и поменяем со второй строкой:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (–6), а четвертому уравнению системы второе уравнение, умноженное на 22, и получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \\ 0 & 0 & -38 & -38 \end{array}\right).$$

Третья и четвертая строки пропорциональны. Одну из них можно убрать из рассмотрения. Данная система совместна и имеет единственное решение**.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 4x_3 = 3, \\ -38x_3 = -38; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - (2x_2 + 3x_3), \\ x_2 = -4x_3 + 3, \\ x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, единственное решение имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9\\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8\\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12\end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–6), к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 7, а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на 3 и получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15\end{array}\right).$$

Прибавим к третьему и четвертому уравнениям системы второе уравнение, умноженное на 1, и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1,x_2 через переменные x_3,x_4:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 15x_2+15x_3+19x_4=15.\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-2x_2-2x_3-3x_4+1,\\ 15x_2=-15x_3-19x_4+15.\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=-2x_2-2x_3-3x_4+1,\\ x_2=-x_3-\dfrac{19}{15}x_4+1.\end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1=-2\cdot\left(-x_3-\frac{19}{15}x_4+1\right)-2x_3-3x_4+1=2x_3+\frac{38}{15}x_4-2-2x_3-3x_4+1=-\frac{7}{15}x_4-1.$$

Таким образом, общее решение имеет вид $\begin{pmatrix}-1-\dfrac{7}{15}x_4\\ 1-x_3-\dfrac{19}{15}x_4\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$, где x_3, x_4 могут принимать любые действительные значения.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\ x_1+2x_2-3x_3=0,\\ -2x_1-2x_3=3.\end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–1), а к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 2 и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (–2). В итоге получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right)$.

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной системе:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4, \\ 0x_1+x_2-2x_3=4, \\ 0x_1+0x_2+0x_3=-13. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1+0x_2+0x_3=-13$, которое не имеет решений.

Математические модели в социально-экономической сфере в виде систем линейных алгебраических уравнений

Пример. Предприятие планирует выпуск продукции трёх наименований $A_j,\ j=1,2,3$, на производство которой требуется три вида ресурсов $b_i,\ i=1,2,3$. Нормы затрат каждого вида ресурсов на изготовление единицы каждого наименования продукции задаются матрицей *A*. Найдите допустимый план выпуска продукции (у. е.), если предприятие располагает ресурсами в количестве единиц, заданном матрицей *B*, если

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 190 \\ 140 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

Решение. Построим математическую модель данной задачи. Обозначим через $x_1,\ x_2,x_3$ количества планируемой к выпуску продукции соответственно первого, второго и третьего наименований. Определение допустимого плана выпуска продукции состоит в нахождении неотрицательного решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 190, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 140, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 2 & 1 & 3 & 140 \\ 3 & 2 & 1 & 120 \end{array}\right].$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–2), а к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–3) и получим $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -240 \\ 0 & -7 & -8 & -450 \end{array}\right]$.

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (–7/5) и получим матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -240 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{5} & -114 \end{array}\right].$$

Последняя строка полученной матрицы равносильна уравнению $-\frac{19}{5}x_3 = -114,$, откуда $x_3 = -114 \cdot \left(-\frac{5}{19}\right) = 30.$

Вторая строка дает уравнение $-5x_2 - 3x_3 = -240$. Зная, что x_3 =30, найдем x_2: -5x_2 –3·30 = –240, тогда x_2 =30.

Первая строка последней матрицы соответствует уравнение $x_1+3x_2+3x_3$ = 190. Зная x_2 и x_3, можем определить x_1: x_1 = 190 – 3·30 – 3·30 = 190 – 180 = 10.

Таким образом, допустимый план производства продукции составляет 10 у.е. первого, 30 у.е. второго и 30 у.е. третьего наименования.

Пример. В таблице 2 приведены расценки на проведение работ для каждого вида услуг:

Таблица 2 – Расценки на проведение работ для каждого вида услуг.

Виды работ	Нормативы по видам оборудования (число часов)			Полные затраты на
	механическое	Тепловое	энергетическое	

				эксплуатацию
Техническое обслуживание	3	1	4	85
Текущие услуги	2	2	3	82
Капитальный ремонт	10	20	15	580

Найдите расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые смогут окупить затраты на эксплуатацию.

Решение. Пусть необходимо x_1 – количество часов работы механического оборудования, x_2 – количество часов работы теплового и x_3 – количество часов работы энергетического оборудования, чтобы окупить затраты на техническое обслуживание, текущие услуги и капитальный ремонт. Тогда из задачи получается система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 85, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 82, \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 580. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -10, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 85 & 1 & 4 \\ 82 & 2 & 3 \\ 580 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 85 & 4 \\ 2 & 82 & 3 \\ 10 & 580 & 15 \end{vmatrix} = -170, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 85 \\ 2 & 2 & 82 \\ 10 & 20 & 580 \end{vmatrix} = -80.$$ По формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-120}{-10} = 12, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-170}{-10} = 17, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{-10} = 8.$$

Тогда $X = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ 8 \end{bmatrix}$. Чтобы окупить затраты на эксплуатацию, оборудование должно иметь следующий объем работ: механическое оборудование –12 часов работы; тепловое – 17 часов; энергетическое – 8 часов.

1.3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

1.3.1. Основы дифференциального исчисления

Основу математического анализа составляют дифференциальные и интегральные исчисления. Заслуга открытия дифференциального и интегрального исчисления принадлежит И. Ньютону и Г. Лейбницу.

Понятие функции возникло тогда, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Однако строгое математическое определение понятия функции появилось лишь в конце 17 века в трудах Готфрида Вильгельма Лейбница и Исаа́ка Нью́тона.

Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление из области экономики или социологии, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения.

Переменной называется величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, может принимать различные значения. ***Постоянной*** называется величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, сохраняет одно и то же значение. Отметим, что выполнение комплекса условий является очень важным. Так, одна и та же величина может быть переменной или постоянной в зависимости от того, в каких условиях она рассматривается. Например, цена на хлеб (и некоторые другие продукты) в условиях рыночной экономики является величиной переменной. В условиях жесткого планирования экономики цена на хлеб может держаться на одном уровне и быть постоянной величиной (в 70-е годы цена на хлеб была постоянна, буханка серого хлеба стоила 16 коп.).

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что каждым значениям одних величин соответствуют значения других. Так, например, ясно, что:

1) каждому значению цены товара соответствует определенная величина спроса;
2) каждому году соответствует сумма накопившегося денежного вклада;
3) интенсивность ощущения зависит от интенсивности раздражителя.

Во всех этих примерах общим является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Дадим определение понятия функции, являющегося центральным понятием математического анализа.

Пусть X и Y – непустые множества. Пусть x – произвольный элемент множества X, y – произвольный элемент множества Y, т.е. $x \in X, \quad y \in Y$.

Соответствие f, которое каждому элементу x множества X сопоставляет только один элемент y множества Y, называется ***функцией***. Записывается так: $y = f(x)$ или $f : X \to Y$.

При этом элементы ***y***, или $f\ (x)$, из множества Y называются ***значениями функции***, а элементы x из X – ***значениями аргумента***.

Пример. Пусть X – множество студентов-социологов, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – множество оценок по десятибалльной системе. Тогда можно задать функцию $y = f(x)$, которая каждому студенту $x \in X$ будет ставить в соответствие некоторую оценку $y \in Y$.

Пример. Пусть B – множество граждан республики Беларусь, S – множество всевозможных фамилий. Тогда правило, которое каждому гражданину ставит в соответствие его фамилию, есть функция с множеством определения B и множеством значений S. Это соответствие, однако, не является функцией, определенной на S со значениями в B, так как, во-первых, не все фамилии встречаются в нашей стране, а, во-вторых, есть родственники, носящие одну фамилию, и однофамильцы.

Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается через $D(f)$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in X$, называется ***множеством значений*** функции f и обозначается через $E(f)$.

Функция, у которой область определения и область значений – числовые множества, называется ***числовой функцией***.

Графиком функции y = f(x) *называется множество всех точек координатной плоскости с координатами* (***x; f (x)***)*, т.е. абсциссами является значения переменной x, а ординатами – соответствующие им значения функции y.*

<u>Упражнение.</u> Какие из приведённых ниже рисунков (рисунок 6) являются графиками функций?

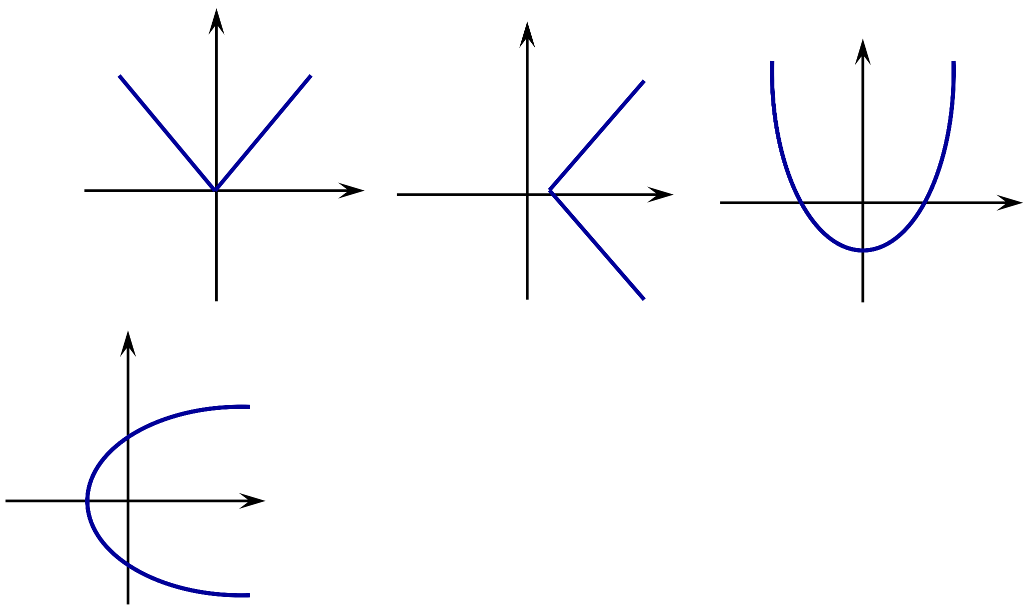


Рисунок 6 – Примеры.

Упражнение. Укажите область определения и множество значений функций, изображённых на рисунке 7.

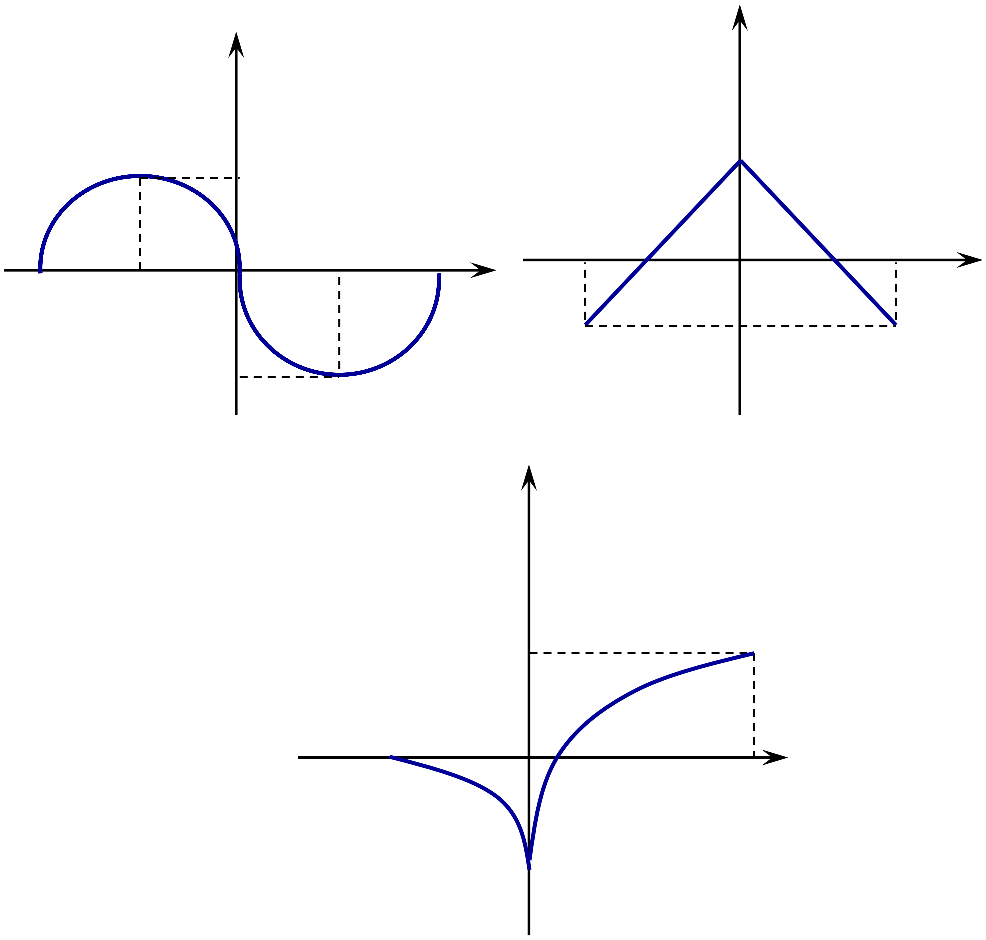


Рисунок 7 – Примеры.

Способы задания функций. Примеры функций из психологии, экономики и социологии

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, позволяющее, зная значения x, находить соответствующие значения y. Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функции: аналитический; табличный; графический.

- ***Аналитический способ*** заключается в том, что функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений, например

$$y = -0{,}9 + 9{,}638\,x^{-1{,}394},$$

где y – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах), x – общий уровень безработицы (в процентах). Это формула Филлипса.

Аналитический способ удобен для решения задач прогнозирования. Положительными сторонами аналитического способа задания функции являются краткость записи, возможность определения значения функции для любого значения аргумента и, что самое главное, возможность изучения функциональной зависимости с помощью математического анализа.

Недостатком этого способа является то, что он применим для описания лишь сравнительно простых форм и процессов.

- ***Табличный способ,*** если дана таблица, содержащая значения переменной x и соответствующие значения переменной y. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо социологических процессов и явлений.

Пример. Рост числа научных изданий y, начиная с 1750 г. с интервалом в 50 лет, в зависимости от года x, выглядит (округленно) следующим образом.

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
У	10	100	1000	10000	100000

К недостатку табличного способа можно отнести невозможность поместить в таблице все значения аргумента. Табличная запись, особенно если она велика, не обладает наглядностью и не позволяет обозреть общий вид графика функции.

- ***Графический способ*** заключается в том, что строится график функции. Непосредственно из этого графика находятся значения функции y, соответствующие значениям аргумента x. Не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, множество точек окружности не может быть графиком функции, поскольку одному значению абсциссы x соответствуют два значения ординаты y_1 и y_2.

Рассмотрим *основные элементарные функции*:

1. *степенная* функция $y = x^{\alpha}$, где α – действительное число;
2. *показательная* функция $y = a^x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$;
3. *логарифмическая* функция $y = \log_a x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$;
4. *тригонометрические* функции $y = \sin x, \quad y = \cos x$;
5. *обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x$.

Приведём **примеры** функций из психологии, экономики и социологии.

1. Если x – спрос на товар, y – цена товара, то $y = 3 \cdot x^{-0,8}$ – функция цены от спроса товара.

2. Пусть x – цена товара, y – спрос на товар, то $y = \dfrac{200}{x+2}$ – функция спроса от цены товара.

3. Сумма денежного вклада в банке $y = 100 \cdot (1{,}03)^x$ – функция от времени x, которое хранится вклад в банке.

4. Психофизический закон Вебера-Фехнера: $S = a \lg Y + b$, где S – интенсивность ощущения, Y – интенсивность раздражителя, a и b – константы, зависящие от условий и вида раздражителей.

5. Скорость смены представлений в сознании (И. Гербарта): $Y = a(1 - e^{-bx})$, где x – время, y – скорость, a и b – константы, зависящие от опыта.

6. В психологическом тесте Д. Векслера IQ_0 зависит линейно от шкальных оценок по 11 субъектам этого теста $IQ_0 = 0{,}6\sum_{1}^{11} y_i + b_0$, где IQ_0 – общий показатель уровня интеллекта, $1 \le y_i \le 11$ – шкальные оценки, b_0 – поправка на зависимость относительного интеллекта от возраста человека.

*Функция $f(x)$ называется **четной**, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство* $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY.

*Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство* $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начало координат (0;0).

Упражнение. На каком из рисунков (рисунок 8) изображён график чётной, а на каком нечётной функции?

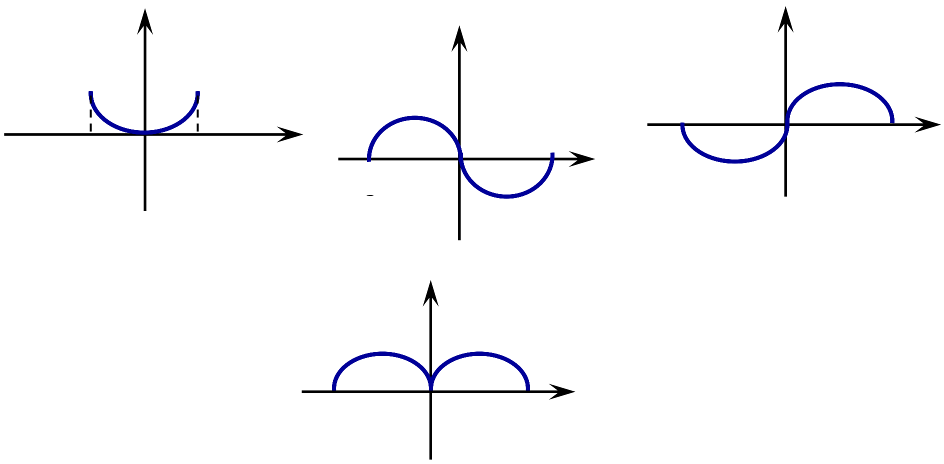


Рисунок 8 – Примеры четных и нечетных функций.

Пусть заданы функция $u = g(x)$ с областью определения X, областью значений U и функция $y = f(u)$ с областью определения, содержащей множество U и областью значений Y. Тогда функция, обозначаемая через $y = f(g(x))$, которая каждому значению x из множества X ставит в соответствие единственное значение y из множества Y такое, что $y = f(u)$ и $u = g(x)$, называется *сложной функцией*.

Например, если $y = u^3$, $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ – сложная функция, определенная на всей числовой прямой.

***Элементарными** функциями называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций.*

*Функция $y=f(x)$, определённая на множестве X, называется **монотонно возрастающей (неубывающей)**, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих X из неравенства $x_1 < x_2$ следует* $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \le f(x_2))$.

Функция y=f (x), определённая на множестве X, называется ***монотонно убывающей (невозрастающей)****, если для любых* x_1 *и* x_2 *принадлежащих множеству X из неравенства* $x_1 < x_2$ *следует* $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Упражнение. На каком из рисунков (рисунок 9) изображён график убывающей, а на каком возрастающей функции?

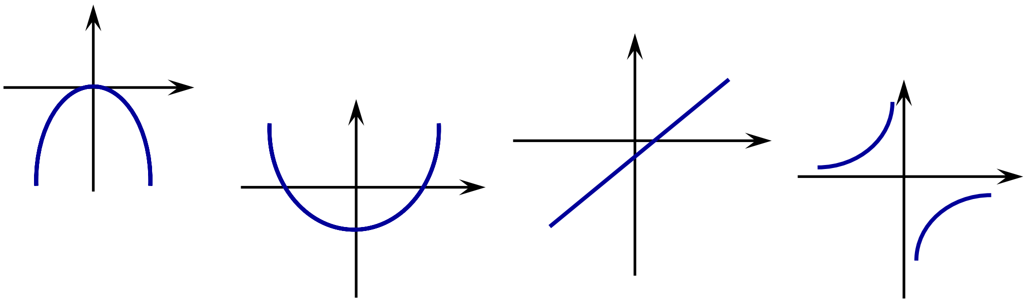


Рисунок 9 – Примеры монотонных функций.

Понятие предела функции. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал (a, b), содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-*окрестностью* точки x_0 (обозначается $U_\varepsilon(x_0)$).

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что одно и то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (рисунок 10)

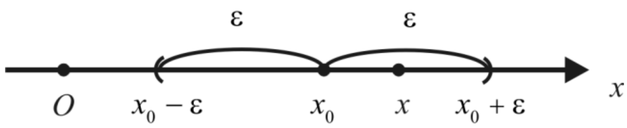


Рисунок 10 – Окрестность точки.

Проколотой окрестностью точки x_0 называется ее окрестность, из которой исключена сама точка x_0.

Проколотой ε-*окрестностью* точки x_0 (обозначается $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$) называется ε-окрестность точки x_0, из которой исключена сама точка x_0, т. е. объединение интервалов $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то $0 < |x - x_0| < \varepsilon$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Сформулируем определение предела функции в точке.

Число A называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$*, если для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *найдется такое число* $\boldsymbol{\delta = \delta(\varepsilon) > 0}$ *(зависящее от* ε*), что для всех x, удовлетворяющих условию* $\boldsymbol{0 < |x - x_0| < \delta}$*, выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x) - A| < \varepsilon}$**.**

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Выясним *геометрический смысл определения предела функции в точке*. Число A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой ε-окрестности точки A на оси ординат найдется такая проколотая δ-окрестность точки x_0 на оси абсцисс, что для всех x из этой окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, все точки $(x, f(x))$, где $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, лежат внутри полосы $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ шириной 2ε (рисунок 11)

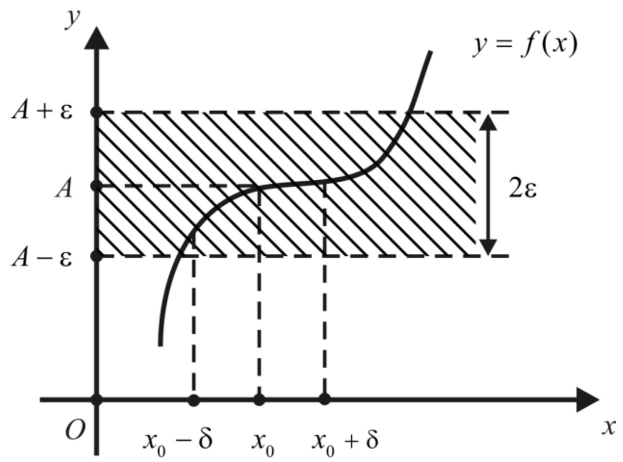


Рисунок 11 – Геометрический смысл предела функции.

Замечание: Из определения предела функции в точке $\boldsymbol{x_0}$, а именно из условия, что в этой точке функция может быть не определена, непосредственно следует утверждение: *если функции f и g таковы, что* $f(x) = g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности точки a и пределы этих функций в точке* x_0 *существуют, то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Пример: Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 2) = 5$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 5| = |(3x + 2) - 5| = |3x - 3| < \varepsilon$, т. е. $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Положив $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, видим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0 < |x - 1| < \delta\left(= \frac{\varepsilon}{3}\right)$, выполняется неравенство $|(3x + 2) - 5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 2) = 5$.

Иногда приходится рассматривать предел функции $y = f(x)$ при условии, что точка x, приближаясь к точке x_0, остается либо правее, либо левее ее. При этом способ приближения x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. В связи с этим вводят понятия односторонних пределов.

Число A называется ***пределом слева*** ***(справа)*** *функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$*, если для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *существует число* $\boldsymbol{\delta = \delta(\varepsilon) > 0}$ *такое, что для всех* $\boldsymbol{x \in (x_0 - \delta, x_0)}$ *(для всех* $\boldsymbol{x \in (x_0, x_0 + \delta))}$ *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x) - A| < \varepsilon}$.

Обозначения: для предела функции слева

$$A = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x);$$

для предела функции справа

$$A = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Пример: Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем:

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1, \quad f(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Этот результат можно увидеть наглядно, построив график функции (рисунок 12).

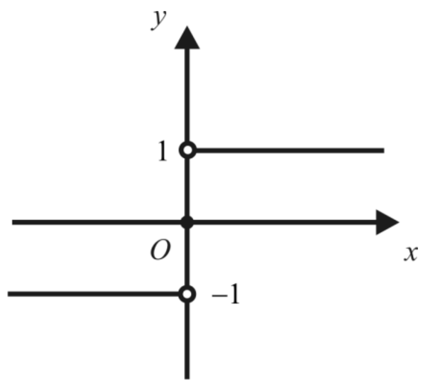


Рисунок 12 – График функции.

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции в точке.

Теорема: *Функция* $y = f(x)$ *имеет предел в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда в этой точке у нее существуют равные пределы слева и справа, причем общее значение этих пределов является пределом функции в точке* x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Пример: Функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ 1, & x=1, \\ 3-x, & x>1 \end{cases}$$

при $x\to 1$ имеет предел, равный 2, поскольку
$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2.$

Далее рассмотрим определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-\infty,+\infty)$.

Число A называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ *при* $\boldsymbol{x\to\infty}$, *если для любого* $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ *существует такое число* $\boldsymbol{M=M(\varepsilon)>0}$, *что при всех x, удовлетворяющих неравенству* $\boldsymbol{|x|>M}$, *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x)-A|<\varepsilon}$**.**

Записывают $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ и говорят, что функция $y=f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к ∞.

Пример, при достаточно больших по модулю x значение функции $y=\dfrac{1}{x}$ становится сколь угодно малым (меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε), поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Кратко определение предела функции на бесконечности можно записать в виде:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad \forall x:\ |x|>M \quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Геометрический смысл этого определения таков: если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A,$ то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0,$ что при $x\in(-\infty,M)$ или $x\in(M,+\infty)$ соответствующие значения функции $y=f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки $(x,\ f(x))$ графика функции лежат в полосе шириной $2\varepsilon,$ ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$ (рисунок 13).

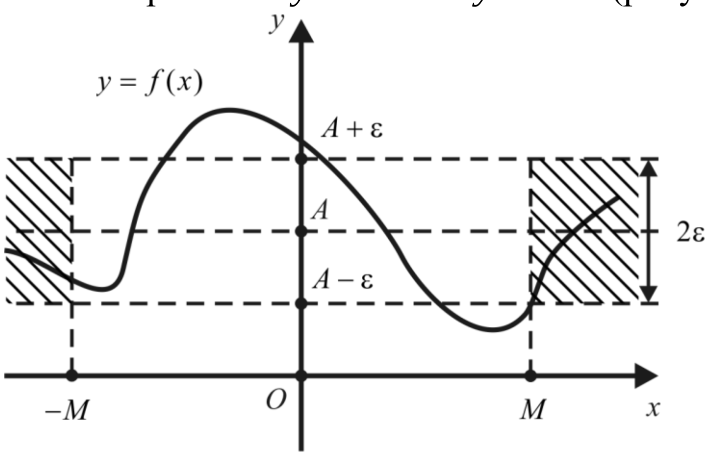


Рисунок 13 – Геометрический смысл.

Число A называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ *при* $\boldsymbol{x \to +\infty,}$ *если для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *существует такое число* $\boldsymbol{M = M(\varepsilon) > 0,}$ *что при всех x, удовлетворяющих неравенству* $\boldsymbol{x > M,}$ *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x) - A| < \varepsilon.}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x:\ x > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ *при* $\boldsymbol{x \to -\infty,}$ *если для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *существует такое число* $\boldsymbol{M = M(\varepsilon) > 0,}$ *что при всех x, удовлетворяющих неравенству* $\boldsymbol{x < -M,}$ *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x) - A| < \varepsilon.}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x:\ x < -M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример: Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Решение: Выберем любое $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких x будет выполнятся неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon,$ т. е. $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$ Решая это неравенство, получаем $|x| > \frac{1}{\varepsilon}.$ Таким образом, если $M = \frac{1}{\varepsilon},$ то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M,$ справедливо неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$

Свойства функций, имеющих предел в точке. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции

Общие свойства функций, имеющих передел в точке:

1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x_0,$ то он единственный.

2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Предел и неравенства

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > B$ $(A < B),$ то существует проколотая окрестность точки $x_0,$ в которой выполняются неравенства: $f(x) > B$ $(f(x) < B).$

2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \ge g(x)$ $(f(x) \le g(x)).$ Тогда $A \ge B$ $(A \le B).$

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливы неравенства $f(x) \le h(x) \le g(x).$ Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A.$

Предел и арифметические операции

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$ Тогда существуют пределы функций $f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

а) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$

б) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=A\cdot B,$ в частности $\lim\limits_{x\to x_0}(c\,f(x))=cA;$

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0).$

В последнем случае функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только при тех значениях x, для которых функция $g(x)\neq 0.$

Рассмотренные выше свойства будем принимать без доказательства.

Замечание: Свойства 1–3 справедливы также и в случае, когда x_0 является одним из символов $+\infty,-\infty,\infty.$ Под окрестностью $U(x_0)$ в этих случаях понимается множество, у которого существует подмножество $U(x_0,\varepsilon)\subset U(x_0),$ где $\varepsilon>0$ и

$$U(+\infty,\varepsilon)=\left\{x:\ x\in\boldsymbol{R},\ x>\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\{+\infty\};$$

$$U(-\infty,\varepsilon)=\left\{x:\ x\in\boldsymbol{R},\ x<-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\{-\infty\};$$

$$U(\infty,\varepsilon)=\left\{x:\ x\in\boldsymbol{R},\ |x|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\{\infty\}.$$

Данные множества называются ε-*окрестностями* элементов $+\infty,-\infty$ и ∞ соответственно.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3=2\cdot 2+3=7$.

2)
$$\lim_{x\to 1}\left(9x^2-6x+8\right)=\lim_{x\to 1}9x^2-\lim_{x\to 1}6x+\lim_{x\to 1}8=9\lim_{x\to 1}x^2-6\lim_{x\to 1}x+8=9\cdot 1^2-6\cdot 1+8=9-6+8=11.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}$

Решение: Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1=2\cdot 2+1=5$. Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=\frac{10}{5}=2.$$

Функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ *называется* ***бесконечно малой*** *при* $\boldsymbol{x \to x_0}$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = 0}$, *т. е. для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *найдется такое число* $\boldsymbol{\delta = \delta(\varepsilon) > 0}$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $\boldsymbol{0 < |x - x_0| < \delta}$, *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x)| < \varepsilon}$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Примерами бесконечно малых функций являются функции $y = x^2$ при $x \to 0$, $y = x - 2$ при $x \to 2$, $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной*** *на множестве X, если существует такое число* $M > 0$, *что для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство* $|f(x)| \le M$.

Теорема*: *Сумма конечного числа бесконечно малых функций, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями.

Следствие: Так как всякая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то *произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малой функции на число также является бесконечно малой функцией.*

Между функциями, имеющими предел в точке, и бесконечно малыми функциями существует определенная связь, которую устанавливает следующая теорема, рассмотрим ее без доказательства.

Теорема: *Для того чтобы* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $f(x) = A + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$.

Функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ *называется* ***бесконечно большой*** *при* $\boldsymbol{x \to x_0}$, *если для любого числа* $\boldsymbol{M > 0}$ *существует такое число* $\boldsymbol{\delta = \delta(M) > 0}$, *что для всех x, удовлетворяющих условию* $\boldsymbol{0 < |x - x_0| < \delta}$, *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x)| > M}$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция $y = f(x)$ *стремится к бесконечности при* $x \to x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке x_0.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ является бесконечно большой функцией при $x \to 1$ (рисунок 141)

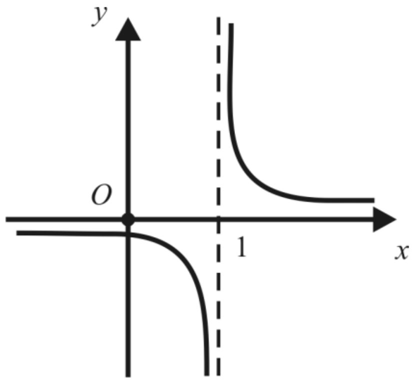


Рисунок 14 – Пример бесконечно большой функцией при $x \to 1$.

Если же выполняется неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$), то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to +\infty, -\infty, \infty$.

Так, функция $y = f(x)$ *называется* ***бесконечно большой*** *при* $x \to \infty$, *если для любого числа* $M > 0$ *существует такое число* $L = L(M) > 0$, *что для всех x, удовлетворяющих неравенству* $|x| > L$, *выполняется неравенство* $|f(x)| > M$.

Например, $y = x^3$ является бесконечно большой функцией при $x \to \infty$.

Теорема: *Если функция* $\alpha(x)$ *является бесконечно малой при* $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, *то функция* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *является бесконечно большой при* $x \to x_0$, *и наоборот, если функция* $f(x)$ *– бесконечно большая при* $x \to x_0$, *то функция* $\dfrac{1}{f(x)}$ *– бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Пример: Доказать по определению, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Решение: Выберем любое $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких *x* будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$, т. е. $\left|\dfrac{1}{x}\right| > M$. Решая это неравенство, получаем $|x| < \dfrac{1}{M}$. Таким образом, если $\delta = \dfrac{1}{M}$, то для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > M$. Это означает, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5}{3x - 12}$.

Решение: Так как $\lim\limits_{x \to 4}(3x - 12) = 0$, то (3*x*–12) есть бесконечно малая величина, а обратная ей величина есть бесконечно большая. Т.е.

$$\lim_{x\to4}\frac{5}{3x-12}=5\cdot\lim_{x\to4}\frac{1}{3x-12}=5\cdot\infty=\infty\,.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4x+3}$.

Решение: Так как $(4x+3)$ при $x\to\infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x+3}$ есть бесконечно малая, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4x+3}=2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x+3}=0$.

Замечательные пределы

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin 4x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Вычислим этот предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin 4x}=5\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 4x}=5\cdot\lim_{x\to0}\frac{4\cdot x}{4\cdot\sin 4x}=$$

$$\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{4}.$$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx2{,}71 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\approx2{,}71\,.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^3=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^3=e^3$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$, где $k\in\boldsymbol{R}$.

Решение. Обозначим $x=kt$. Тогда $t\to\infty$ при $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^k=e^k.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x-3}$ на x, сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5.$$

Использование пределов в экономике и социологии

Многие социально-экономические закономерности удается увидеть с помощью предельного перехода.

Пример. Экспериментально была установлена зависимость $y=\dfrac{200}{x+2}$ между ценой одного из товаров x и спроса на него y. Исследовать поведение функции спроса от цены товара $y=\dfrac{200}{x+2}$ при неограниченном увеличении цены ($x\to\infty$).

Решение. Т. к. (x+2) при $x\to\infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\dfrac{1}{x+2}$ есть бесконечно малая, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}200}{\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)}=0.$ Таким образом, при неограниченном росте цен спрос приближается к нулю.

Пример. Экономические исследования показывают, что спрос y на товары первой необходимости и спрос z на предметы роскоши зависят от дохода x следующим образом: $y(x)=\dfrac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}$, $z(x)=\dfrac{b_2\cdot x\cdot(x-a_2)}{x-c_2}$, где a_1,a_2 – уровни доходов, при которых начинается приобретение тех или иных товаров. Это функции Л. Торнквиста.

Найдем как меняются *y(x)* при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=b_1\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{a_1}{x}}{1-\frac{c_1}{x_1}}\right)=b_1.$$

Найдем как меняются *z(x)* при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2 \cdot x(x-a_2)}{x-c_2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = b_2 \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x - \frac{a_2}{x}}{1 - \frac{c_2}{x}}_1 \right) = \infty.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении доходов спрос на товары первой необходимости растет до определенного предела, равного *b*. Миллионеры не покупают для себя хлеба больше, чем съедят. Поэтому число *b* называется уровнем насыщения. Спрос же на предметы роскоши не имеет уровня насыщения. Он растет даже при неограниченном росте доходов.

Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Ф*ункция* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *называется* ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, *если существует предел функции в точке* $\boldsymbol{x_0}$, *равный значению функции в этой точке, т. е.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции).

Замечание: Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то равенство из определения непрерывной в точке функции можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0),$$

т. е. *для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны*.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как она определена в этой точке, имеет в ней предел и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 2$, так как она определена в этой точке и $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = (\lim\limits_{x\to 2} x)^2 = 4 = f(2)$ (рисунок 12, *а*).

Пример. Функция $f(x)=\begin{cases} x, \ x\le 2, \\ x+2, \ x>2 \end{cases}$ определена в точке $x_0=2,$ но не имеет предела в этой точке (рисунок 12, *б*), поскольку

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=2\ne 4=\lim_{x\to 2+0} f(x).$$

Следовательно, она не является непрерывной в точке $x_0=2.$ ◄

Пример: Функция $f(x)=\begin{cases} x^2, \ x\ne 2, \\ 1, \ x=2 \end{cases}$ определена в точке $x_0=2,$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4,$ но не является непрерывной в этой точке, поскольку $f(2)=1\ne \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (рисунок 15, *в*).

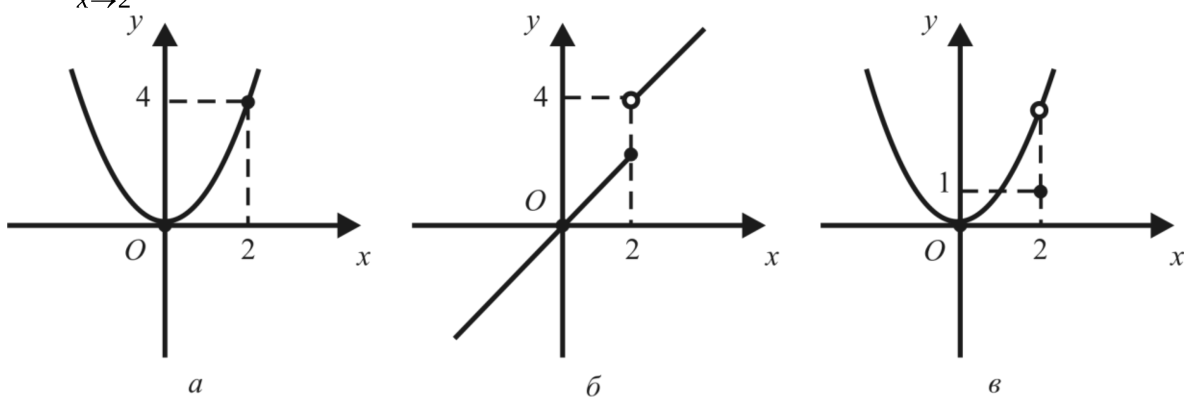


Рисунок 15 – Примеры функций.

Таким образом, для непрерывности функции $y=f(x)$ существенно выполнение трех условий:

1) функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки x_0;
2) функция $y=f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Следует отметить, что свойства функций, непрерывных в точке, вытекают из определения непрерывности и соответствующих свойств предела функции в точке. Сформулируем свойства без доказательства.

1. Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Непрерывная функция, отличная от нуля в точке $x_0,$ сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, т. е. если $f(x_0)>0$ $(f(x_0)<0),$ то существует $U(x_0)$ такая, что $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ для любого $x\in U(x_0).$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0,$ то функции $f(x)\pm g(x),$ $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\ne 0)$ также непрерывны в точке $x_0.$

Непрерывность основных элементарных функций

1. Постоянная функция $f(x)=C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$, поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} C=C=f(x_0)$.

2. Функция $f(x)=x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$, поскольку $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0=f(x_0)$.

3. Многочлен

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0, \text{ где } n\ge 0,\ n\in \boldsymbol{Z},\ a_i\in \boldsymbol{R},$$

есть функция, непрерывная в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Это следует из непрерывности функций $f(x)=C$, $f(x)=x$ и свойства 3 непрерывных в точке функций.

4. Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида $g(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, непрерывна во всех таких точках $x\in \boldsymbol{R}$, в которых ее знаменатель не равен нулю.

5. Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ непрерывны во всех точках $x\in \boldsymbol{R}$.

6. Функция $y=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в точках, где $\cos x\ne 0$, т. е. $x\ne \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

7. Функция $y=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна в точках, где $\sin x\ne 0$, т. е. $x\ne \pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция $y=a^x$ $(a>0, a\ne 1)$ непрерывна при всех $x\in \boldsymbol{R}$.

9. Функция $y=\log_a x$ $(a>0, a\ne 1)$ непрерывна при всех $x>0, x\in \boldsymbol{R}$.

Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация

Функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ *называется* ***непрерывной слева (справа) в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, *если*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0) \quad \Big(\Big(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\Big)\Big).$$

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0,\\ 1+x, & x<0 \end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x=0$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(0)=0$, и не является непрерывной слева в точке $x=0$, поскольку $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1\ne f(0)=0$.

Очевидно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева и справа в этой точке, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Точка $\boldsymbol{x_0}$ *называется* ***точкой разрыва функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$, *либо если функция не определена в самой точке* $\boldsymbol{x_0}$, *либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной*.

Иными словами, точка x_0 является точкой разрыва функции, если x_0 является значением аргумента, при котором происходит «разрыв графика функции».

Все точки разрыва функции подразделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка $\boldsymbol{x_0}$ *называется* ***точкой разрыва первого рода*** *функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$, *если в этой точке пределы функции слева и справа (т. е. односторонние пределы) существуют и конечны. Величина* $\boldsymbol{|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|}$ *называется скачком функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$.

Если пределы функции $y = f(x)$ слева и справа существуют, конечны, и при этом $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ (т. е. скачок функции в точке x_0 равен нулю), то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***. Чтобы устранить разрыв функции в точке x_0, достаточно изменить значение функции только в одной этой точке. В этом случае говорят, что функция может быть доопределена по непрерывности в точке x_0.

Точка $\boldsymbol{x_0}$ *называется* ***точкой разрыва второго рода*** *функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$, *если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.*

Пример. Функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, так как $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{|x|}{x} = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{|x|}{x} = 1$. Скачок функции в точке $x = 0$ равен $|1 - (-1)| = 2$.

Пример. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, поскольку

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если положить $f(0) = 1$ (вместо $f(0) = 2$), разрыв устранится и функция станет непрерывной.

Пример. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=+\infty.$

Функция $y=f(x)$ *называется* ***непрерывной на интервале*** (a,b), *если она непрерывна в каждой точке этого интервала.*

Функция $y=f(x)$ *называется* ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, *если она непрерывна на интервале* (a,b) *и в точке a непрерывна справа, а в точке* b *непрерывна слева.*

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной

Одним из основных понятий дифференциального исчисления является ***производная***, которая используется при исследовании процессов, в том числе социологических и экономических, описываемых функциями.

Рассматривая различные по характеру задачи, мы приходим к пределу одного вида, который очень часто используется в различных областях науки. Дадим общее определение производной.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X $(x\in X)$. Выберем некоторую точку $x_0\in X$ и найдём значение функции в этой точке: $f(x_0)=y_0$. Дадим x_0 ***приращение аргумента*** Δx, $\Delta x\neq 0$ такое, чтобы $(x_0+\Delta x)\in X$, и вычислим ***приращение функции*** $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, которое зависит от приращения аргумента Δx (рисунок 16).

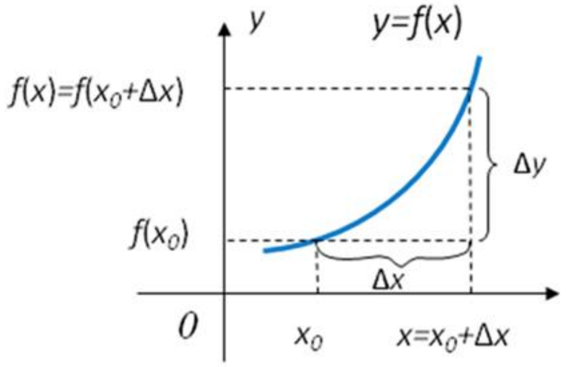


Рисунок 16 – Приращения аргумента и функции.

Далее рассмотрим некоторые задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о мгновенной скорости прямолинейного движения

Предположим, что точка *M* движется по некоторой прямой, которую примем за ось *Ox*. Каждому значению времени *t* соответствует определенное расстояние $OM=x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса *x* движущейся точки есть функция времени *t*, т. е. $x=f(t)$. Это уравнение называется *уравнением движения*, оно выражает закон движения точки.

Найдем скорость движения точки в любой момент времени t.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, причем $OM = x$. Наряду с моментом времени t рассмотрим более поздний момент времени $t + \Delta t$. За промежуток времени Δt между этими моментами точка проходит путь $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$

Средняя скорость за промежуток времени Δt равна

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Будем уменьшать длину промежутка времени Δt. Предел средней скорости $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной скоростью* в момент времени t:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, если точка движется прямолинейно, то ее скорость в момент времени t равна пределу отношения приращения координаты точки к приращению времени, когда последнее стремится к нулю.

Задача о касательной

Дадим сначала определение касательной к кривой на плоскости.

Пусть L – некоторая непрерывная кривая, M_0 – точка этой кривой. Проведем через точку M_0 секущую M_0N (рисунок 17). Когда точка N, двигаясь вдоль кривой, как угодно близко приближается к точке M_0, эта секущая, поворачиваясь около точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0T. *Касательной к кривой L в точке* M_0 называется предельное положение M_0T секущей M_0N, когда точка N стремится к точке M_0 вдоль данной кривой.

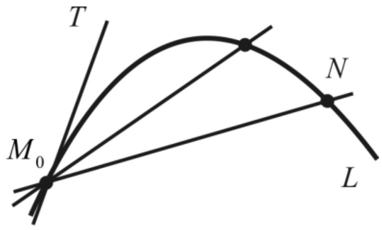


Рисунок 17 – Секущие и касательная.

Если секущая M_0N при $N \to M_0$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной кривой в точке M_0 не существует.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная функция. Найдем уравнение касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Придадим абсциссе x_0 приращение Δx и от точки M_0 графика перейдем к точке N с абсциссой $x_0 + \Delta x$ и ординатой $y_0 + \Delta y$. Пусть M_0N – секущая, φ – угол наклона секущей к положительному направлению оси Ox (рисунок 18).

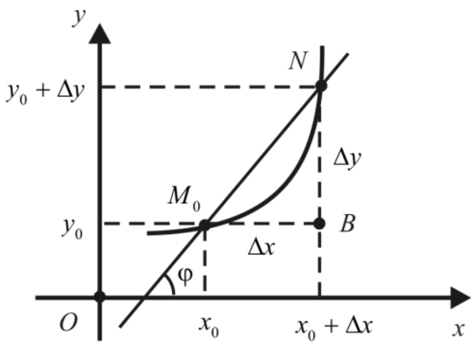


Рисунок 18 – Угол наклона касательной.

Из треугольника M_0NB находим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть точка N стремится к точке M_0 вдоль графика функции $y = f(x)$. Тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0N стремится к своему предельному положению – касательной M_0T (мы предполагаем, что касательная существует). Пусть α – угол, который образует касательная M_0T с осью Ox. Тогда при $\Delta x \to 0$ $\varphi \to \alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{N \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Значит, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, то ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В рассмотренных выше задачах по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной, и затем вычислялся предел их отношения. Оказывается, что многие задачи приводят к необходимости вычисления такого же предела, поэтому имеет смысл специально заняться его изучением.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Придадим точке x_0 ненулевое приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$ *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует.*

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 – это *число*, которое обозначается через $f'(x_0)$ (читается: эф штрих от x_0) или $y'(x_0)$:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.}$$

Если производная существует во всех точках x из окрестности $U(x_0)$, то она является *функцией аргумента x*.

Производная имеет несколько обозначений: y', $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Замечание: Если для некоторого значения x_0 выполняется одно из условий $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$, то говорят, что в точке x_0 существует *бесконечная производная*, равная соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Из рассмотренных выше задач следует ***физический и геометрический смысл производной***.

Физический смысл производной: мгновенная скорость в момент времени t_0 равна производной от закона движения, т. е. $V(t_0)=f'(t_0)$.

Если рассматривать произвольную функцию $y=f(x)$, то ее производная характеризует скорость изменения переменной y по сравнению с переменной x. Чем больше модуль производной, тем резче изменяется функция y при изменении аргумента x и, следовательно, тем круче подымается или опускается график этой функции.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,\ f(x_0))$ равен значению производной данной функции в точке x_0.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,\ f(x_0))$ имеет вид $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной графика функции $y=f(x)$ в точке касания $M(x_0,\ f(x_0))$, называется *нормалью*. Так как угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1\cdot k_2=-1$, то отсюда, предполагая, что $f'(x_0)\neq 0$, получаем уравнение нормали: $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$.

Пример. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$. Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0=2$.

Решение: По определению производной получаем

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-(2^2+2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+5\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+5)=5.$$

Пользуясь уравнением касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, имеем

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=5(x-2)+2^2+2=5x-4.$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$ имеет вид $y=5x-4$.

Используя понятия односторонних пределов функции, введем понятия правой и левой производных функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Правой производной *функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$ *(производной справа) называется предел*

$$\boldsymbol{f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Левой производной *функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$ *(производной слева) называется предел*

$$\boldsymbol{f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Это ***односторонние производные***.

Замечание: Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ существуют и равны между собой, причем $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Пример: Функция $y = |x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ правую производную

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

и левую производную

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

но не имеет производной $f'(x_0)$, поскольку $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» будем понимать наличие *конечной производной*, если не оговорено противное.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой в этой точке****. Операция нахождения производной называется* ***дифференцированием****.*

Теорема**:** *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.*

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0. Тогда существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отсюда следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, или $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\alpha \cdot \Delta x) = 0$, а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание**:** При доказательстве теоремы мы установили, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке выражается формулой

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$

Замечание: Обратное утверждение предыдущей теоремы не всегда верно: непрерывная в данной точке функция может не иметь в ней производной.

Например, функция $y=|x-1|$ непрерывна в точке $x_0=1,$ но не является в ней дифференцируемой.

Основные правила дифференцирования

Теорема: *Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (при $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие равенства*:

1) $(u+v)'=u'+v';$
2) $(u-v)'=u'-v';$
3) $(uv)'=u'v+uv';$
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}.$

Рассмотрим примеры нахождения производных элементарных функций.

1. $f(x)=C.$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0, \text{ т. е. } C'=0.$$

Таким образом *постоянный множитель можно выносить за знак производной*:

$$(Cu)'=Cu'.$$

2. $f(x)=x^{\alpha},$ α – действительное число.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}, \qquad \text{т. е.}$$

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$ Отметим частные случаи этой формулы:

$$(x)'=1,\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

3. $f(x)=a^x,$ $a>0,$ $a\neq 1.$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a, \qquad \text{т. е.}$$

$(a^x)'=a^x\ln a.$ В частности, $(e^x)'=e^x.$

4. $f(x)=\log_a x,$ $a>0,$ $a\neq 1.$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot x}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},\ \text{т. е.}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.\ \text{В частности,}\ (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

Таким образом, $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$. Отсюда

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производные функций:

1) $y=x^7-4x^5+2x-1$;

2) $y=x\sin x$;

3) $y=\dfrac{x+1}{x^2+2}$.

Решение: Используя основные правила дифференцирования и формулы для производных элементарных функций, имеем:

1) $(x^7-4x^5+2x-1)'=7x^6-4\cdot 5x^4+2\cdot 1-0=7x^6-20x^4+2$;

2) $(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x+x\cos x$;

3) $$\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)'=\frac{(x+1)'(x^2+2)-(x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=\frac{1\cdot(x^2+2)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=$$

5) $$=\frac{x^2+2-2x^2-2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}.$$

Пример. Найти угол φ между положительным направлением оси абсцисс и касательной к параболе $y=x^2-5x-3$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение: Так как $y'=2x-5$, то $y'(3)=1$. Поэтому для искомого угла φ имеем $\operatorname{tg}\varphi=1$, откуда находим $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Примеры. Вычислить производные следующих функций:

1. $f(x)=5\cdot x^3+2\cdot x^2-3\cdot x+6$,

$f'(x)=5\cdot(x^3)'+2\cdot(x^2)'-3\cdot(x)'+6=5\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 2\cdot x-3\cdot 1+0=15x^2+4\cdot x$

.

2. $f(x)=x\cdot\cos x$,

$f'(x)=x'\cdot\cos x+x\cdot(\cos x)'=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)=\cos x-x\sin x.$

3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Производная сложной функции. Производная обратной функции

Пусть функция $u=g(x)$ задана в некоторой окрестности $U=U(x_0)$ точки x_0, а функция $y=f(u)$ – в некоторой окрестности $V=V(u_0)$ точки $u_0=g(x_0)$, причем V содержит множество $g(U)$. Тогда определена ***сложная функция*** $y=f(g(x))$ с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема: *Если функция* $u=g(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *а функция* $y=f(u)$ *дифференцируема в точке* $u_0=g(x_0)$, *то сложная функция* $y=f(g(x))$ *дифференцируема в точке* x_0, *причем*

$$y'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо *производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу*:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=g(x)$, то $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$.

Пример. Найти производную функции $y=\sin(5x+2)$.

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить так: $y=\sin u$, где $u=5x+2$. Поскольку $y'_u=\cos u=\cos(5x+2)$, $u'_x=5$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos(5x+2)\cdot 5=5\cos(5x+2).$$

Пример. Найти производную функции $y=\sin^3(5x+2)$.

Решение: Представим данную функцию в виде $y=u^3$, где $u=\sin v$, $v=5x+2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=3u^2\cdot\cos v\cdot 5=15\sin^2(5x+2)\cos(5x+2).$$

Теорема: *Если функция* $y=f(x)$ *строго монотонна на интервале* (a,b) *и имеет производную* $f'(x_0)\neq 0$ *в произвольной точке* x_0 *этого интервала, то обратная ей функция* $x=g(y)$ *существует и также имеет производную в точке* $y_0=f(x_0)$, *причем*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Приведем формулы для вычисления производных обратных тригонометрических функций:

1. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1\le x\le 1;$

2. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1\le x\le 1;$

3. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\ x\in \boldsymbol{R};$

4. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2},\ x\in \boldsymbol{R}.$

Докажем первую формулу, т.е. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1\le x\le 1;$

Пусть $y=\arcsin x.$ Обратная ей функция имеет вид $x=\sin y,\ \ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$ На интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x'_y=\cos y\ne 0.$ По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y>0$ при $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$

В точках $x=\pm 1$ имеем $(\arcsin x)'=+\infty.$

Дифференциал функции

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение, как было сказано ранее в пункте 3.3.1, в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

При достаточно малых значениях Δx и $f'(x_0)\ne 0$ основной вклад в эту сумму вносит первое слагаемое $f'(x_0)\cdot\Delta x,$ так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0,$ т. е. величина $\alpha\cdot\Delta x$ сколь угодно мала по сравнению с Δx при $\Delta x\to 0.$ Первое слагаемое пропорционально Δx и, следовательно, линейно зависит от $\Delta x.$

Говорят, что слагаемое $\boldsymbol{f'(x_0)\cdot\Delta x}$ *является главной линейной частью приращения функции* $\boldsymbol{y=f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$ *и называют его* ***дифференциалом функции*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ *в точке* $\boldsymbol{x_0}$.

Обозначают дифференциал через dy или $df(x_0)$. Таким образом,

$$\boldsymbol{dy=f'(x_0)\cdot\Delta x.}$$

Для функции $y=x$ получаем $dy=1\cdot\Delta x=\Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx=\Delta x$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$dy=f'(x_0)dx,$$

откуда $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$, или, более кратко, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ (читается: игрек штрих равно дэ игрек по дэ икс). Это означает, что *производная функции равна отношению дифференциала данной функции к дифференциалу ее аргумента*.

Замечание: Дифференциал функции можно определить и так. Если приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0 представимо в виде $\Delta y=A\Delta x+\alpha\Delta x$, где A – постоянная, то $dy=A\Delta x$, а сама функция называется дифференцируемой в точке x_0.

Дифференциал функции в точке имеет простой ***геометрический смысл***. Проведем к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,y_0)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x_0+\Delta x$ (рисунок 19).

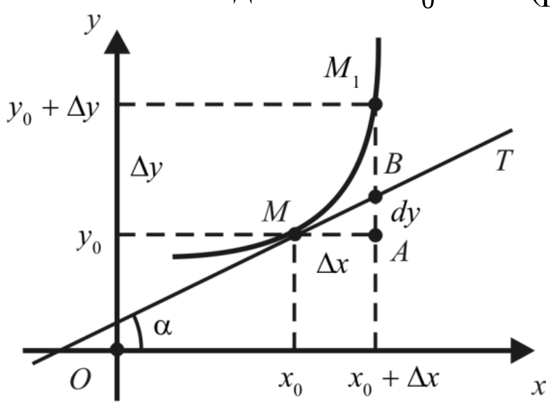


Рисунок 19 – Дифференциал функции.

На рисунке $|AM|=\Delta x$, $|AM_1|=\Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{|AB|}{\Delta x}$, т. е. $|AB|=\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$. Но согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$. Поэтому имеет место равенство $|AB|=f'(x_0)\cdot\Delta x$, т. е. $|AB|=dy$.

Таким образом, *дифференциал функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда* x_0 *получает приращение* Δx.

Процесс нахождения дифференциала функции, как и производной, называется ***дифференцированием*** *и осуществляется по тем же правилам, что и для производных*:

1) $d(u+v)=du+dv;$
2) $d(u-v)=du-dv;$
3) $d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv;$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2},\ v\neq 0.$

Пример: Найти дифференциал функции $y=(\cos x+x\sin x)$.

Решение:

$$dy=d(\cos x)+d(x\sin x)=-\sin x\cdot dx+\sin x\cdot dx+x\cdot d(\sin x)=x\cos x dx.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

Рассмотрим практическую сторону применения производной. Следует отметить, что в этом разделе мы рассмотрим только выборочно теоремы дифференциального исчисления, необходимые будущему социологу в своей профессиональной деятельности. Для более подробного и углубленного изучения данного вопроса необходимо смотреть и изучать специализированную математическую литературу.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a,b).

Точка $x_0\in(a,b)$ *называется* ***точкой минимума (максимума)*** *функции* $y=f(x)$, *если существует такая окрестность* $U(x_0)$ *точки* x_0 *что для любого* $x\in U(x_0)$ *выполнено условие* $\boldsymbol{f(x)\geq f(x_0)}$ $\boldsymbol{(f(x)\leq f(x_0))}$. *Если для любого* $x\in U(x_0)$ $x\neq x_0$ *выполнено условие* $\boldsymbol{f(x)>f(x_0)}$ $\boldsymbol{(f(x)<f(x_0))}$, *то точка* x_0 *называется точкой строгого минимума (строгого максимума) функции* $y=f(x)$ *Точки минимума и максимума называются* ***точками экстремума****, а значения функции в них –* ***экстремумами функции****.*

Отметим, что точки минимума и максимума функции имеют *локальный характер*, в силу чего значения функции в точках минимума могут оказаться больше ее значений в точках максимума. Так, на рисунке 20 точки x_1 и x_3 являются точками максимума функции, а точки x_2 и x_4 – точками минимума функции. Значение функции в точке максимума x_1 меньше ее значения в точке минимума x_4.

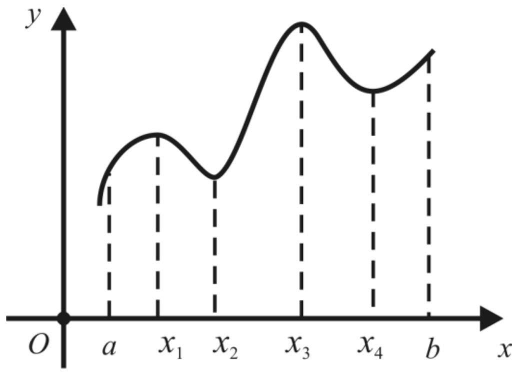


Рисунок 20 – Точки экстремума.

Необходимое условие экстремума функции выражается следующей теоремой.

Теорема (Ферма). *Пусть* x_0 *– точка экстремума функции* $y = f(x)$ *и существует производная* $f'(x_0)$. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет следующий *геометрический смысл*: если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику данной функции в точке $(x_0,\ f(x_0))$, параллельна оси *Ox* (рисунок 21). В самом деле, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю: $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 0$.

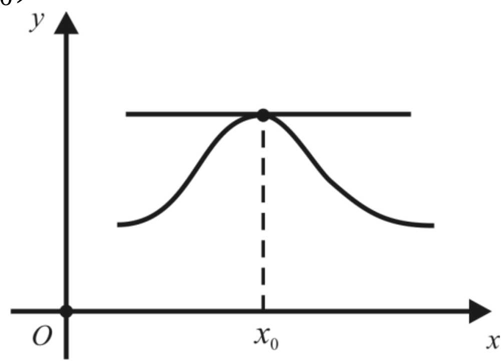


Рисунок 21 – Угловой коэффициент касательной.

Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием экстремума функции $y = f(x)$ в точке x_0. **Например**, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную нулю, но $x_0 = 0$ не является точкой экстремума данной функции (рисунок 19, *а*).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. **Например**, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производной не имеет, но $x_0 = 0$ является точкой минимума данной функции (рисунок 22, *б*).

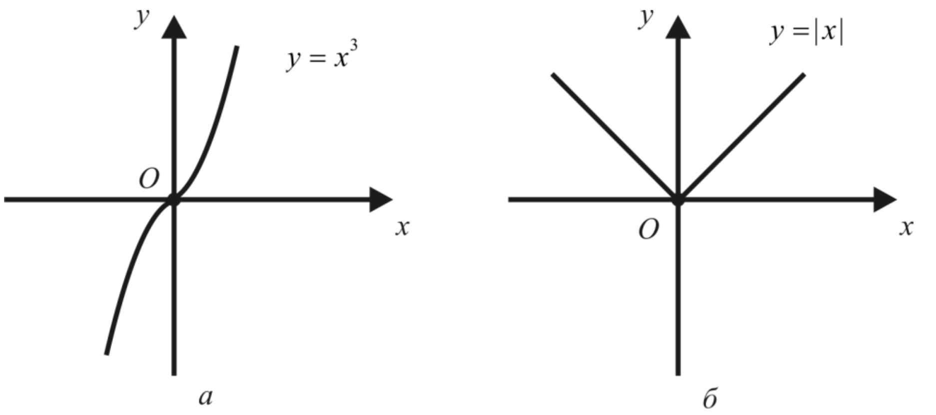


Рисунок 22 – Пример бесконечно большой функцией при $x \to 1$.

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют ***критическими точками*** *или* ***точками, подозрительными на экстремум****. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют* ***стационарными точками****.*

Напомним, что функция $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей (убывающей)*** *на интервале* (a,b), *если для любых значений* x_1 *и* x_2 *принадлежащих данному интервалу, из неравенства* $x_1 < x_2$ *следует неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***.

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Исследование на монотонность легко провести с помощью производной. Рассмотрим только одно достаточное условие возрастания (убывания) функции, в котором используется понятие производной.

Теорема (достаточное условие возрастания (убывания) функции). *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b) *и* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *для любого* $x \in (a, b)$, *то эта функция возрастает (убывает) на интервале* (a, b).

Данная теорема имеет простой *геометрический смысл*. Если на некотором интервале касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью *Ox* острый угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha > 0)$, то функция возрастает на этом интервале (рисунок 20, *а*). Если касательная к графику образует с осью *Ox* тупой угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha < 0)$, то функция убывает (рисунок 23, *б*).

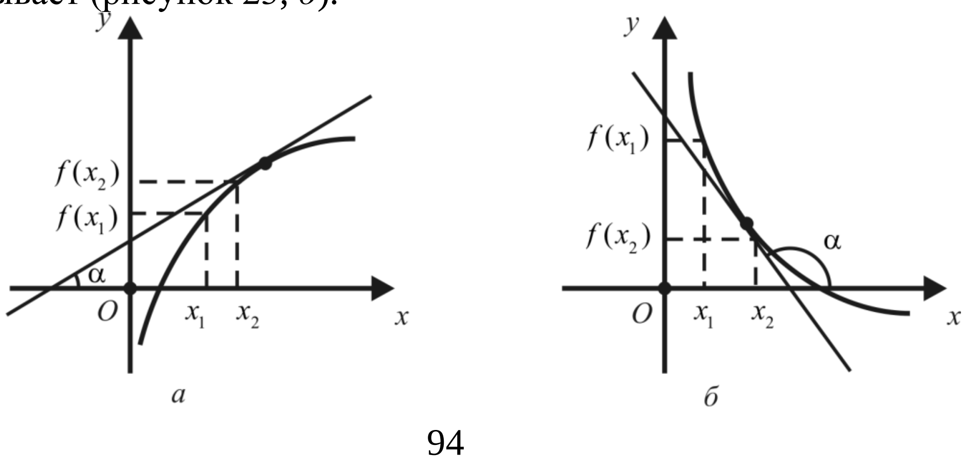


Рисунок 23 – Примеры возрастания и убывания функции.

Пример. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x + 1.$

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Значит, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1;1)$. Следовательно, функция возрастает на интервалах $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ и убывает на интервале $x \in (-1;1)$.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки x_0. Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то x_0 является точкой экстремума, причем x_0 – точка максимума, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$), и x_0 – точка минимума, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).*

Замечание: Теорема (**первое достаточное условие экстремума)** остается верной и в случае, если x_0 – точка непрерывности функции и производная в ней не существует, но меняет знак при переходе через данную точку.

Ниже мы рассмотрим задачи из социально-экономической сферы, которые приводят к понятию производной.

Пример. Количество продукции *Q(t),* произведенной рабочим в течение дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, где *t* – время в часах, причём $1 \le t \le 8$. Необходимо вычислить производительность труда через 1 ч после начала работы и за 1 час до окончания рабочего дня.

Решение. Производительность труда *Q(t)* выражается формулой $u(t) = Q'(t)$, тогда $u(t) = Q'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$. Производительность труда через 1 ч после начала работы определяется как *u(1):* $u(1) = -2{,}5 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5$, т.е. через 1 ч после начала работы производительность труда равна 112,5 у.е. продукции в час. Производительность труда за 1 час до окончания рабочего дня определяется как *u(7):* $u(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$ у.е. продукции в час.

Эластичность функции

Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Эластичностью функции называется предел отношения относительного приращения функции *y=f(x)* к относительному приращению переменной *x* если приращение аргумента стремится к нулю $\Delta x \to 0$. Эластичность функции обозначается: $E_x(y)$.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

Вывод: эластичность – это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Если, например, x увеличится на один процент, то y увеличится (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Эластичность спроса относительно цены. Пусть спрос q зависит от цены p по закону $q = q(p)$. Функция $E_p(q) = \frac{p}{q}\cdot q'$ показывает, как изменится спрос на данный товар, если цена изменится на 1%. Так как обычно $q' < 0$, т.е. с увеличением цены спрос уменьшается, то $E_p(q)$ берут со знаком «–», т.е.

$$E_p(q) = -\frac{p}{q}\cdot q'.$$

Если $|E_p(q)| > 1$, то говорят, что спрос эластичен, а если $|E_p(q)| < 1$, то неэластичен, если же $|E_p(q)| = 1$, то спрос нейтрален.

Эластичность предложения относительно цены. Пусть количество товара *s,* предлагаемого на продажу в единицу времени, зависит от цены p по закону $s = s(p)$. Функция $E_p(s) = \frac{p}{s}\cdot s'$ показывает, как изменится предложение, если цена на товар изменится на 1%.

Пример. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p) = -2p^2 + 3p + 8$, при $p=1$, $p=2$.

Решение. Эластичность спроса относительно цены найдём по формуле $E_p(q) = -\frac{p}{q}\cdot q'$. Найдём производную $q'(p) = (-2p^2 + 3p + 8)' = -2\cdot 2p + 3 = -4p + 3$. Получаем

$$E_p(q) = -\frac{p}{-2p^2 + 3p + 8}\cdot(-4p + 3) = -\frac{-4p^2 + 3p}{-2p^2 + 3p + 8}.$$

При $p=1$ получаем $E_1(q) = -\frac{-4+3}{-2+3+8} = \frac{1}{9}$, т.е. спрос неэластичен.

При $p=2$ получаем $E_2(q) = -\frac{-4\cdot 2^2 + 3\cdot 2}{-2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 8} = 1\frac{2}{3}$, т.е. спрос эластичен.

Пример. Правильное применение знаний об эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов. Пусть x – акцизы на табачные изделия, y – спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на табачные изделия на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y) = -0{,}2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0{,}2 \cdot 10 = 2\%$ и доходы государства по продаже табачных изделий повысятся на 8%.

1.3.2. Основы интегрального исчисления

Первообразная. Понятие неопределённого интеграла

Во многих вопросах науки приходится восстанавливать функцию по известной ее производной, т. е. зная функцию $F'(x) = f(x)$, нужно найти функцию $F(x)$. Для решения таких задач служит операция *интегрирования*, обратная операции дифференцирования, а раздел математического анализа, изучающий способы нахождения функции по ее производной, называют *интегральным исчислением*.

Функция $\boldsymbol{F(x)}$ *называется* ***первообразной функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ *на некотором интервале* $\boldsymbol{(a,b)}$*, если для любого* $\boldsymbol{x \in (a,b)}$ *выполняется равенство* $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$**.**

Пример. Пусть $f(x) = 3x^2$, тогда $F(x) = x^3$, т.к. $F'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = f(x)$.

Иногда не указывают конкретно, на каком интервале рассматривается вопрос о первообразной данной функции $f(x)$. В таких случаях предполагается, что речь идет о максимальном промежутке, на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

Теорема: *Пусть* $F(x)$ *– первообразная функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b). *Тогда* $\Phi(x) = F(x) + C$, *где* C *– константа, также является первообразной функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b). ***Обратно****, каждая функция, являющаяся первообразной функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b), *может быть представлена в виде*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ *– некоторая первообразная функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b); C *– константа.*

Из теоремы следует, что множество функций вида $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $\boldsymbol{f(x)}$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *от этой функции и обозначают символом* $\boldsymbol{\int f(x)dx}$**.**

Таким образом, по определению

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C},$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ *– подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется* ***интегрированием*** *этой функции.*

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, получаемых из одной из них (любой) путем параллельных ее переносов вдоль оси ординат (рисунок 24).

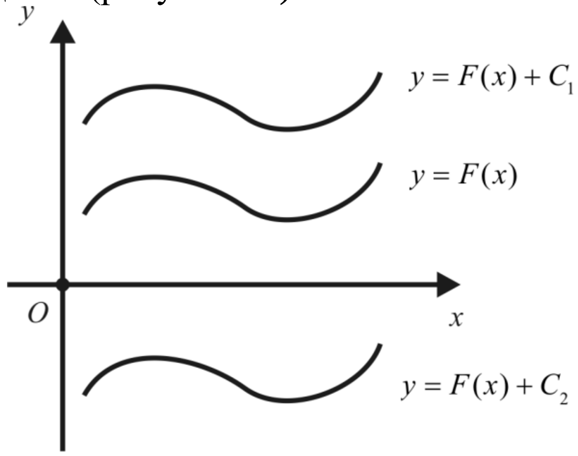


Рисунок 24 – Семейство кривых.

Возникает вопрос: для любой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема*. Если функция f(x) непрерывна на промежутке [a, b], то на этом промежутке у функции f(x) существует первообразная.*

Некоторые свойства неопределённого интеграла:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Равенство $\int\left(3x^2 + 4\right)dx = x^3 + 4x + C$ верно, так как $\left(x^3 + 4x + C\right)' = 3x^2 + 4$.

3. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$$

Примеры.

1. $\int x^5 dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + C = \dfrac{x^6}{6} + C$;

2. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + C$.

Основные методы интегрирования

1. ***Непосредственным интегрированием*** называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример. Найдите интеграл $\int \left(2x^4 + 3\sin x - 5e^x\right)dx$.

Решение.

$$\int \left(2x^4 + 3\sin x - 5e^x\right)dx = \int 2x^4 dx + \int 3\sin x\, dx - \int 5e^x dx =$$

$$= 2 \cdot \int x^4 dx + 3 \cdot \int \sin x\, dx - 5 \cdot \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + 3 \cdot (-\cos x) + C_2 - 5 \cdot e^x + C_3 =$$

$$= \frac{2}{5} x^5 - 3\cos x - 5e^x + C, \qquad C = C_1 + C_2 + C_3.$$

2. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется ***методом замены переменной или методом подстановки***. Он основан на следующей теореме.

Теорема: *Если F(x) – первообразная функции* $f(x)$, *а* $x = \varphi(t)$ *– функция, имеющая непрерывную производную, то функция* $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ *также имеет первообразную, причем*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Отметим, что в случае «удачной» замены переменной $x = \varphi(t)$ заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводящимся к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретается только практикой.

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+1)^{10} dx$.

Решение.

$$\int (2x+1)^{10}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x+1=t \\ d\left(2x+1\right)=dt \\ 2\,dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C = \frac{(2x+1)^{11}}{22}+C.$$

3. ***Метод интегрирования по частям*** основан на интегрировании соотношения:

$$\int u dv = uv - \int v du\,,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Эта форму далает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du,$ который может оказаться существенно более простым.

Перечислим группы интегралов, берущихся по частям:

a. К первой группе интегралов относятся интегралы, в которых подынтегральная функция в качестве множителя содержит одну из следующих функций:

ln*x,* arcsin*x,* arccos*x,* arctg*x,* arcctg*x.*

и т.п. при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции. В этом случае, полагают $u(x)$ равной одной из перечисленных функций.

Пример. Вычислите интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=x \end{array} \right| =$$

$$x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C\,.$$

b. К этой группе относятся интегралы вида:

$$\int P_n(x)\cos ax dx\,,\ \int P_n(x)\sin ax dx\,,\ \int P_n(x)e^{ax}dx\,,$$

где a – постоянное число; $P_n(x)$ – многочлен степени n. Здесь считают $u(x)=P_n(x)$, а за dv берём остальные сомножители.

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+3)\sin x dx$.

Решение.

$$\int(2x+3)\sin xdx = \begin{vmatrix} u=2x+3, & du=2dx \\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -(2x+3)\cos x - \int(-\cos x)2dx = -(2x+3)\cos x + 2\sin x + C.$$

c. К третьей группе относятся интегралы вида:

$$\int e^{ax}\cos bxdx, \quad \int e^{ax}\sin bxdx, \quad \int \sin(\ln x)dx, \quad \int \cos(\ln x)dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям к любому из этих интегралов дважды, получим для нахождения интеграла уравнение 1-ого порядка.

Определённый интеграл

К понятию определенного интеграла приводят задачи на нахождение предела интегральной суммы. Рассмотрим некоторые из них.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a, b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y = f(x)$, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ называют *криволинейной трапецией*.

Пусть $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$. Найдем площадь S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и восстановим в точках деления этого отрезка перпендикуляры до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рисунок 25). Тем самым мы разложим рассматриваемую криволинейную трапецию на n частей.

На каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и заменим k-ю криволинейную трапецию разбиения прямоугольником с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f(\xi_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Таким образом, мы заменим исходную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из n прямоугольников. Площадь k-го прямоугольника равна произведению основания на высоту, т. е. $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь всей ступенчатой фигуры:

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта величина может быть принята за приближенное значение площади рассматриваемой криволинейной трапеции: $S \approx S_n$.

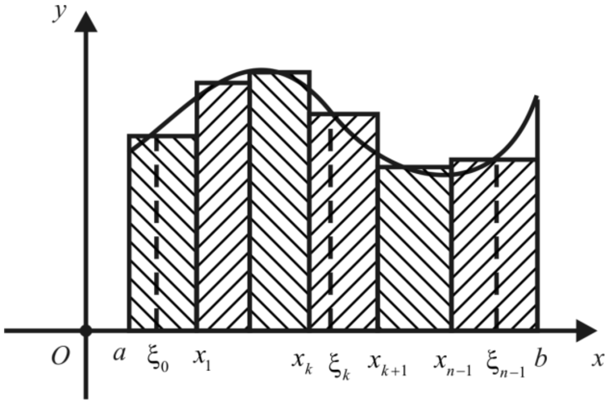


Рисунок 25 – Площадь криволинейной трапеции.

Приближение к искомой площади S криволинейной трапеции будет тем точнее, чем более мелкое разбиение отрезка $[a, b]$ на части мы будем брать. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, где $f(t)$ – заданная функция времени t. Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T. Промежуток $[t_0, T]$ разобьем на n промежутков $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots$, $[t_{n-1}, T]$ длиной $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t_k')$, где t_k' – некоторое значение из промежутка $[t_k, t_{k+1}]$. Длина пути, пройденного за этот промежуток времени, приближенно равна $f(t_k')\Delta t_k$. Складывая все длины $f(t_k')\Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T:

$$S_n = f(t_0')\Delta t_0 + f(t_1')\Delta t_1 + \ldots + f(t_{n-1}')\Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\Delta t_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta t_k \to 0$, находим точное значение длины пути

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\Delta t_k.$$

Сравнивая результаты этих двух задач, нетрудно заметить общий метод их решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на части; составление суммы S_n, которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; предельный переход. Этот метод применяется и для решения многих других задач (например, вычисления объемов, вычисления работы переменной силы). Поэтому пределы такого рода стали предметом особого исследования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограниченна на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина частичного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

которая называется *интегральной суммой Римана* (немецкий математик, 1826–1866) функции $y = f(x)$, соответствующей разбиению отрезка $[a, b]$ с фиксированными точками ξ_k.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Данная величина называется *диаметром разбиения*.

Если существует конечный предел интегральной суммы $\boldsymbol{S_n}$ *при* $\boldsymbol{\lambda \to 0}$, *не зависящий от способа разбиения отрезка* $\boldsymbol{[a, b]}$ *на частичные отрезки и выбора точек* $\boldsymbol{\xi_k}$, *то этот предел называется* ***определенным интегралом*** *от функции* $\boldsymbol{y = f(x)}$ *на отрезке* $\boldsymbol{[a, b]}$ *и обозначается*

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,}$$

а сама функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ *называется* ***интегрируемой по Риману*** *на отрезке* $\boldsymbol{[a, b]}$.

Таким образом, определенный интеграл есть число, к которому стремится интегральная сумма, когда $\lambda \to 0$.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ читается так: определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс. Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b – *верхним пределом интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*.

Обозначение определенного интеграла похоже на обозначение неопределенного. И это не случайно. Оказывается, что вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла.

Отличия: определенный интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ есть число, а неопределенный интеграл – множество первообразных $F(x) + C$.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно сказать, что

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции. В этом и состоит ***геометрический смысл определенного интеграла***.

Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, то путь s, пройденный телом за время движения от $t = t_0$ до $t = T$, можно определить по формуле

$$s = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt.$$

В этом состоит ***физический смысл определенного интеграла***.

Условия интегрируемости функций. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим теоремы, в которых отражены необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Рассмотрим их без доказательства.

***Теорема*: (необходимое условие интегрируемости функции).** *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на данном отрезке.*

Обратная теорема неверна: существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми.

Пример: Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

Решение: Действительно, если при разбиении отрезка $[0, 1]$ на частичные отрезки выбрать на каждом из них рациональную точку ξ_k, получим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1.$$

Если же выбрать иррациональную точку ξ_k, то $S_n = 0$. Следовательно, предел интегральных сумм для функции Дирихле не существует и она не интегрируема на отрезке $[0, 1]$, хотя является на нем ограниченной.

Далее сформулируем три теоремы, которые выражают достаточные условия интегрируемости функций на отрезке.

Теорема: *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема: *Если функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a,b]$ *и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема: *Если функция* $f(x)$ *монотонна на отрезке* $[a,b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

Заметим, что дифференцирование элементарных функций приводит к элементарным функциям, в то время как для интегрирования это не всегда имеет место. Существуют функции, первообразные которых не выражаются через элементарные функции (например, e^{-x^2}, $\sin x^2$, $\cos x^2$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ и др.). Интегралы от таких функций называются «неберущимися».

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то их сумма $f(x)+g(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

При $a < c < b$ данное равенство имеет простой *геометрический смысл*: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a, c]$ и $[c, b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

10. ***Теорема о среднем.*** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и для всех* $x \in [a, b]$ *выполняются неравенства* $m \leq f(x) \leq M$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a),$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Величину μ называют *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание: *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то теорема о среднем принимает вид*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \quad \text{где } c \in [a, b].$$

Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a, b]$. Если $x \in [a, b]$, то данная функция интегрируема также на отрезке $[a, x]$, т. е.

существует $\int\limits_a^x f(t)\,dt.$ Предположим, что x меняется на отрезке $[a,b]$. Тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

которая задается ***определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования***.

Очевидно, что $\Phi(a)=0,\ \Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)\,dt.$

Теорема**:** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то функция* $\Phi(x)$ *непрерывна на этом отрезке.*

Теорема**:** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда функция* $\Phi(x)$ *дифференцируема в любой точке* $x\in[a,b]$ *и* $\Phi'(x)=f(x)$.

Таким образом установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную (а следовательно, и бесконечное множество первообразных), одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt.$ А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную, то тем самым установлена *связь между неопределенным и определенным интегралами*:

$$\int f(x)\,dx=\int\limits_a^x f(t)\,dt+C.$$

Теорема**: (Формула Ньютона – Лейбница).** *Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ *– одна из первообразных функции* $f(x)$.

Формула $\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$ называется **формулой Ньютона – Лейбница**; ее можно переписать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ – **двойная подстановка от *a* до *b***.

Вычисление определенных интегралов непосредственно по определению очень громоздко и затруднительно даже для простых функций. Гораздо более удобно вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример. Найдите $\int\limits_2^3 x^2 dx$.

Решение.

$$\int\limits_2^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Для случаев нахождения определённых интегралов с помощью теоремы Ньютона-Лейбница могут быть использованы все перечисленные выше приемы для нахождения неопределённых интегралов. Следует учесть, что при вычислении определённого интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется; не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример. Найдите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x, \\ dt = (2x)' dx = 2dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2} dt \\ \alpha = 2 \cdot 0 = 0; \\ \beta = 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \pi. \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi} (\sin t) \frac{1}{2} dt = \left.\left(-\frac{1}{2} \cos t \right)\right|_0^{\pi} = \left.\left(\frac{1}{2} \cos t \right)\right|_{\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos \pi = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 1.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2}$.

Решение.

$$\int_{-1}^{2}\frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{l}2x^2+1=t\\ d\left(2x^2+1\right)=dt\\ 4x\,dx=dt\\ 2x\,dx=\dfrac{1}{2}dt\\ \alpha=2\cdot(-1)^2+1=3\\ \beta=2\cdot 2^2+1=9\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_3^9\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_3^9 t^{-2}dt=-\frac{1}{2}t^{-1}\Big|_3^9=\frac{1}{2t}\Big|_9^3=$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}.$$

Теорема*: (*формула интегрирования по частям для определенного интеграла) *Если функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке* $[a,b]$, *то справедлива формула:*

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

Пример. Вычислите интеграл $\int_1^e x\ln x dx$.

Решение.

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x & dv=x\,dx\\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2}{x}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx==\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln 1\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+e^2}{4}.$$

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x$ и $y=x^2$.

Решение. Изобразим графики обеих функций на плоскости

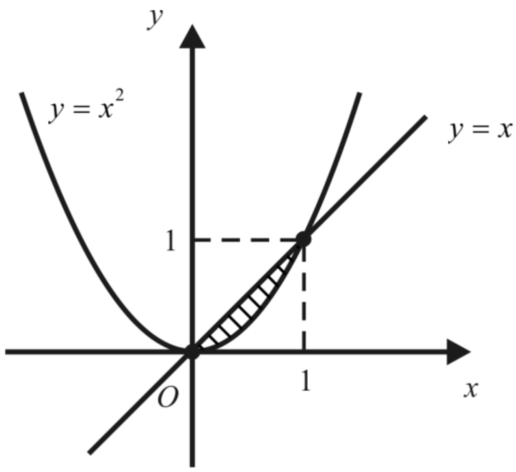


Рисунок 26 – Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2$.

Убеждаемся, что речь идет о криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y = x$, снизу – графиком функции $y = x^2$. Точки пересечения графиков $(0, 0)$ и $(1, 1)$ легко находятся из уравнения $x = x^2$. Таким образом, $f_2(x) = x$, $f_1(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$ и

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере

Применение определенного интеграла в социально-экономической сфере основано на том, что любой меняющийся социально-экономический процесс может быть интерпретирован как скачкообразный, скачки которого близки к нулю.

Количество произведенной продукции.

Объем произведенной продукции Q зависит от производительности труда и длительности промежутка рабочего времени, в течение которого производительность может меняться. Пусть $f(t)$ – функция изменения производительности труда от времени. Количество продукции Q, произведенной в промежутке времени от a до b при производительности труда $f(x)$, вычисляется по формуле:

$$Q = \int_a^b f(t)dt.$$

Если затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала неизменными, то функция Кобба-Дугласа примет вид: $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем произведенной продукции Q за T лет составит:

$$Q=\int_0^T(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt.$$

Пример. Найдите дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $f(t)=-0{,}1t^2+0{,}8t+10$.

Решение. Воспользуемся формулой $Q=\int_a^b f(t)dt$. В нашем случае имеем

$$Q=\int_0^8 f(t)dt=\int_0^8(-0{,}1t^2+0{,}8t+10)dt=-0{,}1\int_0^8 t^2+0{,}8\int_0^8 t+10\int_0^8 dt=-0{,}1\frac{t^3}{3}\bigg|_0^8+0{,}8\frac{x^2}{2}\bigg|_0^8+10t\big|_0^8=88{,}53.$$

Количество денег, поступивших в банк за определенный промежуток времени.

Пусть функция $f(t)$ описывает количество денег поступающих в банк в каждый момент времени *t*. Определим общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени [0, T]. Если $f(t)$=*const*, то количество денег *U*, поступившее в банк за промежуток времени [0, T], находится по формуле $U=f(c)\cdot T$, где c – произвольное значение из отрезка [0, T].

Если $f(t)$ – количество денег, поступивших в банк в момент времени *t*, то общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени [0, T] находится по формуле

$$U=\int_0^T f(t)dt.$$

Дисконтирование.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через некоторое количество времени *t* при определенной процентной ставке *p*, называется ***дисконтированием***. Такие задачи решаются при определении экономической эффективности капиталовложений.

Пусть доход изменяется со временем и описывается функцией $f(t)$, удельная норма процента равна $i=\frac{p}{100}$ и процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход *K* за время *T* вычисляется по формуле:

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}dt.$$

Вычисление средних величин.

В социально-экономической сфере часто требуется найти среднюю производительность труда за определённый промежуток времени, среднее значение затрат на производство труда за определённый промежуток времени и т.д. Такого рода задачи решаются с помощью ***теоремы о***

***среднем**: Для непрерывной на отрезке* $[a,\ b]$ *функции* $f(x)$ *существует такая точка* $c\in[a,\ b]$, *что* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Тогда среднее значение $f(c)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ равно $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Пример. Найдите среднее значение затрат в денежных единицах на производство и реализацию продукции, имеющих вид $S(x)=3x^2+4x+2$, где x – объём продукции в у.е., если объём продукции меняется от 2 до 4 у.е.

Решение. В этом примере a=2, b =4, $f(x)$ = $S(x)$. Тогда среднее значение функции равно

$$S_{cp}=\frac{1}{4-2}\int_2^4(3x^2+4x+2)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=\frac{1}{2}(104-20)=42.$$

Таким образом, средние издержки составляют 42 ден. ед.

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

1.4.1. Основы комбинаторики

Задачи, при решении которых приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций, относятся к разделу математики, который называется ***комбинаторикой***. Этот раздел математики находит широкое применение в философии. Классической теории вероятностей предшествуют разделы комбинаторики.

Комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению понятия вероятности. Лучший способ освоения комбинаторики – решение задач. О простых и типовых, но в тоже время важных, задачах пойдет речь ниже. Начнем с **основных принципов комбинаторики –** ***принципа сложения и принципа умножения***, которые рассмотрим сначала на примерах.

Пример. Пусть в книжном магазине имеются 8 различных видов книг по «Философии» и 5 различных книг по «Высшей математике». Сколькими способами можно выбрать в подарок книгу по «Философии» или книгу по «Высшей математике»? Сколькими способами можно выбрать две книги, по «Высшей математике» и « Философии»?

Ответ на первый вопрос очевиден. Книгу по «Философии» можно выбрать 8 способами, по «Высшей математике» – 5 способами. Следовательно, книгу по «Философии» или по «Высшей математике» можно выбрать 8+5=13 способами. Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы выбираем две книги по «Высшей математике» и «Философии», то к каждой из 8 различных книг по «Философии» можно подобрать книгу по «Высшей математике» 5 способами, а именно, к первой книге по «Философии» подбираем 5 различных книг по «Высшей математике», ко второй книге по «Философии» — опять 5 различных книг по «Высшей математике» и т.д. Таким образом, набор, состоящий из книги по «Высшей математике» и «Философии» можно выбрать 5+5+5+5+5+5+5+5=8·5=40 способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Отметим, что понятия теории множеств, как *подмножество, объединение множеств, пересечение множеств*, рассмотренные в первой главе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь основные принципы комбинаторики в общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. *Если множество A содержит n разных элементов, а множество B – m разных элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n+m$ элементов.*

Замечание. Если некоторый объект «A» можно выбрать n способами, а другой объект «B», отличный от «A», – m способами, то, согласно комбинаторному принципу сложения, объект «<u>A или B</u>» можно выбрать <u>$n+m$</u> способами.

Пример. Рассмотрим сколькими способами студенту факультета философии и социальных БГУ можно выбрать одну книгу, когда на полке находятся 14 книг по философии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по «математике для гуманитариев».

Заметим, что книгу по философии можно выбрать 14 способами, книгу по информационным технологиям – 10 способами, а книгу по математике для гуманитариев – 6 способами. Согласно *комбинаторному принципу сложения* и в силу предыдущего замечания, студент может выбрать одну книгу на полке 14+10+6=30 способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий *комбинаторный принцип умножения*.

Пример. Из города Минска в Москву ведет n путей, а из города Москвы в город Орел ведет m путей. Скольким числом различных путей можно совершить путешествие из Минска в Орел через город Москву?

Выбрать один из n возможных путей из Минска в Москву, дальше можно продолжить путешествие m способами, поэтому общее число различных путей из города Минска в город Орел равно $n \cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. *Если множество A содержит n различных элементов, т.е. $A = \{a_i : i=1,2,\ldots,n\}$, а множество B – m разных элементов, т.е. $B = \{b_j : j=1,2,\ldots,m\}$, то тогда множество C, составленное из всех возможных пар, т.е. $C = \{(a_i, b_j): i=1,2, \ldots, n; j=1,2, \ldots, m\}$, содержит $n \cdot m$ элементов.*

Замечание. Если некоторый объект «*A*» можно выбрать *n* способами, а после каждого такого выбора другой объект «*B*» можно, независимо от выбора «*A*», выбрать *m* способами, то, согласно комбинаторному принципу умножения, объект «<u>*A и B*</u>» можно выбрать <u>$n \cdot m$</u> способами.

Пример. Рассмотрим сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова ПРОЦЕНТ.

Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную — пятью способами (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно *комбинаторному принципу умножения* и в силу сделанного замечания, гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 5=10$ способами.

Рассмотрим пример еще одной задачи, при решении которой используются оба принципа комбинаторики.

Пример. Сколькими способами студенту факультета философии и социальных наук можно выбрать две книги по разным наукам, когда на полке находятся 14 книг по философии, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по «математике для гуманитариев»?

Если выбирать книгу по философии и книгу по информационным технологиям, то существует 14 вариантов выбора книги по философии и 10 вариантов выбора книги по информационным технологиям, поэтому, по *комбинаторному принципу умножения*, для этого выбора существует $14 \cdot 10=140$ возможностей.

Если выбирать книгу по философии и книгу по «математике для гуманитариев», то имеется 14 вариантов выбора книги по философии и 6 – книги по «математике для гуманитариев», поэтому, по *комбинаторному принципу умножения*, для указанного выбора имеется $14 \cdot 6=84$ возможностей.

Если выбирается книга по информационным технологиям и книга по «математике для гуманитариев», то существуют 10 способов выбора книги по информационным технологиям и 6 – книги по «математике для гуманитариев», поэтому, по *комбинаторному принципу умножения*, для такого выбора существует $10 \cdot 6=60$ возможностей.

Наконец, поскольку указанных три выбора разных пар книг отличаются друг о друга, то, согласно *комбинаторному принципу сложения*, всего существует $140+84+60=284$ способов выбора двух книг.

Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов

Решение комбинаторных задач часто приводит к понятиям *перестановки, размещения* и *сочетания.* Поэтому на начальном этапе знакомства с основами комбинаторики необходимо научиться определять вид соединения элементов конечного множества, а также подсчитать количество таких соединений.

Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать математический аппарат теории множеств. Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Но есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой – вторым, какой – третьим и т.д.

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют ***упорядоченным множеством***.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы в круглых скобках:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, b, a).$$

Например, из двух букв А и Б можно построить упорядоченное множество двумя различными способами:

(А, Б), (Б, А).

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о *последовательности*, то имеем в виду упорядоченное множество элементов, так что перестановки элементов не допускаются. Например, АБ и БА – это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: поставить его спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим: ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА получим: ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

(А,Б,В), (А,В,Б), (Б,А,В), (Б,В,А), (В, А, Б), (В,Б,А).

Определение перестановки. *Установленный в конечном множестве порядок называют перестановкой его элементов*.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Замечание. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, т.е. могут быть получены из того же самого множества, называются перестановками этого множества.

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математики используется n-факториал, обозначают $n!$ (читают «эн-факториал»), т.е.

$$\boldsymbol{n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot n}.$$

Число всевозможных перестановок в множестве из n элементов *обозначают* P_n (P – первая буква французского слова *permutation* –

перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов» или «Пэ из эн».

Утверждение. *Число перестановок* P_n *можно вычислить по формуле*:

$$\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!}$$

Пусть $n = 2$, тогда число перестановок из двух элементов равно 2 – на первое место поставили любой из двух, а на второе – оставшийся элемент. $P_2 = 2$. Если $n = 3$, тогда число перестановок из трех элементов вычисляется следующим образом: на первое место ставим любой один из трех элементов, вариантов в этом случае 3, на второе – любой один из двух оставшихся, вариантов 2 и на третье место – последний элемент, вариант один. Таким образом, в силу комбинаторного принципа умножения число всех таких перестановок равно $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$.

Пример. Сколько существует вариантов проведения собрания учебной группы, если количество выступающих на собрании – 4?

Так как на собрании должны выступать всего четыре оратора, то число способов расположения их в списке выступающих и, соответственно, число способов проведения собрания равно числу перестановок из 4 элементов – P_4, т.е. $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

При помощи формулы для P_n получаем:

$$1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120,\ 6!=720,$$
$$7!=5040,\ 8!=740320,\ 9!=362880,\ 10!=3628800.$$

Принято считать, что **0!=1**.

Замечание. *Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно* $P_{n-1} = (n-1)!$

Перестановки букв некоторого слова называют **анаграммами**. Например, среди анаграмм слова КРОТ, которых всего $P_4 = 4! = 24$, только одна, не считая самого слова КРОТ, имеет смысл в русском языке: КОРТ. Анаграмм слова ПРОЕКТ будет $P_6 = 6! = 720$.

При решении задач иногда необходимо из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \le n$) и расположить их в некотором порядке. *Сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m*?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две буквы и эти две буквы расположить в определенном порядке. Таких способов 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения, всего получается $4\cdot 3 = 12$ способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г), (Б, А), (Б, В), (Б, Г),
(В, А), (В, Б), (В, Г), (Г, А), (Г, Б), (Г, В).

В общем случае имеем n различных элементов, выберем из них m элементов. При этом выборки могут отличаться или составом элементов, или их порядком. Посчитаем число таких упорядоченных выборок. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из оставшихся $(n–1)$ элементов и т.д., на m-ое место – любой из оставшихся $(n – (m–1))$ элементов. Следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается $n\cdot(n–1)\cdot\ldots\cdot(n–(m–1))$ упорядоченных выборок из n элементов по m элементов.

Определение размещения. Конечные упорядоченные подмножества заданного множества называются **размещениями**.

Число всевозможных размещений из n элементов по m *обозначают* A_n^m (A – первая буква французского слова *arrangement* – размещение). Читается: «число размещений из эн элементов по эм» или «A из эн по эм».

Утверждение. Число размещений A_n^m, где m ≤ n, можно вычислить по формуле:

$$\boxed{A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Из формулы числа размещений следует:

$$A_n^1 = n,\ A_n^2 = n\cdot(n–1),\ A_n^3 = n\cdot(n–1)\cdot(n–2),$$

$$A_3^2 = 3\cdot2 = 6,\ A_4^3 = 4\cdot3\cdot2 = 24,\ A_5^4 = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120.$$

Принято считать, что $A_n^0 = 1$. Это верно, поскольку существует только одно пустое множество $\varnothing$ и можно считать, что оно может быть упорядочено одним–единственным образом. Кроме того, это логично: есть единственный способ не выбирать ни одного объекта из n имеющихся – «ничего не делать».

Замечание. *Перестановки – это частный случай размещения при* $m=n$, *т.е.* $A_n^n = P_n = n!$ *Кроме того, для* $m = n–1$ *в формуле для числа размещений имеем* $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$

Последнее равенство справедливо, так как если из n различных объектов выбраны $n–1$ и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т.е. $A_n^{n-1} = A_n^n$.

Пример. Сколько существует в n–буквенном алфавите m–буквенных слов, состоящих из различных букв?

По формуле для количества размещений искомое число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить двухбуквенных слов $A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!} = 33\cdot32 = 1056$, не содержащих повторений букв.

Пример. Студенту-социологу необходимо срочно до отчисления пересдать 3 зачета на протяжении 4 дней. Посчитать, сколько вариантов теоретически существует для дней сдачи этих зачетов.

Искомое число способов равно числу 3–элементных упорядоченных подмножеств, т.е. дни сдачи зачетов, 4–элементного множества. По формуле числа размещений это число равно A_4^3 = 24.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: *сколькими способами можно выбрать из n различных предметов m штук* ($m \le n$)?

Например, пусть из четырех корзин обозначенных буквами А, Б, В и Г нужно выбрать две. Сколькими способами это можно сделать? Свяжем этот пример с примером, рассмотренным выше, а именно выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Однако можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке 12 соответствующих размещений дважды, например, АБ и БА. Сейчас для нас не существенно, какой шар, первым или второй оказался в корзине, или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае, т.е. перемен мест, двух выбранных корзин, т.е. перестановок, всего две, то две корзины из четырех можно выбрать 12:2=6 способами.

Определение сочетания. Конечные неупорядоченные подмножества заданного множества называют **сочетаниями**.

Отметим, что перестановки и размещения – это упорядоченные множества, а сочетание – это неупорядоченные множества. ***Сочетания –*** это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m *обозначают* C_n^m (C – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание). Читается: «число сочетаний из эн элементов по эм» или «C из эн по эм».

Утверждение. Число сочетаний C_n^m, где m ≤ n, можно вычислить по формуле:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу, т.е. все числа, стоящие в знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует, что

$$C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3,\ C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4,\ C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в этой формуле для C_n^m положить m=0, то получим, что C_n^0 = $\frac{n!}{0!(n-0)!}$ = 1, поэтому *принято считать*, что C_n^0 = 1. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что есть только один способ не выбирать ни один элемент (или выбрать 0 элементов) из n- элементного множества. В частности, отметим, что C_n^0 = 1.

Замечание. *Обратим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить m на m–n, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами*:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m.$$

Например, пусть в группе из n студентов-социологов надо выбрать m студентов для участия в студенческой факультетской конференции. Выбор m участников конференции равносилен выбору n–m студентов группы, не участвующих в конференции. Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать n–m человек из n. Это означает, что C_n^m = C_n^{n-m} или непосредственно $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!}$.

В частности, C_5^0 = C_5^5 = 1, C_4^1 = C_4^3 = 4.

Пример. Посчитаем, сколькими способами можно выбрать трех человек на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Поскольку должности одинаковые, то порядок в каждой выборке из трех человек не имеет значения. По формуле для числа сочетаний искомое количество способов выбора на три одинаковые должности из десяти кандидатов $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot(7)!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$.

Большинство задач этого раздела содержит слова «сколько». Одна из причин, по которой мы затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них можно было бы ответить. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

<u>*При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы:*</u>

1. Из какого конкретного множества осуществляется выбор, т.е. надо найти n – число элементов этого множества.

2. Что требуется сделать: расставить все в ряд (перестановки), или выбрать часть упорядоченного подмножества?

3. Важен ли при выборе порядок? Если порядок важен, то применяем формулу для размещений, если порядок не важен – формулу для сочетаний.

Комбинаторика: Выбор с повторениями

Одна из важных особенностей комбинаторики заключается в том, что в ней большую роль играет точная формулировка задачи. Большинство ошибок связано с некорректными постановками задач из-за неопределенности формулировок. Когда речь идет о подсчете числа студентов в группе никакой неопределенности не возникает. Менее определенная ситуация возникает, когда посчитать нужно число вариантов или способов. Рассмотрим следующие **задачи**:

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово АНКЕТА?

Решение. Слово АНКЕТА состоит из шести букв, которые можно переставить P_6=6! способами. Однако заметим, что в данном слове буква А встречается два раза, и, меняя местами две буквы А, мы не получим новых слов. Так как две буквы А можно переставить P_2=2! Способами, то все 6! перестановок букв, входящих в слово АНКЕТА, разбиваются на группы по 2! одинаковых перестановок в каждой группе. Количество таких групп равно $\frac{6!}{2!}$, значит, искомое число «слов» слова АНКЕТА равно: $\frac{P_6}{P_2} = \frac{6!}{2!} = \frac{(2!)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360$.

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово КАРАОКЕ.

Напомним, что комбинаторика позволяет считать *словом* любую комбинацию букв. Математики любят сводить новые задачи к уже решенным задачам. Для того чтобы воспользоваться способом подсчета числа перестановок, применим новый для нас ***прием растождествления***. Он показывает, как можно переходить от одного понятия «различия» к другому. При точном понимании терминов, т.е. при соблюдении *Главного правила комбинаторики*, можно открыть дополнительные возможности решения комбинаторных задач. Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно достаточно точно передает суть дела. Суть его в том, чтобы рассматривать одинаковые буквы слова как различные, например, с помощью их индексации.

После индексации букв слова КАРАОКЕ, в котором 2 буквы К, 2 буквы А и 1 буква О, 1 буква Е, 1 буква Р, получим 7=2+2+1+1+1 различных букв $К_1$, $А_1$, $Р_1$, $А_2$, $О_1$, $К_2$, $Е_1$. Из них можно составить P_7 = 7! различных 7–буквенных слов, т.е. перестановок из 7 различных букв. Они образуют вспомогательный перечень.

Не трогая остальных букв и меняя местами лишь две буквы К всеми возможными способами, а их будет по числу перестановок из двух букв $К_1$, $К_2$, всего 2!, получим вроде бы новые перестановки, но без индексации букв они будут неразличимы. Поэтому общее число перестановок уменьшиться в 2! раз. Аналогичные рассуждения верны и для двух букв А, и лишь буквы О, Е и Р по одной. В итоге количество анаграмм слова КАРАОКЕ, без учета повторов слов пересчитанных с помощью комбинаторного принципа умножения, окажется равным числу 7!/(2!·2!) = 1260. Чтобы не нарушать единообразия поделим указанное выражение на 1!=1, соответствующее числу перестановок одной буквы О, Е и Р в указанных анаграммах, поскольку полученное число анаграмм принято записывать в виде

$$7!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = 1260.$$

Для того чтобы частный случай подсчета анаграмм не стал, как сказал бы Козьма Прутков «*пустою забавою*», рассмотрим эту задачу в более общей постановке.

Определение перестановок с повторениями. *Перестановка элементов конечного набора, состоящего из n элементов таких, что элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 повторяется n_2 раз, …,элемент a_k повторяется n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, называется **перестановкой с повторениями**.*

Число всевозможных перестановок с повторениями, а именно, выборов n объектов n_1, n_2, …, n_k повторяющимися элементами, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, *обозначают* $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$. С помощью горизонтальной черты над буквой P отличают случай с повторениями от обычных перестановок. Читается: «Число перестановок с повторениями из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка» или «Пэ с чертой из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка».

Утверждение. *Число перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$$

С помощью формулы числа перестановок с повторениями число анаграмм слова КАРАОКЕ, подсчитанное выше, можно записать в виде

$$\overline{P}_{2,2,1,1,1} = 7!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = 1260.$$

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово МАТЕМАТИКА?

Решение. В слове МАТЕМАТИКА есть повторяющиеся буквы: две буквы М, три буквы А, две буквы Т, по одной букве Е, И, К. Следовательно, по формуле для числа перестановок с повторениями получим:

$$\overline{P}_{2,3.2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4} = 151200\,.$$

Таким образом, из букв, входящих в слово МАТЕМАТИКА, можно составить 151200 «слов».

Далее дадим обобщение понятия размещения, а именно рассмотрим задачи, решения которых приводят к понятию *размещения с повторениями*.

Пример. Сколько двухбуквенных «слов» можно составить из 33 букв алфавита русского языка?

Решение. Двухбуквенное «слово» может быть составлено либо из двух различных букв, либо из двух одинаковых букв. На первое место мы можем поставить любую из 33 букв алфавита русского языка. Независимо от этого, на второе место опять можно поставить любую из 33 букв. Значит, по комбинаторному принципу умножения количество двухбуквенных слов будет равно $33 \cdot 33 = 33^2$.

Определение размещений с повторениями. *Упорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется* ***размещениями с повторениями***.

Число всевозможных размещений с повторениями, а именно, выборов m объектов из повторяющихся n элементов, обозначают $\overline{A_n^m}$. С помощью горизонтальной черты над буквой A отличают случай с повторениями от обычных размещений. Читается: «Число размещений с повторениями из эн по эм» или «A с чертой из эн по эм». Первое название излишне длинное и «торжественное», но в ясности ему не откажешь.

Утверждение. *Число размещений с повторениями* $\overline{A_n^m}$ *можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{\overline{A_n^m} = n^m}$$

Пример. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3?

Решение. По условию задачи даны три цифры, из которых составляются пятизначные натуральные числа, значит, $n=3$. Заметим также, что цифры в записи числа будут повторяться. Пятизначное число представляет собой упорядоченный набор из пяти элементов-цифр, поэтому $m=5$. Тогда по формуле для числа размещений с повторениями количество пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2 ,3 равно $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$.

Замечание. *Обратим внимание на то, что в формуле числа размещений с повторениями* $\overline{A_n^k} = n^k$ *допустим случай, когда* $k > n$.

Например, число размещений с повторениями четырехбуквенных слов, составленных из алфавита, содержащего всего две буквы А и М, равно $\overline{A_2^4} = 2^4 = 16$. Среди этих размещений с повторениями есть, например, слова: АААА, АААМ, АММА, МАМА, МААМ, МААА, ММММ.

Пример. Шестизначный велосипедный номер считается «счастливым» если в нем нет ни одной цифры 8, поскольку «восьмерка» — один из дефектов велосипедного колеса. Посчитаем, каких номеров больше «счастливых» или «несчастливых».

Решение. На первый взгляд кажется, что поскольку 8 — это лишь одна цифра из десяти возможных, то счастливых номеров должно быть в несколько раз больше. Счастливый номер — это шестибуквенное слово в «алфавите», содержащем девять цифр, т.е. все цифры, кроме восьмерки: 0,1,2,3,4,5,6,7,9. Число таких слов, по формуле числа размещений с повторениями, равно $\overline{A_9^6}=9^6$=531441. Если отбросить слово «000000», непригодное в качестве велосипедного номера, то счастливых номеров будет 531440. Всего шестизначных номеров, за вычетом непригодного, равно $\overline{A_{10}^6}$–1=1000000–1=999999. Поэтому несчастливых номеров 999999–531440=468559, т.е. ненамного меньше, чем счастливых.

Любопытно то, что если бы номера были бы семизначными, то тогда счастливых номеров было бы меньше, чем несчастливых.

Напомним, что *перестановки* – частный случай *размещений* и *формула для числа перестановок* – частный случай *формулы для числа размещений*. А как обстоит дело для перестановок и размещений с повторениями? Являются ли *перестановки с повторениями* частным случаем *размещений с повторениями*?

Замечание. Формула для числа перестановок с повторениями не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями.

Разберем в чем тут дело. Когда речь идет о повторениях в упорядоченном или неупорядоченном наборе объектов, то возможны две противоположные ситуации:

а) каждый объект должен повторяться в наборе строго заданное число раз;

б) нет никаких ограничений на число повторений объектов, кроме общего их числа в наборе.

В этом отличие перестановок с повторениями и размещений с повторениями. *Объединяет их другое – это упорядоченные наборы*. Отметим, что для *неупорядоченных наборов* ситуация с фиксированным набором каждого объекта бессодержательна, поскольку в таком случае это один вариант.

Размещение с повторениями термин достаточно явный и удобный. В случае «сочетаний с повторениями» с ясностью не все благополучно. Хотя если перестановки и размещения могут быть с повторениями, имеет смысл говорить и о *сочетаниях с повторениями*.

Определение сочетаний с повторениями. *Неупорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется* ***сочетанием с повторениями****.*

Число всевозможных сочетаний с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов *обозначают* $\overline{C_n^m}$. Читается: «число сочетаний из эн по эм» или «C с чертой из эн по эм». Для нахождения числа $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями из n элементов по m приходится проявить определенную избирательность.

Утверждение. *Число сочетаний с повторениями* $\overline{C_n^m}$ *можно вычислить по формуле:*

$$\boxed{\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}$$

Рассмотрим модельную задачу о голосовании.

Пример. При принятии решения члены комитета из 7 человек голосуют: «за», «против», «воздержался». Посчитаем, сколько может быть возможных исходов голосования по данному решению.

Если нас интересует, кто и как голосовал, т.е. поименное открытое голосование, то тогда речь идет о *размещениях с повторениями*, что даст $\overline{A_3^7}$ = 3^7 = 2187 возможных исходов голосования.

Если нас не интересует, кто и как голосовал, а только общий результат голосования, или, например, голосование тайное, то тогда речь идет о *сочетаниях с повторениями*. В этом случае подсчитывается число всевозможных сочетаний m=7 голосований членов комитета из повторяющихся n=3 видов голосования: «за», «против», «воздержался», что даст $\overline{C_n^m}$ = $\overline{C_3^7}$ = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = 9!/(7!2!) = (9·8)/2 = 36 возможных исходов голосования.

Замечание. Сочетания с повторениями и размещения с повторениями объединяет то, что нет никаких ограничений на число повторений элементов, кроме общего их числа в наборе, поэтому в формуле числа сочетаний с повторениями $\overline{C_n^m}$ = $\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ допустим случай, когда $m>n$.

Отличаются сочетания (с повторениями или без) от размещений (с повторениями или без) тем, что первые – неупорядоченные наборы, а вторые – упорядоченные.

Использование комбинаторных методов для обработки и анализа социологических данных

Рассмотрим вопрос о том, с кем респондент проводит или предпочитает проводить свое свободное время. Предлагаются следующие варианты ответов

1. С друзьями;
2. С коллегами по работе, учебе;
3. С членами своей семьи;
4. С другими родственниками
5. В одиночестве;
6. С любимым человеком;
7. С домашним питомцем.

Респонденту обычно предлагается один из следующих способов ответа:

1) проранжировать, т.е. упорядочить (например, по важности) позиции;

2) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции);

3) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) и проранжировать их;

4) отметить не больше заданного числа позиций.

Нас интересует, сколькими вариантами можно ответить на такой вопрос при каждом способе ответа? Этот вопрос важен, в частности, при статистической обработке данных анкеты.

Переведем эти вопросы на математический язык. Пусть имеется множество X состоящее из $\boldsymbol{n}$ элементов (в нашем случае из 7) требуется:

1) проранжировать, т.е. упорядочить (например, по важности) позиции, означает найти число перестановок из 7 элементов, $P_7 = 7! = 5040$;

2) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) означает выбрать из семиэлементного множества подмножество, состоящее из 3 элементов, а это значит найти число сочетаний

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

3) отметить заданное число позиций (например, 3 позиции) и проранжировать их означает выбрать подмножество из 3 элементов и упорядочить его, а это значит найти

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7 = 210.$$

4) выбрать из множества X подмножество, состоящее не более чем из m элементов, означает вычислить $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{m-1} + C_n^m$, при этом слагаемое C_n^0 учитывает случай, когда выбирается пустое множество или, применительно к ответам на вопрос анкеты, когда респондент не отмечает ни одной позиции, в нашем случае $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 1 + 7 + 21 + 35 = 64$.

1.4.2. Вероятность случайного события

Основой всех точных исследований является наблюдение за поведением и признаками изучаемых объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента.

Под ***опытом*** будем подразумевать однократное или многократное повторение некоторого действия. Осуществление такого опыта или эксперимента называется ***испытанием***. Различные результаты опыта назовем ***исходами***. Каждое испытание должно удовлетворять следующим условиям:

а) *исход (результат) испытания точно неизвестен, т. е. испытание даст более одного исхода;*

б) *конечное множество всех исходов может быть определено до начала испытания;*

в) *испытание можно повторить неограниченное число раз при тех же условиях.*

Игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементов теории вероятностей.

Пусть опыт состоит в многократном бросании игральной кости. Каждое отдельное бросание представляет собой испытание, а его результат (выпавшее число очков) – исход этого испытания. В этом случае исходами являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: **О** – выпадение «орла» (герба) и **Р** – выпадение «решки» (цифры).

Определение события. *Множество всех исходов испытания называется* ***множеством (пространством) элементарных событий****, а* ***событием*** *– подмножество множества элементарных событий.*

Определение случайного события. *Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется* ***случайным событием****.*

Пример. Испытание - студент сдает зачет. Случайное событие - он получил оценку 10. Испытание - бросание монеты. Случайное событие - выпадение герба или цифры.

Множество (пространство) элементарных событий обозначается буквой Ω.

Рассмотрим испытание, которое может окончиться одним из n различных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}.$$

Таким образом, любое подмножество пространства элементарных событий Ω будем называть случайным событием.

Замечание. В теории множеств аналогом пространства элементарных событий Ω является универсальное множество $\boldsymbol{U}$, а аналогом событий – множества, которые являются подмножествами $\boldsymbol{U}$.

Пример. Записать множество (пространство) элементарных событий испытания, состоящего в бросании двух монет.

Решение. Множество элементарных событий данного испытания образуют исходы: (00) – на первой монете выпал «орел» и на второй тоже; (0Р) – на первой монете выпал «орел», а на второй «решка», (Р0) – на первой монете «решка», а на второй «орел», (РР) – на первой и на второй монетах «решки». Таким образом $\Omega = \{(00); (0\text{Р}); (\text{Р}0); (\text{РР})\}$.

В дальнейшем случайные события будем называть просто событиями. События обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д. или когда их много $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

В жизни мы постоянно встречаемся со случайными событиями. При многократном наблюдении случайных явлений в них самих можно заметить определенные закономерности.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Это математическая наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами – случайностью и массовостью.

Событие, которое всегда произойдет в данном опыте, называется ***достоверным.*** Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий, поэтому обозначается символом Ω.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие A – «из ящика извлекли красный шар» будет достоверным, так как в ящике были только красные шары.

Событие, называется ***невозможным,*** если в данном опыте оно заведомо не может произойти ни при одном испытании и обозначается Ø.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие B – «из ящика извлекли синий шар» будет невозможным, так как в ящике нет шаров синего цвета.

События, которые не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте, называются ***несовместными***.

Пример. При выборе 9 человек из 45 для социологического опроса события A – «выбрали 9 женщин» и B – «выбрали 9 мужчин» являются несовместными событиями.

Замечание. В терминах теории множеств события A и B являются несовместными в данном опыте, если $A \cap B = \varnothing$.

Два события называются ***противоположными***, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$.

Замечание. В терминах теории множеств для события A и противоположного ему событию $\overline{A}$, верно равенство $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Пример. Пусть испытанием является бросок баскетболиста по корзине, событие A – «баскетболист попал». Тогда $\overline{A}$ - «баскетболист не попал».

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Операции над событиями

***Суммой двух событий** A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одно из событий A, B и обозначается* $A+B$ *или* $A \cup B$.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и обозначается $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Пример. Пусть событие A – «светит солнце», а событие B – «дует ветер», тогда событие $A+B$ состоит из следующих явлений погоды: или светит солнце, но нет ветра; или дует ветер, но не светит солнце; или и светит солнце и дует ветер.

Рассмотрим *свойства операции суммы событий*.

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $A+\overline{A}=\Omega$;
4) $A+\Omega=\Omega$;
5) $A+\overline{\Omega}=A$;
6) $\overline{\overline{A}}=A$;
7) $A+A=A$.

Произведением двух событий *A и B называется событие, состоящее в одновременном наступлении двух событий и A и B, и обозначается AB или $A\cap B$.*

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события и обозначается $A_1A_2\ldots A_n$.

Пример. Пусть событие A – «в аудиторию вошел студент», событие B – «в аудиторию вошел человек в очках». Тогда событие AB – «в аудиторию вошел студент в очках».

Рассмотрим *свойства операции произведения событий*:

1) $AB=BA$;
2) $A(BC)=(AB)C$;
3) Для несовместных событий A и B имеет место равенство $AB=\varnothing$;
4) $A(B+C)=AB+AC$;
5) $A+BC=(A+B)(A+C)$;
6) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$;
7) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;
8) $AA=A$;
9) $A\Omega=A$.

Разностью *событий A и B называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B и обозначается $A\backslash B$.*

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие A – «выпадет чётное число очков», то есть $A=\{2,4,6\}$, событие B – «выпадет число очков, меньшее трёх», то есть $B=\{1,2\}$, тогда событие $A\backslash B$ – «выпадет чётное число очков, не меньшее трёх», то есть $A\backslash B=\{4,6\}$.

Как показывают приведённые примеры, операции над событиями подобны операциям над множествами.

Элементарные события, входящие в подмножество A множества Ω, называют событиями, ***благоприятствующими наступлению событию A.***

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие A – «выпадет нечётное число очков». Этому событию благоприятствуют элементарные события из подмножества $\{1,3,5\}$ множества $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу событий****, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием*:

1) $A_i A_j = \varnothing \quad \forall i,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j;$

2) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$

Заметим, что события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

Пример. Примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при одном бросании игральной кости.

Классическое определение вероятности

Каждому случайному событию A ставится в соответствие характеризующее возможность его появления в данном опыте число $P(A)$ (от первой буквы французского слова *probabilite* – вероятность), которое и называется ***вероятностью события*** A.

Вероятность *– числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз испытаниях.*

Для определения классической вероятности нам потребуется понятие равновозможных исходов элементарных событий. Понятие ***равновозможных*** событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным. Элементарные события, шансы появления которых одинаковы в данном испытании, будем называть *равновозможными*.

Обычно понятие классической вероятности иллюстрируется на азартных играх потому, что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта – монеты, игральной кости, колоды карт и т.д.

Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев – решка. Поэтому в условиях этого опыта, принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна $\frac{1}{2}$.

При многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна $\frac{1}{6}$. Какова в таком случае вероятность события A – «выпадение нечетного числа очков»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию A, то вероятность $P(A)$ можно считать равной $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пусть пространство Ω состоит из конечного числа n равновозможных элементарных событий: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$.

Определение. Под вероятностью $P(A)$ *события A понимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу всех равновозможных исходов.*

Если n – общее число всех равновозможных исходов испытания, а m – число исходов благоприятствующих наступлению события A, то по определению

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности называется *классическим.*

Из определения вероятности события следуют её простейшие свойства.

1) Вероятность достоверного события Ω равна 1, так как все элементарные события являются благоприятствующими Ω, т. е. $m = n$:

$$P(\Omega) = 1.$$

2) Вероятность невозможного события Ø равна 0, так как для невозможного события нет ни одного элементарного события, ему благоприятствующего, т. е. $m = 0$:

$$P(\varnothing) = 0.$$

3) Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le P(A) \le 1$$

так как $0 \le m \le n$.

При использовании формулы классической вероятности в решении конкретных задач числовые значения m и n, входящих в эту формулу, не всегда очевидны. Их нахождение требует применения основных правил и формул комбинаторики.

В теории вероятностей классическим является эксперимент с урной, из которой надо не глядя извлекать одинаковые шары разных окрасок. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых – белые, то вероятность извлечь белый шар равна $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Пример. В урне находятся 10 одинаковых по размеру шаров, из которых 4 красных и 6 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

Решение. Обозначим через A событие «извлеченный шар синий». Имеем 10 равновозможных исходов из которых 6 благоприятствуют событию A. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Пример. Найдите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.

Решение. Для данного примера имеем: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{2,4,6\}$. Поэтому $m = 3$, $n = 6$ и $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «решки»?

Решение. Обозначим через A – «на верхних сторонах обеих монет оказались “решки”». В этом испытании 4 равновозможных элементарных исхода: (О;О); (О;Р); (Р;О); (Р;Р). Событию A благоприятствует один элементарный исход (Р;Р). Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Рассмотрим, например, ***задачу о выборке***, имеющую практические применения в разных областях знания.

Задача о выборке. *В урне всего n шаров, из них m белых и n – m черных шаров. Из урны наудачу вынимается k шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых k шаров окажется l белых*?

Исход этого испытания состоит в появлении любых k шаров из общего числа n шаров. В данном примере событие A – «среди вынутых k шаров окажется l белых». Поскольку нас не интересует порядок появления этих шаров, то число всех исходов равно числу сочетаний C_n^k. Заметим, что мы извлекаем не только l белых шаров, но и оставшиеся $k–l$ черных. Очевидно, что $0 \le l \le m$ и $0 \le k–l \le n–m$ в противном случае вероятность появления интересующего нас события равна 0. Извлечь l белых шаров из имеющихся в урне m белых шаров можно C_m^l способами. Соответственно извлечь $k–l$ черных шаров из n m черных шаров можно C_{n-m}^{k-l} способами. По *комбинаторному принципу умножения* число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$. Следовательно, искомая вероятность в задаче о выборке по *формуле классической вероятности* равна

$$P(A)=\frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}.$$

Пример. В урне 8 шаров (5 белых и 3 черных). Какова вероятность того, что из четырех наугад выбранных шаров ровно один будет черный?

Решение. Так как число всех исходов определяется числом сочетаний из 8 по 4, то $n=C_8^4=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{1\cdot 2....8}{1\cdot 2...4\cdot 1\cdot 2...4}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$ (так как мы выбираем 4 шара из 8 по одному, не возвращая их обратно). При благоприятном исходе один шар черный, а остальные три – белые (событие A). Черный шар можно выбрать $C_3^1=\frac{3!}{1!\cdot 2!}=3$ способами, а три белых шара, из оставшихся выбираемых четырёх, можно выбрать $C_5^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ способами, так как белых шаров в урне 5. Таким образом, число благоприятных исходов $m=3\cdot 10=30$. Значит, искомая вероятность $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{70}=0{,}429$.

1.4.3. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий. *Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример. Подбрасывается игральный кубик. Найдите вероятность того, что на верхней грани выпадет четное или кратное трем число.

Решение. Введем обозначения событий: A – «выпало четное число»; B – «выпало число, кратное трем». Тогда AB – событие, состоящее в том, что выпало четное число, кратное трем.

$P(A)=\dfrac{3}{6}$ (всего исходов в этом испытании 6, исходов благоприятствующих событию A три: выпало либо 2, либо 4, либо 6 очков).

$P(B)=\dfrac{2}{6}$ (исходов благоприятствующих событию B два: может выпасть либо 3, либо 6 очков).

$P(AB)=\dfrac{1}{6}$ (имеем один благоприятствующий событию AB исход: так как четное число, кратное трем, то это 6).

По теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ имеем:

$$P(A+B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Если события A и B являются *несовместными*, то $AB=\varnothing$, и тогда $P(AB)=0$, и имеет место следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Пример. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии $P(A)=0{,}4$, а того, что он произведен в Турции $P(B)=0{,}3$. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?

Решение. События A – «товар произведен в Италии» и B – «товар произведен в Турции» несовместны, т.к. появление одного исключает другое. По теореме сложения двух несовместных событий имеем:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}4+0{,}3=0{,}7.$$

Пример. При бросании двух игральных костей событие A – «выпало 5 очков» и событие B – «выпало 10 очков» несовместны. Событие $A+B$ – «выпало число очков, кратное 5» можно вычислить, по теореме сложения двух несовместных событий.

Решение. Всего исходов в этом испытании по комбинаторному правилу умножения равно $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятных исходов для события A четыре – это выпадение в двух бросаниях очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события B три благоприятных исхода – это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}.$$

Теорема сложения вероятностей *n* несовместных событий. *Вероятность суммы n попарно несовместных событий* (*т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно*) $A_1, A_2, ..., A_n$ *равна сумме вероятностей этих событий*:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Следствие. *Сумма вероятностей событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *образующих полную группу, равна единице*.

Действительно, по теореме сложения вероятностей n несовместных событий имеем:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(\Omega)=1.$$

Следствие. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице*:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Действительно, события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий, откуда в силу предыдущего следствия и вытекает равенство $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Замечание: Вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью события A:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Пример. Вероятность бесперебойной работы компьютера равна 0,9. Какова вероятность того, что при работе компьютер даст сбой?

Решение. Событие A – «компьютер работает бесперебойно», тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ – «при работе компьютер даст сбой». По формуле $P(\overline{A})=1-P(A)$, где $P(A) = 0{,}9$. Тогда $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Теоремы умножения вероятностей

В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого события A, которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие B.

Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть в корзине находится 8 белых и 4 черных шара, вынимается наудачу один за другим 2 шара. B – «первый вынутый шар белый», A – «второй вынутый шар белый».

Решение. Очевидно, что $P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Вероятность события A в этом испытании зависит от того, произошло событие B или противоположное событие $\overline{B}$. Если событие B произошло, то среди оставшихся 11 шаров только 7 белых и поэтому вероятность события A будет равна $P(A) = \frac{7}{11}$. Если событие B не произошло, а произошло противоположное событие $\overline{B}$, т. е. первый шар оказался черный, то среди оставшихся 11 шаров будет 8 белых и поэтому вероятность события A, в этом случае, равна $P(A) = \frac{8}{11}$.

Таким образом, вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B, это условная вероятность.

Определение условной вероятности. *Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. P(B) > 0. Вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется* ***условной вероятностью события A*** *и обозначается P(A|B).*

Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A, при условии, что произошло событие B, называют число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично, если $P(A) > 0,$ то условной вероятностью события B, при условии, что произошло событие A, называют число

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема умножения вероятностей. *Пусть* $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, *тогда вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло*

$$P(AB)=P(A)P(B|A);$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

Пример. В читальном зале имеется 6 учебников по социологии, из которых 3 учебника в переплёте. Библиотекарь берёт наудачу последовательно 2 учебника. Найдите вероятность того, что оба взятых библиотекарем учебника окажутся в переплёте.

Решение. Введём обозначение событий: A – «первый учебник в переплёте», B – «второй учебник в переплёте», так как события зависимые, то по теореме умножения вероятностей вероятность того, что оба учебника в переплёте

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Теорема умножения вероятностей *n* событий. *Пусть* $P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$*, тогда справедлива формула*:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$

то есть вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие события имели место.

Пример. Студент–заочник знает ответы на 10 тестовых вопросов из 15 вопросов. Пусть они для него будут «счастливые». Предположим, что четыре вопроса задаются лектором последовательно один за другим. Найдите вероятность того, что четыре подряд заданных вопроса – «счастливые».

Решение. Введем обозначения событий: A_1 – «первый вопрос счастливый», A_2 – «второй вопрос счастливый», A_3 – «третий вопрос счастливый», A_4 – «четвертый вопрос счастливый». По теореме умножения вероятностей n событий искомая вероятность равна

$$P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)=$$

$$=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{2}{13}\approx 0{,}154.$$

Если $P(B|A)=P(B)$*, то событие* B *называется* ***независимым от события*** A*, то есть вероятность события* B *не зависит от того, произошло или нет событие* A*.*

Независимость является свойством взаимным, то есть если справедливо $P(B|A)=P(B)$, то справедливо и $P(A|B)=P(A)$, поэтому можно говорить просто о *независимых событиях* A и B.

Замечание: Если события A и B независимы, то независимы также будут события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. После первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

Решение. В данном случае события A – «первый шар белый» и B – «второй шар белый» независимы, а тогда искомая вероятность равна:

$$P(AB)=P(A)\,P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0{,}16.$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности****, если вероятность наступления любого из них не зависит от того наступила или нет любая комбинация остальных.*

Другими словами события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности*** или ***независимыми****, если для любого подмножества индексов* $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *выполняется равенство:*

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Замечание: Если независимы события $A_1, A_2, ..., A_n$, то независимы будут также события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$.

Теорема умножения вероятностей *n* независимых событий. *Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2) ... P(A_n).$$

Замечание: Вероятность наступления события *A*, состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, находится по формуле:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} ... \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) ... P(\overline{A_n}),$$

где $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Пример. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике, равна 0,8, во втором – 0,7, в третьем – 0,6. Найдите вероятность того, что формула содержится хотя бы в одном справочнике.

Решение. Рассмотрим событие *A* – «формула содержится хотя бы в одном справочнике». Введем независимые события: A_1 – «формула есть в первом справочнике», A_2 – «формула есть во втором справочнике», A_3 – «формула есть в третьем справочнике».

По условию $P(A_1)=0,8$; $P(A_2)=0,7$; $P(A_3)=0,6$, тогда $P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0,2$; $P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=0,3$; $P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=0,4$.

Применим формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} ... \overline{A_n}) = 1 - P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) ... P(\overline{A_n})$ и получим:

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1-0,2\cdot 0,3\cdot 0,4=0,976.$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Пусть события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу событий и $A \subseteq \Omega$. Вероятности событий H_i, известны, причем $P(H_i)>0$ для всех $i=1,2,\ldots,n$; известны также условные вероятности $P(A|H_i)$. Требуется найти вероятность события *A*.

Формула полной вероятности. Пусть события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу событий и $P(H_i)>0$ для всех $i=1,2,\ldots,n$. Тогда вероятность произвольного события A может быть найдена по формуле

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i).$$

Доказательство. Представим событие A в виде

$$A=A\Omega=A(H_1+H_2+\ldots+H_n)=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n.$$

Поскольку события H_1, H_2, …, H_n попарно несовместны, то события AH_1, AH_2, …, AH_n также попарно несовместны. Пользуясь равенством $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$ и теоремой умножения вероятностей, получим:

$$P(A)=P(AH_1+AH_2+\ldots+AH_n)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A\,|\,H_n)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i).$$

Теорема доказана.

События H_1, H_2, …, H_n иногда называют ***гипотезами***. *Заметим*, что должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n}P(H_i)=1.$

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что этот грибник вышел из леса через час?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «грибник вышел из леса через час», а через H_i, i=1,2,3,4,5 – событие, состоящее в том, что «грибник пошел по i-ой дороге». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0{,}4$; $P(A|H_2)=0{,}8$; $P(A|H_3)=0{,}3$; $P(A|H_4)=0{,}24$; $P(A|H_5)=0{,}1$.

Далее, $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=P(H_5)=\dfrac{1}{5}$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)+P(H_4)P(A|H_4)+P(H_5)P(A|H_5)=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 0{,}4+\frac{1}{5}\cdot 0{,}8+\frac{1}{5}\cdot 0{,}3+\frac{1}{5}\cdot 0{,}2+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1=0{,}36.$$

Пример. Пусть в коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки любые 2 мяча и после игры возвращают их в коробку. Какова вероятность наудачу вынуть из коробки два новых мяча?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «извлечены два новых мяча для второй игры». Ситуация перед второй игрой описывается следующими взаимоисключающими возможностями:

H_1 – «в коробке один новый мяч», если первую игру играли двумя новыми мячами;

H_2 – «в коробке два новых мяча», если играли одним новым и одним старым мячами;

H_3 – «в коробке три новых мяча», если в первый раз играли двумя старыми мячами.

События H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Находим вероятности этих событий:

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \quad P(H_2) = \frac{3 \cdot 3}{C_6^2} = \frac{3}{5}, \quad P(H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

Вычисляем условные вероятности:

$$P(A \mid H_1) = 0, \quad P(A \mid H_2) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad P(A \mid H_3) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}.$$

Формулы Байеса. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу и их вероятности $P(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, известны до проведения опыта (так называемые *априорные вероятности*). Производится опыт, в результате которого происходит событие A. Каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как событие A уже наступило?

Искомые вероятности $P(H_i \mid A)$ носят название *апостериорных* и находятся путем использования теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Имеем

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i \mid A) = P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

(здесь предполагается, что $P(A) > 0$ и $P(H_i) > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$), откуда

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $P(A)$ из формулы полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

получим

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти формулы называют ***формулами Байеса***. *Они отвечают на вопрос каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как* *событие A уже наступило*?

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Грибник вышел из леса через час. Какова вероятность того, что грибник вышел по первой дороге?

Решение. Искомую вероятность найдём по формуле Байеса

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A \mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A \mid H_k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$P(H_1|A)=$

$$\frac{P(H_1)P(A\mid H_1)}{P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3)+P(H_4)P(A\mid H_4)+P(H_5)P(A\mid H_5)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot 0{,}4}{0{,}36} \approx 0{,}222.$$

Пример. Социолог проводил исследование психологического климата в разных отделах фирмы. При этом было установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследования показали, что 68 % женщин позитивно реагируют на эти ситуации, в то время как 37 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность, что ее заполнял мужчина?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что «случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию», а через H_1, – событие, состоящее в том, что «анкету заполнял мужчина», через H_2, – событие, состоящее в том, что «анкету заполняла женщина». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0{,}37$; $P(A|H_2)=1–0{,}68=0{,}32$.

Далее, $P(H_1) = \frac{5}{15+5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $P(H_2) = \frac{15}{15+5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=0{,}37\cdot\frac{1}{4}+0{,}32\cdot\frac{3}{4}=0{,}093+0{,}24=0{,}333.$$

Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Вероятность того, что ее заполнял мужчина, найдём по формуле Байеса

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A\mid H_1)}{P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)} = 0{,}278.$$

Повторение испытаний. Схема Бернулли

Пусть независимо друг от друга проводятся n испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода: либо происходит событие A («успех»), либо противоположное ему событие $\overline{A}$ («неудача»). Будем считать, что испытания проводятся в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления противоположного события $\overline{A}$ через q $(q=1-p)$. Данная схема носит название ***схемы Бернулли***.

Поставим вопрос о вероятности того, что в данной серии из n испытаний событие A наступило ровно m раз $(0 \le m \le n)$. Искомую вероятность обозначим через $P_n(m)$.

Теорема. *Вероятность* $P_n(m)$ *наступления события A ровно* m *раз в последовательности из* n *испытаний схемы Бернулли равна*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Вероятности $P_n(m)$ *называются* ***биномиальными вероятностями***, *а формула* $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ – ***формулой Бернулли***.

Рассмотрим частные случаи: $P_n(0) = q^n$, $P_n(1) = npq^{n-1}$, $P_n(n) = p^n$.

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит

- менее m раз находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$;
- более m раз находят по формуле: $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$;
- не менее m раз находят по формуле: $P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$;
- не более m раз находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$.

Пример. В магазин вошли 9 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,2. Найдите вероятность того, что 2 покупателя совершат покупку.

Решение. Из условия n=9; m=2; p=0,2; q=1–0,2=0,8. По формуле Бернулли искомая вероятность $P_9(2) = C_9^2 \cdot p^2 \cdot q^7 = 36 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}302$.

Пример. Найдите вероятность того, что при десятикратном бросании монеты «орел» выпадет ровно 5 раз.

Решение. В данном случае $p = q = \dfrac{1}{2}$, $n = 10$, $m = 5$. Отсюда находим

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0{,}246.$$

Пример. В результате наблюдений на некоторой реке установлено, что в течение 20 лет имело место четыре случая пересыхания реки. Найдите вероятность того, что за двадцатилетний период будет наблюдаться:

1. от трех до пяти случаев пересыхания реки (включительно);
2. не более пяти случаев пересыхания реки;
3. более пяти случаев пересыхания реки.

Решение. Вероятность того, что за 20 лет произойдет m случаев пересыхания реки $(0 \le m \le 20)$ равна $P_{20}(m) = C_{20}^m p^m q^{20-m}$, где $p = \dfrac{4}{20} = 0,2,\ \ q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8.$

Тогда искомая вероятность составит

1) $P_{20}(3) + P_{20}(4) + P_{20}(5) =$

$= C_{20}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15} \approx$

$\approx 0,2054 + 0,2182 + 0,1746 = 0,5982.$

2) $P(m \le 5) = \sum\limits_{m=0}^{5} P_{20}(m) = C_{20}^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{20} + C_{20}^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{19} +$

$+ C_{20}^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{18} + C_{20}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15} \approx$

$\approx 0,0115 + 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 + 0,2182 + 0,1746 = 0,8042.$

4) $P(m > 5) = 1 - P(m \le 5) = 1 - 0,8042 = 0,1958.$

Наивероятнейшее число наступления события

Для каждого числа m наступления события мы можем подсчитать биномиальные вероятности $P_n(0)$, $P_n(1)$, …, $P_n(n)$.

Число m_0, которому при заданном n соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(m_0)$, называется ***наивероятнейшим числом*** *появления события А.* При заданных n и p это число удовлетворяет неравенству:

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad \text{или} \qquad (n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p\,.$$

Замечание. Если число $np+p$ не является целым, то m_0 равно целой части этого числа, т.е. $m_0 = [np+p]$; если же $np+p$ – целое число, то m_0 имеет два значения: $np-q$ и $np+p$ или $(n+1)p-1$ и $(n+1)p$.

Пример. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из лука равна $1/3$. Производится шесть выстрелов. Каково наивероятнейшее число попаданий?

Решение. В данном примере число выстрелов $n = 6$. Рассмотрим событие A – попадание в цель при одном выстреле». Для этого события известна вероятность p=P(A)=1/3 и, следовательно, вероятность противоположного события q =1–p=2/3. Для ответа на вопрос вычисляем

$np - q = 6 \cdot \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, $\quad np + p = 6 \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$. Следовательно $m_0 \in \left[\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right]$.

Единственное целое число, принадлежащее этому отрезку это $m_0 = 2$.

1.4.4. Дискретные и непрерывные случайные величины

Рассматривая простейшие примеры, например, при бросании игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 или при каких либо измерениях получаются случайные ошибки и т. п. В таких случаях мы имеем дело со случайными величинами. На примере с бросанием игральной кости мы видим, что каждому исходу опыта ставится в соответствие единственное число $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта. Следует заметить, что значения случайной величины могут быть достаточно общей природы.

Определение случайной величины. *Пусть* Ω *– пространство элементарных событий. Числовую функцию от элементарного события* $\omega \in \Omega$ *назовем* ***случайной величиной***.

Таким образом, если каждому элементарному событию ω можно поставить в соответствие некоторое число, то говорят, что задана случайная величина.

Случайные величины будем обозначать *прописными латинскими буквами* X, Y, Z и т. д., а их возможные *значения* – соответствующими *строчными латинскими буквами* x, y, z и т. д. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены x_1, x_2, x_3.

Определение дискретной случайной величины. *Случайная величина, принимающая значения, которые можно записать в виде конечного набора или счетной последовательности чисел, называется* ***дискретной****, т. е. дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, число которых конечно или счетное.*

Примеры дискретных случайных величин:

– оценка, которую студент может получить на зачете;
– число несчастных случаев на улицах города Минска;
– число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки;
– число родившихся мальчиков среди десяти новорожденных (0,1,…,10).

Определение непрерывной случайной величины. *Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется* ***непрерывной случайной величиной***.

Примеры непрерывных случайных величин:

– рост человека от 150 до 200 см;
– температура воздуха в случайно выбранный день;
– скорость самолета в момент выхода на заданную высоту.
– время ожидания транспорта.

Каждому значению $\boldsymbol{x_n}$ дискретной случайной величины отвечает определенная вероятность $\boldsymbol{p_n}$, каждому промежутку (a,b) из области значений непрерывной случайной величины также отвечает определенная вероятность $\boldsymbol{P}$ того, что значение x, принятое случайной величиной, попадет в этот промежуток.

Определение закона распределения случайной величины. *Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется* ***законом распределения случайной величины.***

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в виде таблицы:

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n	…
$\boldsymbol{P}$	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n	…

В верхней строке записывают возможные значения x_i случайной величины X, а в нижней – их вероятности $p_i = P(X=x_i)$. Так как события $A_i = \{X=x_i\}$, $i=1,2,\ldots$, образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$ В случае конечного числа значений случайной величины, равного n, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически: построить точки (x_i, p_i) в декартовой прямоугольной системе координат и соединить их отрезками прямых. *Полученная фигура называется* ***многоугольником распределения.***

Пример. Даны вероятности значений случайной величины X: вероятность появления значения 10 равна 0,3; вероятность появления значения 2 равна 0,4; соответственно для значения 8 – вероятность равна 0,1 и для значения 4 – вероятность равна 0,2. Запишем эти значения в таблицу и построим многоугольник распределения:

X	2	4	8	10
P	0,4	0,2	0,1	0,3

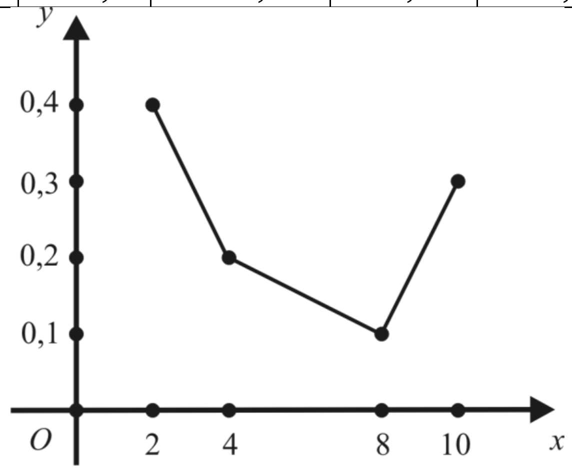


Рисунок 27 – Многоугольник распределения случайной величины.

Следует отметить, что закон распределения случайной величины полностью задает дискретную случайную величину. Однако, случайную величину изучают по ее числовым характеристикам, основными из которых являются *математическое ожидание*, *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение*. Далее рассмотрим эти числовые характеристики.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение математического ожидания*. *Математическим ожиданием *$M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.*

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений x_1, x_2,…x_n с вероятностями p_1, p_2, …, p_n соответственно, то по определению

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Пример. Подбрасывается игральная кость. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу выпавших очков.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Следовательно, по определению математического ожидания имеем:

$$M(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Замечание. Отметим, что постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение $X = C$ с вероятностью $P = 1$. Поэтому $M(C) = C\cdot 1 = C$, т. е. ***математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине***.

Далее рассмотрим без доказательства важнейшие свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.

Свойства математического ожидания дискретных случайных величин:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$$M(CX)=CM(X).$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Определение независимых случайных величин. *Две случайные величины X и Y называют* ***независимыми****, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Несколько случайных величин независимы, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.*

Критерием независимости двух случайных величин X и Y служит выполнение равенства

$$P(X<x,Y<y)=P(X<x)\cdot P(Y<y)$$

для любых $x, y\in$R.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

Замечание. Свойства 2 и 3 имеют место для любого конечного числа случайных величин.

Пример. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 2X+3Y+7$, если $M(X) = 4$, $M(Y)=1$.

Решение. Используя свойства математического ожидания, имеем:

$$M(Z)=M(2X+3Y+7)=M(2X)+M(3Y)+M(7)=$$
$$=2M(X)+3M(Y)+7=2\cdot 4+3\cdot 1+7=18.$$

Пример. Независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	4	6
P	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных случайных величин:

$$M(X)=1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}4=1{,}4,\quad M(Y)=4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}8=5{,}6.$$

В силу независимости случайных величин X и Y искомое математическое ожидание

$$M(XY)=M(X)M(Y)=1{,}4\cdot 5{,}6=7{,}84.$$

Замечание. Математическое ожидание случайной величины называют также ее ***средним значением***.

Следует заметить, что математическое ожидание характеризует случайную величину не полностью. Зная математическое ожидание, нельзя сказать, какие значения принимает случайная величина и как они отклоняются от среднего значения. Чтобы знать, как рассеяны значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, вводят такую числовую характеристику как ***дисперсия***.

Определение отклонения случайной величины. *Если X – дискретная случайная величина, $M(X)$ – ее математическое ожидание, тогда величина $X - M(X)$ называется* ***отклонением случайной величины*** *X от ее математического ожидания*.

Отклонение является случайной величиной и его математическое ожидание равно нулю:

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

Из полученного равенства следует, что с помощью отклонения невозможно определить среднее отклонение возможных значений случайной величины X от ее математического ожидания, т. е. степень рассеяния случайной величины X. Это объясняется взаимным погашением возможных положительных и отрицательных значений отклонения. Данного недостатка можно избежать, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Определение дисперсии*. *Дисперсией *$D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:*

$$\boldsymbol{D(X)=M((X-M(X))^2).}$$

Дисперсия случайной величины постоянна, т. е. является числовой характеристикой этой величины.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно, то закон распределения случайной величины $(X-M(X))^2$ имеет вид:

$(X-M(X))^2$	$(x_1-M(X))^2$	$(x_2-M(X))^2$	$\ldots$	$(x_n-M(X))^2$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Исходя из определения математического ожидания, получаем

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия – величина неотрицательная, т. е. $D(X) \geq 0$.

2. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Покажем это:

$$D(X)=M((X-M(X))^2)=M(X^2-2XM(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=$$
$$=M(X^2)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$

3. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C)=0.$$

Покажем это:

$$D(C)=M((C-M(C))^2)=M((C-C)^2)=M(0)=0.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии,

возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Покажем это:

Из определения дисперсии и свойств математического ожидания следует, что

$$D(CX) = M((CX - M(CX))^2) = M((CX - CM(X))^2) =$$
$$= M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 M((X - M(X))^2) = C^2 D(X).$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Покажем это:

Применяя свойство дисперсии 2 и свойства математического ожидания, имеем:

$$D(X+Y) = M((X+Y)^2) - (M(X+Y))^2 =$$
$$= M(X^2 + 2XY + Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 =$$
$$= M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2) - ((M(X))^2 + 2M(X)M(Y) + (M(Y))^2) =$$

$$= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 =$$
$$= M(X^2) - (M(X))^2 + M(Y^2) - (M(Y))^2 = D(X) + D(Y).$$

Замечание. Отметим, что свойство 5 распространяется на случай любого конечного числа случайных величин.

6. Если C – постоянная, то

$$D(X+C) = D(X).$$

Покажем это:

$$D(X+C) = M(((X+C) - M(X+C))^2) =$$
$$= M((X + C - (M(X) + C))^2) = M((X - M(X))^2) = D(X).$$

Определение среднего квадратического отклонения. *Квадратный корень из дисперсии случайной величины X называется ее **средним квадратическим отклонением** и обозначается* **σ**(X):

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия – в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 2. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 5X + 3$.

Решение. Согласно свойствам дисперсии имеем

$$D(Y) = D(5X+3) = D(5X) = 5^2 \cdot D(X) = 25 \cdot 2 = 50.$$

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Находим:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения случайной величины X, т. е. величины $(X - M(X))^2$:

$(X - M(X))^2$	$(0-0{,}9)^2$	$(1-0{,}9)^2$	$(2-0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле для дисперсии дискретной случайной величины, принимающей конечное число значений, находим

$$D(X) = (0-0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (1-0{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (2-0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}81 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 = 0{,}49.$$

Отсюда

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

Отметим, что дисперсию случайной величины X можно было найти и по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Запишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Находим:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}3,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1{,}3 - 0{,}9^2 = 1{,}3 - 0{,}81 = 0{,}49.$$

Функция распределения вероятностей случайной величины

Заметим, как говорилось ранее, дискретная случайная величина может быть задана законом распределения, представляющим собой перечень всех возможных значений этой случайной величины и их вероятностей. Однако такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин. Введение понятия функции распределения вероятностей случайной величины устраняет этот недостаток.

Введем следующие обозначения. Пусть x – действительное число, т.е. $x \in \mathbf{R}$. Обозначим через $F(x)$ – вероятность события A, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. $A = \{X < x\}$. Очевидно, что мы получили функцию $F(x)$ от переменной x.

Определение функции распределения. ***Функцией распределения*** *вероятностей случайной величины X называют функцию $F(x)$,* *определяющую вероятность того, что X примет значение, меньшее x:* $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения содержит в себе всю информацию, заложенную в случайной величине. Поэтому считается, что случайная величина (дискретная либо непрерывная) задана, если задана ее функция распределения.

Свойства функции распределения любой случайной величины:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того факта, что функция $F(x)$ есть вероятность.

2. Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Покажем это:

Действительно, пусть $x_1 < x_2$. Событие «случайная величина X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместных событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 < X < x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X < x_2)$ соответственно. По теореме о вероятности суммы двух несовместных событий имеем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Поскольку вероятность любого события – число неотрицательное, то $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$ и, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал $[a,b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах этого интервала:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то $F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le a, \\ 1, & при\ x \ge b. \end{cases}$

Покажем это:

Действительно, если $x \le a,$ то событие $A=\{X < x\}$ является невозможным (случайная величина X таких значений не принимает) и, следовательно, его вероятность равна нулю. Если $x \ge b,$ то событие $A=\{X < x\}$ является достоверным и, следовательно, его вероятность равна единице.

5.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$

6. Функция распределения $F(x)$ – непрерывна слева для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Последние два свойства 5 и 6 рассмотрены без доказательства.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1,\\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3} & \text{при } -1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X принимает значения из полуинтервала $[0,1)$.

Решение. Так как на полуинтервале $[0,1)$ функция распределения задается формулой $F(x)$ = $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, то

$$P(0\le X<1)=F(1)-F(0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

***Определение функции распределения. Функция распределения дискретной случайной величины** X *имеет вид*:

$$F(x)=\sum_{x_k<x}P(X=x_k),$$

где суммируются вероятности тех значений случайной величины X*, которые меньше* x. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

X	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5

Найдите функцию распределения случайной величины X и построить график функции распределения.

Решение. Если $x\le 0$, то событие A = $\{X < x\}$ является невозможным (случайная величина не принимает значений, строго меньших нуля) и, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X) = 0{,}1$. Действительно, в данной ситуации случайная величина X может принять только одно значение, находящееся левее 1, – значение 0 с вероятностью 0,1.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1)$ =0,1+0,5=0,5. Действительно, $F(x)$ равно вероятности события A = $\{X < x\}$, которое может быть осуществлено, когда случайная величина X примет значение 0 или значение 1. Поскольку два этих события несовместны, то по теореме сложения вероятность события A = $\{X < x\}$ равна сумме вероятностей событий $A_1 = \{X =0\}$ и $A_2 = \{X =1\}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = 1$, так как событие A = $\{X < x\}$ является достоверным.

Таким образом, получаем функцию распределения вида:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le 0,\\ 0{,}1 & \text{при } 0 < x \le 1,\\ 0{,}5 & \text{при } 1 < x \le 2,\\ 1 & \text{при } x > 2.\end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рисунке ниже.

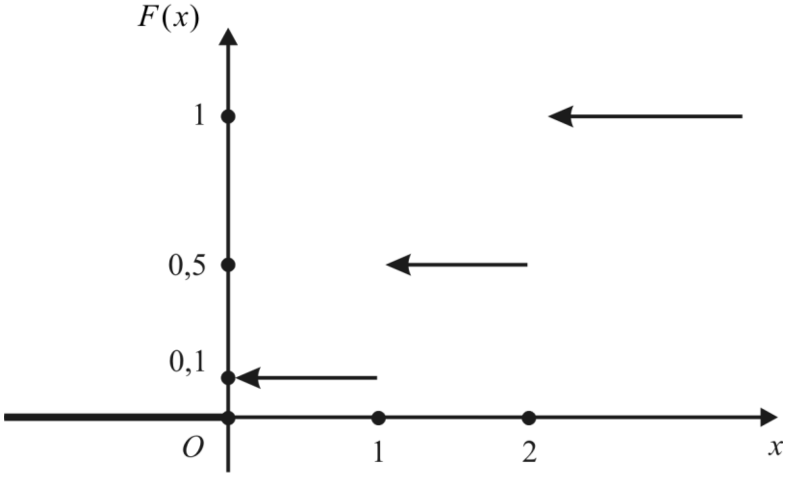


Рисунок 28 – График функции распределения.

Как видно из рисунка, функция $F(x)$ является разрывной, причем точками разрыва являются значения x_k, принимаемые случайной величиной X. Величины скачков функции равны вероятностям $p_k = P(X = x_k)$.

Непрерывные случайные величины

Используя понятие функции распределения вероятностей, можно дать более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение непрерывной случайной величины. *Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует функция **p(x)** такая, что при любом $x \in \boldsymbol{R}$*

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.}$$

*Функция **p(x)** входящая в последнее равенство, называется **плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины** X. График функции **p(x)** называется **кривой распределения**.*

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a,b)$.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу* $[a,b)$ *равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от a до* b:

$$P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Доказательство. Действительно, на основании свойства 3 функции распределения имеем

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Из определения непрерывной случайной величины имеем:

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} p(x)\,dx,\ F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx,$$

откуда

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx + \int_a^b p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Замечание. Доказанная формула геометрически означает тот факт, что вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в полуинтервал $[a,b)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и отрезками прямых $x=a$, $x=b$.

Из равенства непрерывной случайной величины следует, что функция $F(x)$ непрерывна. Поэтому вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X = c) = 0.$$

Действительно, положив в формуле

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.}$$

$a=c$, $b = c+\Delta x$, имеем $P(\, c \le X \le c+\Delta x) = F(c+\Delta x) - F(c)$.

Устремим Δx к нулю. В силу непрерывности $F(x)$ в точке c разность $F(c+\Delta x) - F(c)$ также стремится к нулю, откуда и получаем требуемое.

Используя равенство $P(X=c) = 0$, нетрудно получить равенства

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b).$$

Например, равенство

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

доказывается так:

$$P(a \le X < b) = P(X = a) + P(a < X < b) = 0 + P(a < X < b) = P(a < X < b).$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $p(x) \ge 0$ (следует из того, что функция $F(x)$ – неубывающая функция).

2. В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения: $F'(x) = p(x)$

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty,+\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

Это следует из того, что $F(+\infty)=1$. Это свойство имеет следующую геометрическую интерпретацию: *площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения и осью Ох, равна единице.*

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку $[a,b]$, то

$$\int_{a}^{b} p(x)\,dx = 1.$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}\sin x & \text{при } \ 0 < x \le \pi, \\ 0 & \text{при } \ x > \pi. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения $F(x)$ и вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0, \frac{\pi}{4})$

.

Решение. Если $x \le 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Если $0 < x \le \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\sin t\,dt =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x.$$

Если $x > \pi$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} p(t)\,dt + \int_{\pi}^{x} p(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\sin t\,dt + \int_{\pi}^{x} 0\,dt = 0 - \frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi} + 0 = 1.$$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, \ \text{при } x\le 0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x, \ \text{при } \ 0<x\le\pi,\\ 1, \ \text{при } \ x>\pi.\end{cases}$

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение математического ожидания. ***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины*** *X, возможные значения которой принадлежат отрезку* [*a*, *b*], *а плотностью распределения вероятностей является функция* **p(x)** называют определенный интеграл

$$M(X)=\int_a^b xp(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$$

при условии, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p(x)\,dx.$$

Определение дисперсии. ***Дисперсией непрерывной случайной величины*** *X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения*:

$$D(X)=M((X-M(X))^2).$$

Если возможные значения X принадлежат отрезку [*a*, *b*], *а плотностью распределения вероятностей является функция* **p(x)**, *то*

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2\,p(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\,p(x)\,dx$$

при условии, что интеграл сходится.

Для вычисления дисперсии можно получить более удобные формулы:

$$D(X)=\int_a^b x^2 p(x)\,dx-(M(X))^2,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx-(M(X))^2.$$

Замечание. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной величины, формулой

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Имеем

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{4}{3},$$

$$D(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{4}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2\right)\right|_0^2=2-\frac{32}{9}+\frac{16}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

1.5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

1.5.1. Математическое моделирование социальных процессов

Объекты социальных процессов представляют собой, как правило, элементы живой природы, что существенно отличает методы их изучения от методов, применяемых в естественных науках. Так, в частности, прямое взаимодействие исследователя с изучаемым объектом часто оказывается нежелательным, поскольку может привести и приводит к изменению характеристик этого объекта. Иногда размеры и масштабы социальных процессов делают такое взаимодействие просто невозможным. В результате этого приходится заменять исследуемый объект его моделью. Понятие *модели* является первичным и поэтому неопределяемым.

Существуют различные понимания модели.

1 тип: модель – это такой образ, который разум делает более полным, более богатым, чем действительность.

2 тип: модель схематически характеризует оригинал, замещая его, создавая его “рабочею гипотезу”, которая после уточнения, углубления, про-верки становится образом этого оригинала. Модель создается для удобства тех или иных операций, для имитации таких процессов, которые не могут быть непосредственно воспроизведены. В ней должны отражаться самые существенные свойства объекта, самые главные внутренние и внешние связи. Но модель не может исчерпать сущность объекта, она всегда беднее реальной действительности, не раскрывает до конца ее сложности.

Моделирование – это построение модели, воспроизводящей особенности структуры, поведения, а также свойства оригинала, и последующее её экспериментальное или мысленное исследование. В дальнейшем будем говорить исключительно о математических моделях, имея в виду, что нами будет использоваться язык математики.

Математическая модель – это приближённое описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Математическая модель сложной системы дает о этой системе лишь частичное представление. Одни и те же анкеты изучаемой системы можно описывать различными моделями, имеющими право на совместное, одновременное существование. Эти модели могут быть разноплановыми.

Научная ценность этих моделей состоит в том, что они позволяют понимать поведение системы лучше, чем если бы оно было изложено словами. Это объясняется тем, что математический язык обладает очень высокой степенью общности, так что у ученого, владеющего этим языком, появляется множество аналогий с уже известными ему ситуациями, описываемыми такими же уравнениями.

Изучение явления с помощью математической модели называется математическим моделированием. Анализируя богатый опыт моделирования, накопленный в социологии, нельзя не отметить, что его общая положительная сторона состоит в том, что эта наука стала отходить от описательности, выявлять регулярность и законы развития различных пространственных систем и их подсистем, а в еще большей степени структур. Математическое моделирование нанесло удар эмпиризму в социологической науке, направило социологию по пути поиска закономерностей (в том числе пространственных), по пути расчета, эксперимента, сравнения вариантов.

Широкое использование математики (в ее современном понимании) становится необходимым условием успешной разработки содержательных аспектов социологических теорий.

Существует два вида моделей:

1) Материальные, которые конструируются из материальных элементов и функционируют по объективным законам природы. В этом случае изучаемый подлинный объект представлен моделью.

2) Идеальные (*мысленные*) мысленные модели, и операции над ними конструируются в уме, и последующие действия над ними носят мысленный характер и опираются на определенные логические средства, математический аппарат, специальные утверждения теории.

Практическими задачами математического моделирования являются:

- анализ социальных объектов и процессов,
- социологическое прогнозирование,
- социальное управление.

Типы математических моделей

Рассмотрим классификацию математических моделей. Единой системы классификации не существует. Мы выделим несколько основных признаков.

По общему целевому назначению математические модели делятся на

1. *Теоретико-аналитические*, которые используются при изучении общих свойств и закономерностей социологических явлений.

2. *Прикладные,* которые использующиеся в решении конкретных социологических задач.

По типу информации различают

1. *Аналитические*, построенные на доопытной информации.

2. *Идентифицируемые,* построенные на послеопытной информации.

По учету фактора времени:

1. *Статические* (зависимости отнесены к одному моменту времени).

2. *Динамические* (описывают социологическую систему во времени).

По фактору неопределенности:

1. *Детерминированные* (результат на выходе однозначно определяется управляющими воздействиями),

2. *Стохастические* или вероятностные (на выходе могут получать различные результаты в зависимости от действия случайного фактора).

Этапы математического моделирования

Процесс моделирования включает в себя *три структурных элемента*: 1) объект исследования; 2) субъект (исследователь); 3) модель отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом.

Рассмотрим общую схему процесса математического моделирования в социологии, состоящую из 4-х этапов.

1 этап – *Этап формализации*, перевод рассматриваемой задачи с естественного языка на язык математических терминов и обозначений, при этом осуществляется переход от реальной ситуации к математической модели.

Применение математики в социологии предполагает предварительную разработку социологического материала. Должны быть сформулированы цели и задачи исследования; уточнены исходные, промежуточные, итоговые понятия; выделены важнейшие черты и особенности связи исследуемого объекта с другими объектами.

Построение модели также имеет несколько стадий:

- определяется тип модели;
- изучаются возможности её применение в данной задаче;
- уточняется перечень переменных и параметров.

Этот этап завершается записью в математических и социологических терминах текста. Это может быть как простая, так и сложная модель.

Т.к. модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта, то для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта.

2 этап – *Этап исследования построенной математической модели.* На этом этапе выбирается наиболее подходящий метод решения поставленной математической задачи. Исследование математических задач, сводятся к получению выходных данных для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений.

Конечным результатом является совокупность знаний о модели в отношении существенных сторон объекта-оригинала.

3 этап – *Этап интерпретации*, т.е. анализ полученных результатов и объяснения их в терминах исходной задачи.

Здесь выясняется, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики. Проверяется: согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели.

4 этап: Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. Осуществляется практическая проверка полученных с помощью модели знаний и построение обобщающей теории реального объекта.

Перечисленные этапы находятся в тесной взаимосвязи.

Математические модели в социально-гуманитарных науках

Сегодня математические методы широко используются в социологии, экономике, медицине, лингвистике и философии. Делаются попытки их применения при изучении истории. В настоящее время можно выделить два основных направления применения математики: обработка больших объемов данных (обработка массивов гипотез и собранных фактов, зачастую разрозненных) и математическое моделирование. Используемые в гуманитарных науках математические модели охватывают лишь небольшую часть задач, поэтому необходимы как модели, так и инструмент, позволяющий строить и анализировать эти модели. Математические модели давно и успешно применяются в исследовании многих социальных процессов. Хорошо известна модель Ричардсона (гонки вооружений), вероятностные цепочки для описания процессов распределения ресурсов. В настоящее время широко применяются гендерные системы, модели социальных групп, социальных институтов, модели поведения отдельных индивидов и межличностных взаимодействий.

Наиболее широким классом математических моделей для описания процессов различной природы являются динамические системы. Поэтому и при описании процессов, изучаемых в социологии, мы тоже встречаемся с этими системами, как с дискретными, так и непрерывными. Разнообразие таких моделей велико – от линейных систем, до сложных с большим количеством параметров. Хорошо известно, что даже системы с достаточно простыми функциями, задающими правые части, могут обладать весьма сложным поведением. Успешное исследование поведения любой такой модели основано на сочетании как аналитических, так и численных методов и построении качественных портретов при различных сочетаниях значений параметров.

Пример. Модель социальной диффузии. Диффузия – распространение черт, культуры (например, религиозных убеждений, технологических идей, форм языка и т. д.) или социальной практики одного общества (группы) другому.

Математическую модель социальной диффузии можно записать в следующем виде:

$$x_n = k_n(N_n - x_{n-1}) + x_{n-1},$$

где x_n – количество элементов на шаге n; n — порядковый номер шага; k_n – коэффициент на шаге n; N_n – размер генеральной совокупности на шаге n.

Пример. Модель социогенеза. Социогенез – процесс исторического и эволюционного формирования общества. В основе модели социогенеза лежит разделение общества на подсистемы по Т. Парсонсу: экономическая и политическая системы, социетальное сообщество – единый коллектив, подчиняющийся заданным нормам (обеспечивает единство общества), система поддержания институциальных этнических образцов.

В качестве управляющего параметра взят уровень пассионарного напряжения. По определению Л.Н. Гумилева «пассионарное напряжение» – пассионарность, приходящаяся на одного члена общества. Пассионарность – способность и стремление этнического сообщества к изменению окружения; уровень активности этнического сообщества. Внутренняя энергетика этноса является движущей силой культурного, политического и геополитического созидания.

Предполагается, что динамика системы описывается следующими составляющими: $G(t)$ моделирует развитие политической системы, $E(t)$ – экономической, $K(t)$ – социетального общества и $D(t)$ – системы поддержания институциональных этнических образцов. Основным управляющим параметром является пассионарное напряжение P.

Таким образом, рассматривается система

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = a_{11}(P,u)G + a_{12}(u,E)E + a_{13}(P,u)(K+D)G, \\ \frac{dE}{dt} = a_{21}(P,u)E - a_{22}(u,G)G - a_{23}(P,u)(K+D)E, \\ \frac{dK}{dt} = a_{31}(u)(G^2+E^2) - a_{32}(P,u,K)K - a_{33}(u)D^2, \\ \frac{dD}{dt} = a_{41}(u)G^2 - a_{42}(P,u,D)D - a_{43}(u)K^2. \end{cases}$$

Пример. Модели включенности в малую дискуссионную группу. В моделях включенности в малую дискуссионную группу единицей анализа являются коммуникативные действия. Действие определяется как наименьший сегмент поведения. Он может быть отнесен к одной из 12 категорий, таких как «проявляет солидарность» (поднимает статус других, оказывает помощь, поощряет), «советует» (руководит, учитывает автономию других), «ориентирует» (рассказывает, вносит ясность, подтверждает), «не соглашается» (саботирует, проявляет педантизм, не помогает), а также ряда других. Все группы ранжируются по частоте их действий. Для большого числа групп одинакового размера *n* на основе опытных данных вычисляется $N_n(r)$ – частота действий индивида *r*-го ранга в группе размера *n*. Если бы $N(r)$ была близка к постоянной величине, то это бы означало «равенство» в количестве действий индивидов. Однако многочисленные исследования социальных психологов показывают, что в частоте действий индивидов наблюдаются значительные различия. В реальных группах действия распределены неравномерно среди их членов. Зависимость частоты действий индивида от его ранга имеет вид:

$$\mathrm{N_n(r)} = \frac{\mathrm{c_n}}{\mathrm{r}},$$

где $\mathrm{c_n}$ – эмпирический коэффициент для группы размера *n*. Эта зависимость в социальной психологии носит название «закона Ципфа».

Пример. **Модель групповой продуктивности.** Обыденная точка зрения на связь между научной продуктивностью и размером научной группы такова: чем меньше группа, тем меньше «бездельников», тем более группа продуктивна. По мнению большинства людей, уменьшение группы, ее дробление способствует большей продуктивности каждого члена группы. Однако многочисленные исследования социологов не подтверждают это мнение. Обыденное мнение верно «с точностью до наоборот». Увеличение научных групп способствует их большей продуктивности.

А. И. Яблонским была предложена следующая модель:

$$p(n) = p(1) \cdot e^{\alpha(n-1)},$$

где n – число индивидов в научном коллективе; $p(n)$ – его продуктивность; $p(1)$ – продуктивность при n=1. В этой модели продуктивность группы измерялась отношением c/n, где c – число ссылок на работы организации, в которой работает данная группа. Вопреки традиционной точке зрения эта модель предсказывает, что продуктивность является возрастающей функцией размера группы.

Пример. **Математическая модель конфликтной ситуации.** Ни одно из многочисленных определений конфликта не является корректным. Дело в том, что рациональные действия часто позволяют избежать возникновения конфликта. Поэтому будем говорить только о конфликтной ситуации, понимая под этим наличие у взаимодействующих сторон несовпадающих интересов. Рассмотрим и формализуем основные элементы конфликтной ситуации.

1. Это прежде всего сами участники конфликтной ситуации, которых будем рассматривать как некоторое конечное множество N. При этом n – число участников конфликтной ситуации. Каждому участнику можно сопоставить его номер, тогда множество N примет вид $N=\{1,2,3,\dots,n\}$. Заметим, что в качестве участников могут выступать не только отдельные индивиды, но также и команды, фракции, классы, государства и т. п.

2. Каждый из участников может осуществлять некоторые действия или выбирать определенную линию поведения, влияющие на течение и исход конфликтной ситуации. Обозначим через X_i множество стратегических возможностей отдельного участника и через $x_i \in X$ его стратегию, т. е. конкретный выбранный им способ действий. Если каждый из участников выберет свою стратегию, то будем говорить, что сложилась ситуация $x=(x_1;\ x_2;\ \dots\ ;x_n)$, которая и определяет исход конфликтной ситуации, так как действия участников уже фиксированы.

3. Для качественной оценки последствий принятых решений введем множество исходов конфликтной ситуации I. Так как любой исход однозначно определяется ситуацией x, то в дальнейшем часто будем отождествлять множество исходов со всем множеством ситуаций $X = X_1\times X_2\times\dots\times X_n$.

4. Естественно, что каждый из участников конфликтной ситуации оценивает тот или иной исход с точки зрения реализации своих интересов. Для формализации этого процесса введем функцию выигрыша для каждого из участников $H_i(x)$, определенную на множестве ситуаций. При этом будем считать, что каждый из участников стремится максимизировать свой выигрыш.

Пример. Моделирование социально-гуманитарных процессов с помощью графов. ***Граф*** – это множество точек, называемых ***вершинами***, и соединяющих их линий, которые называются ***ребрами.*** Точнее говоря, любые две вершины могут либо соединяться, либо не соединяться ребром. Графы делятся на *ориентированные* и *неориентированные графы.* В ориентированном графе каждое ребро имеет направление (рисунок 9), а в неориентированном – нет (рисунок 10).

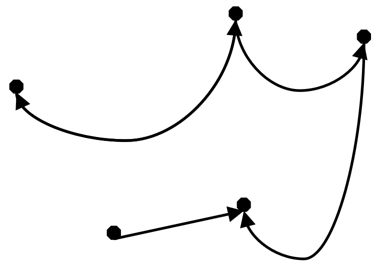


Рисунок 29 – Ориентированный граф.

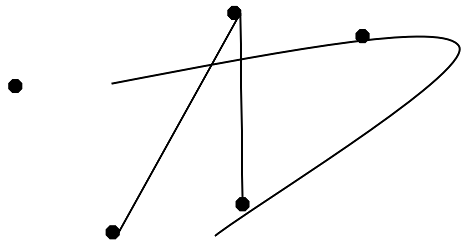


Рисунок 30 – Неориентированный граф.

Ребра ориентированного графа называются также ***дугами***. Таким образом, в неориентированном графе любые две вершины могут быть либо соединены, либо не соединены ребром. В ориентированном графе любые две вершины *x*, *y* могут быть не соединены, соединены дугой в одном направлении или соединены двумя дугами в обоих направлениях – от *x* к *y* и от *y* к *x*. Подчеркнем, что в графе важен лишь факт наличия ребра между теми или иными вершинами и направления ребер (в ориентированном графе). Форма ребер (прямые, кривые) роли не играет. Например, графы, изображенные на рисунке 11, эквивалентны, т.е. представляют собой один граф:

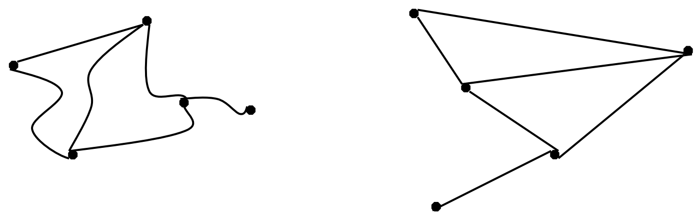


Рисунок 31 – Эквивалентные графы.

Неориентированный граф называется ***связным***, если из каждой вершины по ребрам можно добраться до любой другой вершины, и ***несвязным*** в противном случае. Таким образом, несвязный граф состоит из нескольких отдельных частей (рисунок 12).

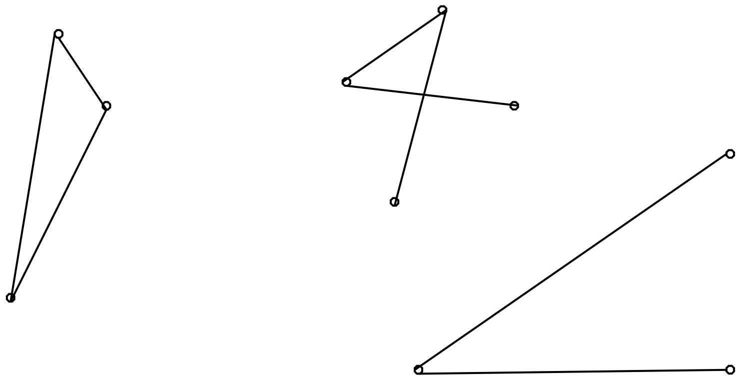


Рисунок 32 – Несвязный граф.

Циклом в неориентированном графе называется замкнутый путь (контур) из ребер. Цикл называется *простым*, если каждая вершина в нем встречается один раз. Например, в графе, изображенном на рисунке 13, цикл 1-5-2-1 – простой, а цикл 1-5-6-3-5-2-1 – нет.

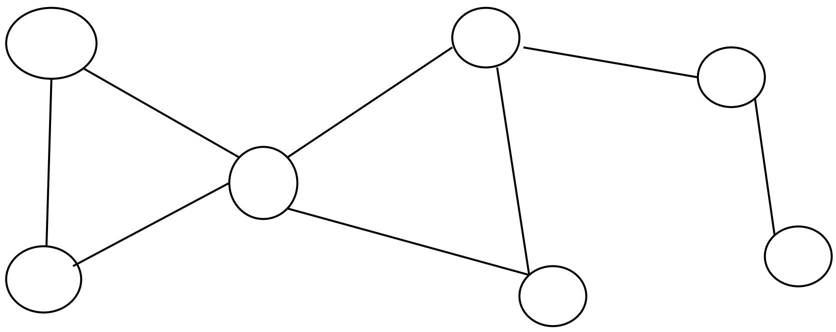


Рисунок 33 – Циклы.

Древовидный граф (*дерево*) – это неориентированный связный граф без циклов. Если в дереве выделена одна вершина, то она называется *корнем*. Можно наглядно показать, что при выборе любой вершины в качестве корня древовидный граф можно изобразить так, что он будет напоминать обычное дерево или куст – в обычном положении или корнем вверх (рисунок 14).

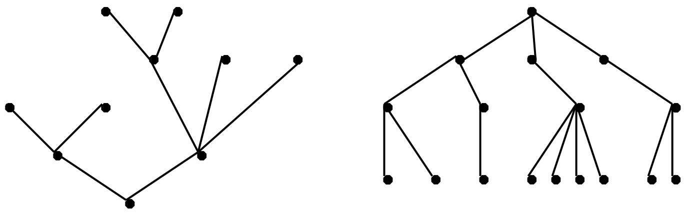


Рисунок 34 – Древовидный граф.

Древовидный граф с корнем можно некоторым естественным способом превратить в ориентированный, а именно: направить все ребра от корня либо наоборот (рисунок 15).

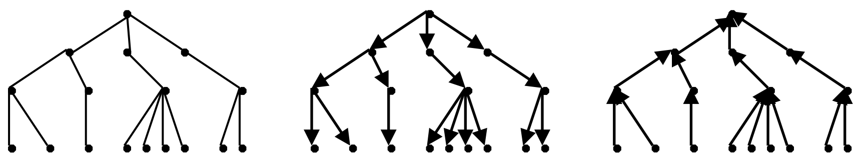


Рисунок 35 – Древовидный граф, превращенный в ориентированный.

Использование графов как наглядного способа описания социально-гуманитарных отношений

Рассмотрим некоторые применения графов. Неориентированные графы могут быть использованы для изображения симметричных (двусторонних) отношений между объектами, например, отношения сотрудничества между людьми. Ориентированные графы удобны для изображения несимметричных (т.е. могущих быть односторонними) отношений. Например, любви, зависти, заботы, подчиненности.

Ориентированные графы могут быть использованы для изображения отношения порядка. Если $x > y$, то мы соединяем x и y ребром, идущим в направлении от x к y, а если x к y несравнимы, то ребра между ними нет. Таким образом, любые две вершины либо соединены ребром лишь в одном направлении, либо не соединены вовсе.

Древовидным графом может быть описана любая строго иерархическая система – например, система административной подчиненности. Важная разновидность такой системы – иерархическая классификация. Например, разделим сельское население нашей страны по областям, затем – по районам, далее – по сельсоветам и, наконец, – по деревням. Введем следующее расстояние $d(x,y)$ между сельскими жителями x к y. Положим это расстояние равным единице, если эти люди живут в одной деревне, двум – если они живут в разных деревнях одного сельсовета, трем – в разных сельсоветах одного района, четырем – разных районах одной области и, наконец, пяти, если они проживают в разных областях.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ
ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Занятие № 1. Основные понятия теории множеств. Множества. Операции над множествами и их свойства.

Примеры решения задач

1. Задайте множество способом перечисления его элементов:

а) Множество A – «множество дней недели».

Решение. множество A = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}.

б) Множество B – «множество основных арифметических действий».

Решение. множество B = {сложение, вычитание, умножение, деление}.

2. Задайте множества из предыдущей задачи **1**, указывая только характеристические свойства его элементов.

Решение. Указанные множества A и B можно задать следующим образом:

а) A = {a: a – день недели}, **б)** B = {$в$: $в$ – арифметические действия}.

3. Перечислите элементы множеств, заданных с помощью характеристического свойства:

а) Множество корней квадратного уравнения $X = \{ x: x^2 - 2\cdot x - 15 = 0\}$.

Решение. множество $X = \{-3, 5\}$.

б) Множество X = { x – *натуральное число*: $-4 < x \leq 3$}}.

Решение. множество $X = \{1, 2, 3\}$.

4. Перечислите элементы множества А = {a – натуральное число: $-5 < a \leq 5$}} заданного с помощью характеристического свойства.

Решение. Имеем, множество $A = \{1, 2, 3,4,5\}$.

5. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества $\{1, 3\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 3\}$;

б) Подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 3\}$ являются восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$;

в) Подмножествами двухэлементного множества $\{\{0\}, 1\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{\{0\}\}$, $\{1\}$, $\{\{0\}, 1\}$.

6. Верны, ли следующие включения и вложения:

а) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

Решение. Нет, не верно, так как в множестве $A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$ нет элемента $\{1, 2\}$. Множество A содержит 4 элемента: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3\}$, 1 и 2!

б) $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 5, 7\}$.

Решение. Да, верно, так как множество $\{2, 5\}$ – это подмножество множества $\{1, 2, 5, 7\}$.

7. Совпадают ли следующие множества: множество $A = \{\{0, 1\}, 2\}$ и множество $B = \{0, 1, 2\}$?

Решение. Нет, не совпадают, так как множество A состоит из двух элементов $\{0, 1\}$ и 2, а множество B – из трех элементов: 0, 1, 2.

8. Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого:

$A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$, $D = \{\{1\},2,3\}$, $E = \{3,2,1\}$, $F = \{\{1,2\},3\}$.

Решение. $A \subset B, A \subset C, A \subset E$; $B \subset C, B \subset E$; $C \subset E$.

9. Пусть заданы два множества A и B, где $A=\{3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Решение. $A \cup B=\{1,2,3,4,5\}$; $A \cap B=\{3,4\}$, $A \setminus B=\{5\}$, $B \setminus A=\{1,2\}$, $A \Delta B=\{5,1,2\}$.

10. Пусть A – множество людей с гуманитарным образованием, B – множество людей с математическим образованием. Найдите $A \Delta B$.

Решение. Воспользуемся формулой $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Сначала найдём $A \setminus B$ – множество людей, имеющих только гуманитарное образование и не имеющих математического образования, затем $B \setminus A$ – множество людей, имеющих только математическое образование и не имеющих гуманитарного образования. Тогда $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – множество людей, имеющих только гуманитарное образование или только математическое образование.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$» способом перечисления его элементов.

2. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$» с помощью указания характеристических свойств его элементов.

3. Составьте список элементов множества, заданного с помощью характеристического свойства элементов:

а) *Множество* $X = \{x$ – *натуральное число:* $x < 7\}$.

б) *Множество* $X = \{x$ – *натуральное число:* $|x| < 4\}$.

4. Проверить, совпадают ли множества $A = \{\{1, 3\}, 2\}$ *и* $B = \{1, 2, 3\}$.

5. Выяснить справедливо ли включение: $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

6. Пусть A – множество студентов ФФСН, прогуливающих занятия по высшей математике, а B – множество студентов ФФСН, надеющихся сдать экзамен по высшей математике. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

7. Даны множества $A=\{1,2,4,8,10\}$, $B=\{2,3,8,12\}$, найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$,

$B \setminus A$, $A \Delta B$.

8. Даны множества A={0,3,4,5,15}, B={1,3,8,10}, C={1,2,4,8,10,15}. Найдите максимальный элемент множества $(A\setminus B)\cup(B\cap C)$.

9. По заданным промежуткам A=(-2;2] и B=[0;5) на числовой прямой определить $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

10. Существуют ли такие множества *A, B, C*, что $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\varnothing$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{C}=\varnothing$, $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\setminus\mathrm{C}=\varnothing$?

11. Описать следующие множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

а) A – «множество студентов-социологов отличников группы» и B – «множество студентов ФФСН»;

б) A – «множество успевающих студентов-социологов» и B – «множество юношей-социологов»;

в) A – «множество отличников–заочников социологов» и B – «множество девушек–заочниц социологов».

12. Даны следующие числовые множества: A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, B = {2, 5, 6, 11, 12}, C = {1, 2, 3, 5, 9, 12}. Найдите множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(C \setminus B) \cap A$; **б)** $B \setminus (A \cap C)$; **в)** $(C \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Занятие № 2. Операции над множествами (пересечение, объединение, симметрическая разность). Диаграммы Эйлера-Венна. Применение теории множеств к анкетным опросам и социальным группам.

1. Дано множество A = {1, 2, 3, {1}, {1, 2}}. Укажите, какие из следующих выражений являются элементами заданного множества *A,* а какие его подмножествами: 2, {2}, {1, 2},{1, 3}, {1, {1}}, {{1}}, {1, {2}}, {1, 2, {1, 2}}.

Решение. 2 – это элемент; {2} – подмножество; {1, 2} – это и элемент и подмножество; {1, 3} – подмножество; {1, {1}} – это подмножество; {{1}} – это тоже подмножество; {1, {2}} – это ни элемент, ни подмножество; {1, 2, {1, 2}} – подмножество.

2. Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

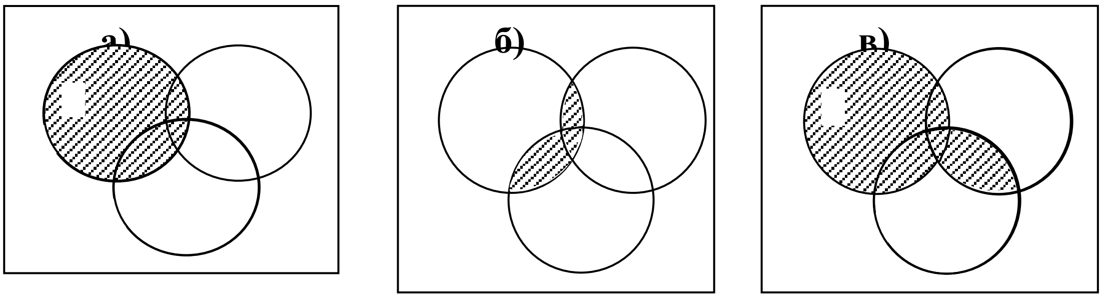
Решение. Множество $\{\varnothing\}$ имеет один элемент, а именно $\varnothing$, а множество $\varnothing$ не имеет элементов, следовательно, эти множества не равны, т.е. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

3. Описать следующие множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где A – «множество студентов-социологов «отличников» группы», B – «множество студентов-социологов «хорошистов» группы».

Решение. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ – «множество «отличников» и «хорошистов» группы», $A \setminus B$ – «множество студентов-социологов «отличников» группы», $B \setminus A$ – «множество студентов-социологов «хорошистов» группы».

4. Заштриховать на кругах Эйлера-Венна ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству: **а)** $(A \setminus B) \setminus C$, **б)** $A \cap (B \cup C)$, **в)** $A \cup (B \cap C)$.

Решение.



5. Доказать равенство множеств.

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cup B$ и $A \cup (B \setminus A)$ надо доказать справедливость следующих двух включений:

$A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$ и $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$.

а) Докажем первое включение $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in A \cup B$, тогда, по определению объединения множеств, $x \in A$ или $x \in B$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Если $x \in B$, то тогда возможны два случая: $x \in A$ или $x \notin A$. Первый случай, т. е. $x \in A$, рассмотрен выше. Второй случай, т. е. $x \notin A$, по определению разности множеств означает, что $x \in B \setminus A$. Тогда по свойству объединения, получим $x \in (B \setminus A) \cup A$, а по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$. Пусть $x \in A \cup (B \setminus A)$, тогда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B \setminus A$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup B$.

Если $x \in B \setminus A$, то по свойству разности $x \in B$ и по свойству объединения получим $x \in B \cup A$. Тогда по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

6. Пусть заданы два множества A={1,2}, B={3,4,5}, найти декартовы произведения AXB, AXA, BXA.

Решение. AXB={(1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5)}; AXA={(1,1); (1,2); (2,1); (2,2)}, BXA={(3,1); (3,2); (4,1); (4,2); (5,1); (5,2)}.

7. Социолог исследует способности у 300 студентов. Оказалось, что 120 студентов преуспевают в математике, 90 – в музыке, 80 – в спорте. Кроме того, было обнаружено, что 40 студентов преуспевают как в математике, так и в музыке, 30 – как в музыке, так и в спорте, 40 – как в математике, так и в спорте. И только 10 студентов преуспели сразу в трех областях. Найдите количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей? И сколько студентов вообще не преуспевает ни в одной области?

Решение. Введем следующие обозначения, пусть A – «множество учащихся, преуспевающих в математике», B – «множество учащихся, преуспевающих в музыке», C – «множество учащихся, преуспевающих в спорте» и $\boldsymbol{U}$ – «множество всех студентов». По условию задачи $n(\boldsymbol{U})=300$, $n(A)=120$, $n(B)=90$, $n(C)=80$, $n(A\cap B)=40$, $n(A\cap C)=40$, $n(B\cap C)=30$, $n(A\cap B\cap C)=10$. По предыдущей формуле для числа элементов найдем количество студентов, преуспевающих хотя бы в одной из описанных областей $n(A\cup B\cup C)$:

$n(A\cup B\cup C) = 120+90+80-40-40-30+10=190.$

Таким образом, количество студентов, которые вообще не преуспевает ни в одной области равно: $n(\boldsymbol{U}\backslash(A\cup B\cup C))= 300-190=110$.

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в математике:

$n(A) - n(A\cap B) - n(A\cap C) + n(A\cap B\cap C)= 120 - 40 - 40 + 10 = 50.$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в музыке:

$n(B) - n(A\cap B) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)= 90 - 40 - 30 + 10 = 30.$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в спорте:

$n(C) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)=80 - 40 - 30 + 10 = 20.$

8. Доказать равенство множеств

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \setminus B$ и $A \setminus (A \cap B)$ надо доказать справедливость следующих двух включений:

$$A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B) \text{ и } A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B.$$

а) Докажем первое включение $A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B)$. Пусть $x \in A \setminus B$, тогда по определению разности множеств $x \in A$ и $x \notin B$.

Заметим, что по свойству пересечения множеств так как $A \cap B \subset B$, то по свойству дополнения для включения множеств, из включения $A \cap B \subset B$ следует включение $\overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ или $\boldsymbol{U} \setminus B \subset \boldsymbol{U} \setminus (A \cap B)$, т. е. если $x \notin B$, то $x \notin A \cap B$.

Поэтому из того, что $x \in A$ и $x \notin B$ следует, что $x \in A$ и, в силу замеченного, $x \notin A \cap B$. Следовательно, $x \in A \setminus (A \cap B)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B$. Пусть $x \in A \setminus (A \cap B)$, тогда по определению разности множеств $x \in A$ и $x \notin A \cap B$.

Заметим, что по свойству дополнения от пересечения множеств $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ или $\boldsymbol{U} \setminus (A \cap B) = (\boldsymbol{U} \setminus A) \cup (\boldsymbol{U} \setminus B)$, т. е. если $x \notin A \cap B$, то $x \notin A$ или $x \notin B$.

Поэтому из того, что $x \in A$ и $x \notin A \cap B$, следует, что $x \in A$ и, в силу сделанного замечания $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда отсюда вытекает, во-первых, $x \in A$ и $x \notin A$, что влечет за собой $x \in A$ и $x \in \overline{A}$, а так как по свойству дополнения $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то $x \in \varnothing$, а, во-вторых, $x \in A$ и $x \notin B$, что по определению разности множеств можно записать как $x \in A \setminus B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Выписать все подмножества множества: $A=\{1,\{2,\{3\}\}\}$.

4. Заштриховать ту часть диаграммы, которая соответствует множеству: $C \setminus (B \setminus \overline{A})$.

5. На курсах иностранных языков учатся 600 человек, из них французский изучают 220 человек, английский – 270 человек, причем те, кто изучают английский, не изучают немецкий язык; только французский изучают 100 человек, только немецкий – 180 человек. Сколько человек изучают по два иностранных языка? Сколько человек изучает один иностранный язык?

6. Многие студенты любят футбол, баскетбол и волейбол. А некоторые - даже два или три из этих видов спорта. Была опрошена группа студентов. Известно, что 6 студентов играют только в волейбол, 2 – только в футбол, 5 – только в баскетбол. Только в волейбол и футбол умеют играть 3 студента, в футбол и баскетбол – 4, в волейбол и баскетбол – 2. Один студент умеет играть во все игры, 7 не умеют играть ни в одну игру. Найдите:

1. Сколько всего было опрошено студентов?
2. Сколько человек умеют играть в футбол?
3. Сколько человек умеют играть в волейбол?

7. Каждый из 35 шестиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 человек берут книги в школьной библиотеке, 20 – в районной. Сколько шестиклассников:

1. Являются читателями обеих библиотек;
2. Не являются читателями районной библиотеки;
3. Не являются читателями школьной библиотеки;
4. Являются читателями только районной библиотеки;
5. Являются читателями только школьной библиотеки?

8. В группе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?

9. Докажите, что отношение «быть ровесником» является отношением эквивалентности.

10. Определить, можно ли установить отношение порядка на множестве ответов на вопросы социологической анкеты: Когда Вы или члены Вашей семьи нуждаетесь в лечении, то куда Вы обычно обращаетесь?

1. Только в государственные медицинские учреждения.
2. Только в частные медицинские учреждения.
3. И в государственные, и в частные, в зависимости от того, какое лечение требуется.
4. Не обращаюсь в медицинские учреждения.
5. Затрудняюсь ответить.

11. Пусть заданы два множества A={1,2,3}, B={5,9}, найти декартовы произведения $A\times B$, $A\times A$, $B\times A$.

12. Найдите $A\times B$, если A=[-2,3], B=[1,4].

Занятие № 3. Матрицы, определители. Вычисление определителей второго, третьего порядков.

Примеры решения задач

1. Найдите матрицу *C*=3*A*–4*B*, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. *C*=3*A*–4*B*=$3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}-$
$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 17 & -1 \\ 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу *C*= $4A+2A^T$, если *A*=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $4A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}$, $2A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$,

$C=4A+2A^T=\begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 30 \end{pmatrix}$.

3. Найдите $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 4 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 3\cdot 4 + 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Найдите матрицу X из уравнения $2A+2X=3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. *2X=3B–2A=*

$$= 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -13 & 18 \end{pmatrix}$$

, $X = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -6{,}5 & 9 \end{pmatrix}$.

5. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 2 + 1\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-1) - \left((-1)\cdot 5\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 2\right) =$$

$$= 20 + 12 - 2 - (-15 + 16 + 2) = 27.$$

6. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя данной матрицы воспользуемся свойством: определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю и получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Предприятие производит изделия трёх видов. При этом используется сырьё трёх типов. Нормы затрат сырья на единицу изделия каждого вида, себестоимость каждого вида сырья и стоимость его доставки приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Нормы затрат сырья на единицу изделия каждого вида.

Вид изделия	Тип сырья		
	T_1	T_2	T_3
$И_1$	6	4	2
$И_2$	2	1	0
$И_3$	1	3	5
Себестоимость единицы сырья	4	4	2
Стоимость доставки единицы сырья	1	3	2

Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. изделий первого вида, 70 усл. ед. второго вида и 50 усл. ед. третьего вида?

Решение. Нормы расходов сырья запишем в виде матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. В этой матрице элементы a_{ij} показывают количество сырья j-го типа на изготовление единицы изделия i-го вида. Пусть матрица C показывает цену единицы сырья и доставки единицы сырья: $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Объём производства изделий задаётся матрицей столбцом $Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Чтобы определить общие затраты S на производство изделий данного объема Q, надо знать затраты P на сырьё для производства единицы изделия каждого вида и его доставку. Для этого умножим матрицу расходов A на матрицу C^T, полученную из матрицы C транспонированием. Получим

$$P = A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 12 & 5 \\ 26 & 20 \end{pmatrix}.$$

Тогда суммарные затраты $S = Q^T \cdot P = [100 \quad 70 \quad 50] \cdot \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 12 & 5 \\ 26 & 20 \end{pmatrix} = (6540 \quad 3550)$. Следовательно, общие затраты (это стоимость сырья и его доставки) для осуществления данного объёма производства изделий составят 6540+3550=10090 денежных единиц.

8. Проверить выполняется ли равенство $A\cdot B=B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 \\ 4-5 & 0+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 10-8 & 15+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $A\cdot B\neq B\cdot A$.

9. Найдите A^3, если $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитая из четвертой строки первую, из третьей – удвоенную первую и прибавляя первую строку ко второй, получаем

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, поскольку третий столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\Delta=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки последнего определителя удвоенную вторую и затем разложим полученный определитель по первой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-3\cdot 3=-9\,.$$

Значение определителя равно –9.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$. Вычислить $C=A^2+2B,\ D=3A^T-B^2,\ K=2A^TB^T$.

2. Найдите произведения матриц A и B, где:

a. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 4 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 5\end{pmatrix}$;

b. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & -5\\ 4 & 3 & -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

c. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 0\\ 4 & -7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$;

d. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$;

e. $A=\begin{pmatrix}7\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы A и B. Найдите $A+B,\ A-B,\ AB,\ BA,\ 3A,\ (BA)^T$, $\det A$ и $\det B$.

a. $A=\begin{pmatrix}i & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$;

b. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -i & 0\\ -1 & 0 & i\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

c. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & i\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

d. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 1+i & 0 & 6i \\ 2i & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$.

4. Решить уравнение:

a. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=0$;

b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5+x \end{vmatrix}=0$;

c. $\begin{vmatrix} 2x-2 & 2x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix}=0$;

d. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix}=0$;

e. $\begin{vmatrix} x & x & x \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}=0$.

5. Найдите матрицу X из уравнения $5A–3X=2B$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, у которой по строкам указано количество сырья, расходуемого на производство единицы продукции вида 1 и 2. Стоимость единицы сырья каждого типа заданы матрицей B = [70 30]. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. продукции первого вида и 150 усл. ед. второго вида?

7. Вычислите определители следующих матриц: $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам

a. 4-ой строки;
b. 2-го столбца.

Занятие № 4. Матрицы, определители.

Примеры решения задач

1. Найдите матрицу, обратную к матрице A: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) находим определитель матрицы A:

$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}=14\neq 0$, следовательно, существует A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=-7,\ A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}=-14,\ A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\ A^{-1}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

2) проверяем правильность вычислений, используя равенства $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем равенство $A^{-1}A = E$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу X из уравнения: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулами $A \cdot X = B$, $X = A^{-1} \cdot B$.

1) Сначала найдём определитель матрицы системы

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

2) Найдём эту обратную матрицу A^{-1}:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2,$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3,$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$

Итак $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

3) В итоге найдём искомую матрицу:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

4) Сделаем проверку:
$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=B.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.\end{cases}$$

Решение. Представим систему в матричном виде $AX=B$, где:

Матрица $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$, матрица $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$, матрица $B=\begin{bmatrix}3\\ 11\\ 8\end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A, $\det A = 5 \neq 0$ (проверить самостоятельно), таким образом матрица A – невырожденная и существует обратная матрица A^{-1} вида (проверить самостоятельно):

A^{-1} = 1/5 * $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$.

По формуле $X=A^{-1}B$ найдем матрицу X = 1/5 * $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$* $\begin{bmatrix}3\\ 11\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$.

Таким образом $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, что данные матрицы невырожденные и найдите матрицы, обратные к данным.

a. $A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$;

b. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$;

c. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{bmatrix}$;

d. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

a. $\begin{cases}x_1-x_2=3,\\ x_1+2x_2=6.\end{cases}$

b. $\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2x-y-6z=-1,\\ 3x-2y=8.\end{cases}$

3. Решите матричные уравнения:

a. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-2X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

b. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

c. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

d. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Занятие № 5. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса, Крамера.

Примеры решения задач

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:
$\begin{cases}x+2y+3z=6,\\ 4x+5y+6z=9,\\ 7x+8y=-6.\end{cases}$

Решение. Найдём определитель матрицы системы

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{vmatrix}=27\neq 0.$$

Далее находим следующие определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6&2&3\\9&5&6\\-6&8&0\end{vmatrix}=-54,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&6&3\\4&9&6\\7&-6&0\end{vmatrix}=27,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&6\\4&5&9\\7&8&-6\end{vmatrix}=54.$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-54}{27}=-2;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{27}{27}=1;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{54}{27}=2.$$

2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1,\\x_1-x_3+2x_4=6,\\3x_1-x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\2&-1&3&-2&1\\1&0&-1&2&6\\3&-1&1&-1&0\end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–2), к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–1), а к четвёртому первое уравнение, умноженное на (–3) и получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-3&5&-4&-7\\0&-1&0&1&2\\0&-4&4&-4&-12\end{array}\right).$$

Поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&-3&5&-4&-7\\0&-4&4&-4&-12\end{array}\right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (–3), а к четвёртому второе уравнение, умноженное на (–4)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&1&4\\0&-1&0&1&2\\0&0&5&-7&-13\\0&0&4&-8&-20\end{array}\right).$$

Последнее уравнение разделим на 4: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$.

Поменяем местами третье и четвёртое уравнения системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \end{array}\right).$$

Умножим третье уравнение системы на (–5) и прибавим к четвёртому:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной: $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ -x_2+0x_3+x_4=2, \\ x_3-2x_4=-5, \\ 3x_4=12. \end{cases}$

Найдём поочерёдно неизвестные $\begin{cases} x_4=4, \\ 3x_3=2x_4-5, \\ x_2=x_4-2, \\ x_1=-x_2+x_3-x_4+4. \end{cases}$

Итак, решение системы:

$$\begin{cases} x_4=4, \\ x_3=3, \\ x_2=2, \\ x_1=1. \end{cases}$$

3. Решить следующую систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3=\ 5, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2-\ \ x_3=7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее: первую строку умножаем на (–2) и складываем со второй строкой, далее первую умножаем на (–3) и складываем с третьей строкой, получаем эквивалентную матрицу, в которой работаем со второй и третьей строками:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -8 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 5\\ 0 & -5 & 8 & -13\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases}x_1 + \quad x_2 - 3x_3 = \quad 5,\\ \quad -5x_2 + 8x_3 = -13,\\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \quad 5.\end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, которое не имеет решений.

4. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1,\\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -5,\\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 12,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 8.\end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 2 & -3 & -3 & -1 & -5\\ -1 & 1 & 1 & -2 & 12\\ 2 & -1 & 2 & -10 & 8\end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–2), к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 1, а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–2) и получим матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7\\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13\\ 0 & -3 & -6 & 4 & 6\end{array}\right).$$

Сложим третье и четвертое уравнение системы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7\\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13\\ 0 & -1 & -1 & -5 & 19\end{array}\right).$$

Поменяем второе и четвертое уравнение местами, и второе уравнение разделим на (–1):

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19\\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13\\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7\end{array}\right).$$

Прибавим к третьему и четвертому уравнениям системы второе уравнение, умноженное на (–2) и 5 соответственно, получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & -6 & 38 & -102 \end{array}\right).$$

Прибавим к четвертому уравнению системы третье уравнение, умноженное на 2, получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные: x_1, x_2, x_3 через переменную x_4:

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3-7x_4=1, \\ x_2+x_3+5x_4=-19, \\ 3x_3-19x_4=51. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-(x_2+4x_3-7x_4)+1, \\ x_2=-(x_3+5x_4)-19, \\ x_3=\dfrac{19}{3}x_4+17. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_3 во второе уравнение и найдем x_2:

$$x_2=-19-(x_3+5x_4)=-19-\left(17+\frac{19}{3}x_4+5x_4\right)=-36-\frac{34}{3}x_4.$$

Из первого уравнения находим x_1:

$$x_1=1-(x_2+4x_3-7x_4)=1-\left(-36-\frac{34}{3}x_4+4\cdot\left(17+\frac{19}{3}x_4\right)-7x_4\right)=-31-7x_4$$

Таким образом, общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} -31-7x_4 \\ -36-\dfrac{34}{3}x_4 \\ 17+\dfrac{19}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, где x_4 может принимать любые действительные значения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера и при помощи метода Гаусса:

a. $\begin{cases} x_1-x_2=3, \\ x_1+2x_2=6; \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-y-6z=-1, \\ 3x-2y=8; \end{cases}$

c. $\begin{cases} 9x+2y=3, \\ 7x-2y=13; \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x+9y=2, \\ 6x+7y=10; \end{cases}$

e. $\begin{cases} x+2y-z=4, \\ 2x+y+z=5, \\ x-z=0; \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+y-z=0; \end{cases}$

g. $\begin{cases} -x+2y-z=0, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x+y-3z=1; \end{cases}$

h. $\begin{cases} 4x-y+2z=7, \\ x+y+2z=3, \\ -x+3y-3z=1; \end{cases}$

i. $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x-y+z=4, \\ 3x+2y-3z=5; \end{cases}$

j. $\begin{cases} 3x-2y-z=-1, \\ x+2y+4z=11, \\ 2x+4y-3z=0. \end{cases}$

2. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

a. $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_4=-9, \\ x_1-3x_2+4x_3=-7, \\ 3x_2-2x_3+4x_4=12, \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0; \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x-y+2z=2, \\ 4x-3y+3z=3, \\ x+3y=0, \\ 5x+3z=3. \end{cases}$

3. Решите систему линейных алгебраических уравнений двумя способами (методом Гаусса и методом Крамера):

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4-x_5=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4+2x_5=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22, \\ x_1-2x_2-x_3+x_5=2. \end{cases}$$

4. Предприятие планирует выпуск продукции трех видов наименований X_1, X_2, X_3, на производство которой требуется три вида ресурсов I, II, III. Нормы затрат каждого вида ресурсов на изготовление единицы каждого наименования продукции задаются матрицей A. Найдите допустимый план выпуска продукции (у.е.), если предприятие располагает ресурсами в количестве единиц, заданным матрицей B, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 190 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}$$

5. Иванов, Петров и Сидоров купили три вида продуктов соответственно 2, 5 и 4 кг; 6, 2 и 3 кг; 1, 4 и 7 кг. Иванов уплатил 27 денежных единиц, Петров – 23,5 д. ед. и Сидоров – 34 д. ед. Найдите цены этих продуктов.

Занятие № 6. Основы комбинаторики. Основные принципы комбинаторики. Выбор без повторений. Выбор с повторениями.

Примеры решения задач

1. Студент факультета философии и социальных наук может пересдать экзамен по «Основам высшей математике» либо в конце июня и на это дается ему 3 попытки, либо в январе с помощью двух попыток. Сколько существует попыток, чтобы сдать экзамен по «Основам высшей математике».

Решение. Так как время попыток сдать экзамен различное, то можно воспользоваться правилом суммы. Тогда количество попыток сдать экзамен по «ОВМ», согласно *комбинаторному принципу сложения*, равно 3+2=5.

2. В группе студентов факультета философии и социальных наук 38 студентов. Сколько существует способов выбрать старосту группы и его заместителя.

Решение. Сначала выберем старосту группы, число способов равно 38, так как каждый студент может быть старостой. После этого останется 37 студентов, из которых может быть выбран заместитель старосты. То есть число способов выбора заместителя – 37. По *комбинаторному принципу умножения*, количество способов выбора пары староста и заместитель равно, $38 \cdot 37=1406$.

3. Пусть в магазине имеются 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

Решение. Коробку конфет или коробки печенья можно выбрать согласно принципу сложения 7+5=12 способами. Составить набор из коробки конфет и коробки печенья можно согласно принципу умножения $7 \cdot 5=35$ способами.

4. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова МОСКВА?

Решение. Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или А), а согласную – существует четыре варианта (М, С, К, В). Следовательно, согласно *комбинаторному принципу умножения* гласную и согласную буквы можно выбрать $2 \cdot 4 = 8$ способами.

5. На полке в библиотеке стоят 5 книг по социальной психологии, 20 книг по философии труда и 15 книг по статистике. Сколькими способами студент может выбрать одну книгу?

Решение. Книгу по социальной психологии студент может выбрать 5 способами, книгу по философии труда – 20 способами, а книгу по статистике – 15 способами, тогда по принципу сложения одну книгу можно выбрать $5+20+15=40$ способами.

6. Сколькими способами 7 студенток могут организовать хоровод на студенческом капустнике?

Решение. Для решения отметим одну из девушек, скажем отличницу. Теперь надо указать, где будут располагаться остальные девушки: кто будет первой по кругу от отличницы, кто второй, третьей, …, шестой. Задача свелась к пересчету способов расположения шести оставшихся девушек в последовательность, т.е. речь идет о всех перестановках из n–1 элементов, где n=7. Число таких перестановок равно $P_{n-1} = (n-1)! = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

7. Из группы социологов, играющих в шахматы, состоящей из 25 человек, надо выбрать шахматную команду из четырех человек играющих на I, II, III и IV доске. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как из 25 человек выбираются четверо и порядок важен при распределении их по доскам, то число способов есть число размещений из 25 по 4, т.е.:

$$A_{25}^{4} = 25!/(25-4)! = 25!/21! = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 303600 \text{ способов.}$$

8. Студенту-социологу необходимо пересдать 3 экзамена на протяжении 6 дней. Сколько вариантов теоретически существует для дней сдачи этих экзаменов?

Решение. Искомое число способов равно числу 3–элементных упорядоченных подмножеств, т.е. дней сдачи экзаменов, 6–элементного множества дней. По формуле числа размещений это число равно $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

9. Возьмем буквы А, Б и Р. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы в наборе не повторяются?

Решение. Получатся наборы: БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА и $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ наборов.

10. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

Решение. Выбираем 3 цифры из 7, порядок важен: $A_7^3 = 7!/4! = 5{\cdot}6{\cdot}7 =$ 210 способов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколькими способами 10 студентов могут встать в очередь друг за другом в университетской библиотеке?

2. Верно ли, что если есть материи шести различных цветов, то трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины можно сделать 120 способами?

3. Студенты-социологи изучают в каждом семестре восемь различных дисциплин. Расписание занятий на понедельник состоит из 4 различных дисциплин. Сколько различных расписаний на понедельник может составить методист факультета?

4. Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

5. В книжный магазин привезли новых 20 книг, из них по философии – 5, по социологии – 8, по высшей математике – 4 и по психологии – 3. Сколькими способами можно составить набор для университетской библиотеке, чтобы в него входило 3 книги по философии, 5 по социологии, 3 по высшей математике и 2 по психологии?

6. Сколькими способами можно составить расписание из четырех различных дисциплин на один день, если имеется 10 дисциплин и одна из них – физическая культура, должна быть последней?

7. Сколькими способами 3 награды (за I, II, III места) могут быть распределены между 10 участниками математической олимпиады?

8. Возьмем буквы О, Е и Я. Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если буквы в наборе не повторяются?

9. В конкурсе участвовало 8 фирм, трем из которых жюри должно присудить 1-е, 2-е и 3-е места. Сколько вариантов решения жюри существует?

10. Перед выпуском группа студентов-социологов, состоящая из 19 человек, обменялась фотографиями. Сколько всего фотографий было роздано?

11. Для проведения социологического опроса социологу необходимо выбрать 4 группы студентов выпускных курсов, имеющих гуманитарное направление обучения. Он подобрал 8 одинаково подходящих групп. Сколько существует способов отбора 4 группы из 8 в случайном порядке?

12. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если каждая цифра входит в запись числа только один раз?

Занятие № 7. Использование комбинаторных методов для обработки и анализа социологических данных.

Примеры решения задач

1. Возьмем следующие плоды: банан (Б), ананас (А) и киви (К). Какие сочетания из этих плодов, взятых по два, можно составить любителю экзотических фруктов и сколько всего таких наборов получится?

Решение. Получатся следующие наборы: БА ("банан, ананас" и "ананас, банан" – один и тот же набор), АК и КБ. Всего по формуле числа сочетаний получим $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2!}$=3 набора.

2. На факультете философии и социальных наук в танцевальном кружке занимается 10 человек, в кружке художественного слова – 15 человек, в вокальном –12 человек и в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить студенческую бригаду художественной самодеятельности из 4 чтецов, 3 танцоров, 5 певцов и одного фотографа?

Решение. Разобьем задачу на подзадачи.

1. Сначала найдем, сколькими способами можно выбрать чтецов: при выборе 4 чтецов из 15 порядок не важен, т.е. используем правило сочетаний

$$C_{15}^4 = 15!/ (4!\cdot 11!) = (12\cdot 13\cdot 14\cdot 15)/(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)=1365$$

2. Найдем, сколькими способами можно выбрать танцоров: при выборе 3 танцоров из 10 порядок не важен, т.е. используем правило сочетаний

$$C_{10}^3 = 10!/(3!\ 7!) = (8\cdot 9\cdot 10)/(1\cdot 2\cdot 3) = 120$$

3. Выбираем певцов: используем правило сочетаний 5 из 12

$$C_{12}^5 = 12!/(5!\ 7!) = (8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12)/(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) = 792$$

4. Выбираем фотографа: используем правило сочетаний 1 из 20

$$C_{20}^1 = 20!/(1!\cdot 19!) = 20.$$

Поскольку выбор производится по всем четырем позициям, а не по одной, применяем комбинаторный принцип умножения: $C_{15}^4 \cdot C_{10}^3 \cdot C_{12}^5 \cdot C_{20}^1$ =2594592000 способами.

3. В студенческой группе 12 девушек и 16 юношей. Сколькими способами можно выбрать двух студентов одного пола?

Решение. Можно выбрать двух девушек или двух юношей. 2 девушки из 12 можно выбрать C_{12}^2 способами, C_{12}^2 = 12!/(2!·10!) = (11·12)/2 = 66, а 2 юноша из 16 – C_{16}^2 способами, C_{16}^2 = 16!/(2!·14!) = 120. Применяя комбинаторный принцип сложения, так выбираем девушку или юношу получаем: $C_{12}^2 + C_{16}^2$ =66+120=186.

4. В книжном магазине в гуманитарном отделе продают 9 книг зарубежных авторов по философии и 7 книг российских авторов по философии. Сколькими способами можно выбрать: а) 3 книги по философии; **б**) 6 книг по философии зарубежных авторов или российских; **в**) 4 книги зарубежных авторов и 3 книги российских авторов?

Решение. а) так как не указано книги каких авторов нужно выбирать, то выбрать 3 книги из 16 можно C_{16}^3 способами. Получаем,

$$C_{16}^3 = 16!/(3!\cdot 13!) = (14\cdot 15\cdot 16)/(1\cdot 2\cdot 3) = 560 \text{ способами.}$$

б) выбрать 6 книг зарубежных авторов можно C_9^6 = 84 способами, а 6 книг российских авторов C_7^6 = 7 способами. По комбинаторному принципу сложения выбрать 6 книг по философии зарубежных авторов или российских авторов можно $C_9^6+C_7^6$ = 84+7=91 способом.

в) выбрать 4 книги зарубежных авторов из 9 можно C_9^4 способами, а 3 книги российских авторов из 7 можно C_7^3 способами. Поэтому набор из 4 книг зарубежных авторов и 3 книг российских авторов можно составить по комбинаторному принципу умножения $C_9^6 \cdot C_7^3$ = 9!/(4! ·5!) ·(7!/(3! ·4!) = 4410 способами.

5. В группе студентов-социологов 17 девушек и 3 юноши. Выбирают по жребию трех человек в оргкомитет «Дня социолога». Сколько существует способов выбрать 2 девушек и 1 юношу?

Решение. Две девушки из 17 девушек можно выбрать C_{17}^2 способами, а 1 юношу из 3 юношей можно выбрать C_3^1 способами. Тогда по комбинаторному принципу умножения 2 девушки и 1 юношу можно выбрать $C_{17}^2 \cdot C_3^1$ = 17!/(2! ·15!) ·3!/(1! ·2!) = ((16·17)/2) ·3 = 8·17·3 = 408 способами.

Задачи для самостоятельного решения

1. Колода состоит из 36 карт. Сколько всего существует способов извлечь одну даму и двух королей, без учета их масти?

2. Для проведения социологического опроса социологу необходимо выбрать 4 группы студентов выпускных курсов, имеющих гуманитарное направление обучения. Он подобрал 8 одинаково подходящих групп. Сколько существует способов отбора 4 группы из 8 в случайном порядке?

3. В лотерее «Спортлото» игрок должен зачеркнуть 6 из 49 возможных чисел от 1 до 49. Сколько существует всевозможных вариантов выбора для игрока?

4. Фирма нуждается в организации 4 новых складов. Её сотрудники подобрали 8 одинаково удобных помещений. Сколько существует способов отбора 4 помещений из 8 в случайном порядке?

5. Правление коммерческого банка выбирает из 8-ми кандидатов три человека на различные должности (все 8 кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать?

6. Из 10 мужчин и 8 женщин набирают состав работников фирмы. Требуется 6 человек, из них 4 мужчин и 2 женщины. Сколькими способами можно выбрать такой состав сотрудников?

Занятие № 8. Вероятность случайного события. Классическая формула вычисления вероятности. Вероятностное истолкование результатов социологических исследований.

Примеры решения задач

1. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события A –

«извлечен шар белого цвета»; B – «извлечен шар красного цвета»; C – «извлечен шар черного цвета». Что представляют собой события: $A+B$, $\overline{A+C}$, AB, $AC+B$?

Решение. Событие $A+B$ – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B. Следовательно, $A+B$ – «извлечен шар белого или красного цвета». Так как событие $A+C$ – «извлечен шар белого или черного цвета», то событие $\overline{A+C}$ – это событие, противоположное событию $A+C$, т.е. $\overline{A+C}$ – «извлечен шар ни белого и ни черного цвета», а значит он «красного цвета». Событие AB – невозможное событие, поскольку шар одновременно не может быть белого и красного цвета. Событие $AC+B$ – это сумма невозможного события AC и события B, равная событию B, т.е. $AC+B$ – «извлечен шар красного цвета».

2. Некоторые клиенты банка приходят в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 4 человека. Что собой представляют события – брать проценты будут: а) четыре человека; б) три человека; в) два человека; г) один человек; д) хотя бы два человека; е) хотя бы один человек.

Решение. Обозначим события:

A_1 – «первый клиент пришел брать проценты»;

A_2 – «второй клиент пришел брать проценты»;

A_3 – «третий клиент пришел брать проценты»;

A_4 – «четвертый клиент пришел брать проценты».

Тогда противоположными для каждого из них будут события:

$\overline{A_1}$ – «первый клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_2}$ – «второй клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_3}$ – «третий клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_4}$ – «четвертый клиент не будет брать проценты».

Обозначим также события:

B – «пришли брать проценты с вклада четыре человека», тогда $B = A_1A_2A_3A_4$;

C – «пришли брать проценты с вклада три человека», тогда $C = A_1A_2A_3\overline{A_4} + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4$;

D – «пришли брать проценты с вклада два человека», тогда $D = A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4$;

E – «пришел брать проценты с вклада один человек» $E = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$;

F– «хотя бы два человека пришли брать проценты с вклада». Событие F означает также, что пришли брать процент с вклада либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. $F = D+C+B$.

H– «хотя бы один человек пришел брать проценты с вклада». Событие H означает также, что пришли брать процент с вклада либо один, либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. $H = B+C+D+E$ или $H = F+E$.

3. На трех одинаковых карточках написаны буквы И, М, Р. Карточки тщательно перемешивают, наудачу извлекают три карточки и выкладывают их в порядке появления. Найдите вероятность того, что составится слово МИР.

Решение. Обозначим через A событие, которое состоит в том, что в результате извлечения карточек получится слово МИР. У данного опыта шесть равновозможных исходов: «получено слово ИМР», «получено слово ИРМ», «получено слово МИР», «получено слово МРИ», «получено слово РМИ», «получено слово РИМ». Из них только одно событие благоприятствует событию A. Следовательно, число n=6, число m=1. Вычисляем $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$.

4. Какова вероятность появления слова ДВА, если наугад выбираются 3 карточки из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д и располагаются в ряд в порядке появления?

Решение. Число всех исходов испытания состоит в выборе трёх букв из имеющихся пяти, при этом важен порядок появления букв, поэтому по формуле для числа размещений их всего $A_5^3=\frac{5!}{2!}=3\cdot4\cdot5=60$. Благоприятный исход для появления слова ДВА всего один исход.

Следовательно, искомая вероятность равна $P(A)=\frac{1}{A_5^3}=\frac{1}{60}\approx 0{,}02$.

5. Для участия в лотерее на карточке, содержащей 49 чисел, нужно отметить 6 чисел. Затем эти числа сверяются с 6 числами, отобранными случайным образом. В зависимости от числа совпавших номеров выплачивается выигрыш. Какова вероятность угадать в лотерее 6 чисел из 49?

Решение. Число всех элементарных исходов это число всех сочетаний из 49 чисел по 6. Столько существует различных вариантов заполнения карточки, и каждый из них имеет одинаковый шанс стать выигрышным. Благоприятствует выигрышу только одно событие: «номер на карточке совпал с отобранным номером». Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{C_{49}^6}=\frac{1}{14000000}$

6. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4?

Решение. A – «из 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4». Чтобы определить $P(A)$, надо воспользоваться формулой $P(A)=\frac{m}{n}$.

Опыт состоит в извлечении 5 деталей из 10 имеющихся, значит общее число n возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 5 элементов из 10, т.е. $n=C_{10}^5$.

Определим число m исходов, благоприятствующих событию A. Четыре стандартные детали из 8 стандартных можно извлечь $m_1 = C_8^4$ способами. Оставшиеся детали выборки должны быть нестандартными, их будет 5–4=1, тогда 1 нестандартная деталь из имеющихся 10–8=2 может быть извлечена $m_2 = C_2^1$ способами. Тогда, согласно правилу произведения, число m благоприятствующих исходов равно: $m = m_1 \cdot m_2 = C_8^4 \cdot C_2^1$.

Искомая вероятность равна отношению числа m исходов, благоприятствующих данному событию, к числу n всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_8^4 \cdot C_2^1}{C_{10}^5} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} : \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56 .$$

7. На полке стоит 10 книг, из них 6 книг по высшей математике и 4 книги по социологии. Какова вероятность взять книгу по высшей математике, если наудачу берется только одна книга?

Решение. В этой задаче $n = 10$ – это число всех равновозможных исходов испытания, а именно количество книг, а $m = 6$ – это число исходов, благоприятствующих событию A – «выбрана книга по высшей математике». Поэтому по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

8. Брошены 2 игральные кости. Найдите вероятность следующих событий: **а)** сумма выпавших очков равна 7; **б)** сумма выпавших очков равна 8, а разность 4.

Решение. Для случая **а)** $n = 36$, так как число равновозможных исходов испытания состоит из числа различных комбинаций очков на одной и второй игральных костях. Для первой кости возможны 6 вариантов от 1 до 6, для второй аналогично 6 вариантов, следовательно, для первой и второй костей, согласно комбинаторному принципу умножения будет 36 исходов. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 7, состоит из следующих вариантов: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), т. е. $m = 6$, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Для случая **б)** как и в случае **а)** $n = 36$. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 8, а разность 4, состоит из следующих двух вариантов: (2, 6), (6, 2), т. е. $m = 2$, и поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

9. Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу вытаскивается 6 карт. Какова вероятность того, что среди вытянутых карт окажется 1 король и 2 дамы?

Решение. Для решения этой задачи можно применить *общую схему задачи о выборке*. Общее число всех исходов события A – «среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы» равно числу сочетаний C_{36}^{6}. Вытянуть 1 короля из 4 королей, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4 дам, соответственно C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из 36 – 4 – 4 = 28 карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^{3} способами. Таким образом, согласно *комбинаторному принципу умножения*, число благоприятных исходов для события A равно произведению $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{28}^3}{C_{36}^6} = \left(\frac{4}{1!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3!}\right) / \left(\frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{6!}\right) \approx 0{,}04.$$

10. Из урны с шарами, на которых написаны буквы, составляющие слово ФИЛОСОФИЯ, выбирают наугад последовательно 4 шара и выкладывают один за другим в порядке их появления. Какова вероятность того, что при этом получится слово СОЛО?

Решение. Число всех равновозможных исходов этого испытания – это число всех 4-х буквенных «слов», составленных из 9 «растождествленных» букв $Ф_1$, $Ф_2$, $И_1$, $И_2$ $Л_1$, $О_1$, $О_2$, $С_1$, $Я_1$, число которых равно числу размещений $A_9^4 = \frac{9!}{5!}$ = 6·7·8·9 = 3024. Число благоприятных исходов составления слова СОЛО равно числу $A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1$ = 2, где A_1^1 = 1 – это число размещений для букв С и Л, и A_2^1 = 2 – это число размещений для двух из двух букв О. Следовательно искомая вероятность равна

$$P(A)= \frac{A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_2^1}{A_4^9} = \frac{2}{3024} = \frac{1}{1512}.$$

Это вариант задачи об «упорядоченной» выборке.

Задачи для самостоятельного решения

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

2. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 7 или 8 очков?

3. Подбрасываются 3 симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах монет выпало 2 герба?

4. В урне имеется 7 черных и несколько белых шаров. Какова вероятность вытащить белый шар, если вероятность вытащить черный шар равна 1/6. Сколько белых шаров в урне?

5. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найдите вероятность следующих событий:

A – «в полученной выборке все карты бубновой масти»;

B – «среди выбранных 4 карт окажутся 2 туза»;

C – «среди выбранных 4 карт окажется бубновый туз».

6. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу извлекают 6 шаров. Какова вероятность того, что извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

7. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с отрезными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «море»?

8. Из 30 экзаменационных билетов по дисциплине «Социология» студент может ответить на 24 билета. Какова вероятность его успешного ответа на экзамене при однократном извлечении билета?

9. Студент из 30 вопросов к экзамену по дисциплине «Основы высшей математики» хорошо усвоил 24 вопроса. Какова вероятность того, что студент знает оба из доставшихся ему вопросов при ответе на экзамене?

10. На 9 вакантных мест по определенной специальности претендуют 15 безработных, из них 7 женщин, остальные мужчины, состоящих на учете в службе занятости. Какова вероятность того, что из 9 случайно отобранных безработных окажется 5 женщин?

11. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найдите вероятности: а) при бросании трех игральных костей выбросить сумму очков равную 11; б) при бросании трех игральных костей выбросить сумму очков равную 12.

12. В урне 15 шаров, из них 5 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны наудачу извлекают шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар будет зеленым?

13. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе все цифры будут одинаковые?

14. Участник лотереи «Спортлото» из 36 видов спорта должен назвать пять видов спорта. Какова вероятность того, что будет угадано три вида спорта?

15. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются 4 карты. Найдите вероятность того, что среди извлечённых карт окажется 2 туза.

Занятие № 9. Основные теоремы теории вероятностей. Теоремы сложения вероятностей. Независимые события, условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.

Примеры решения задач

1. В урне 15 голубых, 10 зеленых и 25 белых шаров. Найдите вероятность того, что из урны наугад будет извлечен цветной шар.

Решение. Извлечение цветного шара означает появление либо голубого, либо зеленого шара. Пусть событие A означает «появление голубого шара», B – «появление зеленого шара». Тогда

$$P(A) = \frac{15}{15+10+25} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{10}{15+10+25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

Так как события A и B несовместны, то по теореме сложения вероятностей двух несовместных событий имеем:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}.$$

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?

Решение. Пусть событие A – «выпадение 6 на первой кости», событие B – «выпадение 6 на второй кости». Очевидно, что $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$, $P(AB)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$, поэтому по теореме сложения вероятностей двух событий имеем:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

3. Студент первого курса факультета философии и социальных наук выучил 10 вопросов из 30 по курсу «Основы высшей математики». Каждый билет состоит из трех вопросов, распределенных случайным образом. Найдите вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета.

Решение. Рассмотрим событие A – «студент ответит хотя бы на один вопрос из билета». Тогда противоположное ему событие $\overline{A}$ – «студент не ответит ни на один вопрос из билета», и выполняется равенство $P(A)+P(\overline{A})=1.$ Так как порядок вопросов в билетах несущественен, то общее количество исходов такого испытания равно количеству способов выбора трех вопросов из всех 30 вопросов, т. е. $n=C_{30}^3$. Поскольку студент выучил 10 вопросов по курсу «Основы высшей математики», то $30-10=20$ вопросов остались невыученными. Значит, количество благоприятствующих исходов для события $\overline{A}$ равно числу способов выбора трех вопросов из 20 вопросов, невыученных студентом, т. е. $m=C_{20}^3$. Поэтому по формуле классической вероятности имеем

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_{20}^3}{C_{30}^3}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}\cdot\frac{3!\cdot 27!}{30!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{30\cdot 29\cdot 28}=\frac{19\cdot 3}{29\cdot 7}=\frac{57}{203}.$$

Следовательно, вероятность того, что студент ответит хотя бы на один вопрос из вытянутого наугад билета, равна $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{57}{203}=\frac{146}{203}.$

4. Тридцать экзаменационных билетов по курсу «Основы высшей математики» пронумерованы числами от 1 до 30. Билеты тщательно перемешаны. Какова вероятность вытянуть наудачу студенту–социологу билет с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: A – «вытянут билет с четным номером», событие B – «вытянут билет с номером, кратным 3», событие AB – «вытянут билет с четным номером, кратным 3». Найдем вероятность искомого события $A+B$. Поскольку события A и B – это совместные события, то вероятность события $A+B$ находим по теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Событию A благоприятствуют 15 исходов, событию B – всего 10 исходов, а событию AB – только 5 исходов. Поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) = \frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}=0{,}667.$$

5. Из урны, в которой 10 черных и 5 белых шаров вынимают 2 шара. Чему равна вероятность того, что а) оба шара черные; б) оба шара белые; в) шары разного цвета?

Решение. Пусть событие A_1 – «первый шар черный», A_2 – «второй шар черный», B_1 – «первый шар белый», B_2 – «второй шар белый». Тогда

$$P(A_1)=\frac{10}{10+5}=\frac{2}{3};\; P(B_1)=\frac{5}{10+5}=\frac{1}{3}.$$

Найдем условные вероятности:

$P(A_2|A_1)=\frac{10-1}{15-1}=\frac{9}{14}$. (второй шар был черным, если первый был черным);

$P(B_2|B_1)=\frac{5-1}{15-1}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$. (второй шар был белым, если первый был белым);

$P(A_2|B_1)=\frac{10}{15-1}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$. (второй шар был черным, если первый был белым);

$P(B_2|A_1)=\frac{5}{15-1}=\frac{5}{14}$. (второй шар был белым, если первый был черным).

Отсюда находим искомые вероятности:

а) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{9}{14}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{7}$;

б) $P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{21}$;

в) $P(A_1B_2+B_1A_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{14}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$.

6. Вероятность попадания каждого из трех стрелков соответственно равна: 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найдите вероятность: а) только одного попадания; б) ровно двух попаданий; в) хотя бы одного попадания.

Решение.

Пусть A_i – «попадание в мишень при i-м выстреле», $\overline{A_i}$ – «непопадание в мишень при i-м выстреле» $i=1,2,3$.

Т.к. $P(A_1)=0{,}8$; $P(A_2)=0{,}7$; $P(A_3)=0{,}9$, то $P(\overline{A}_1)=1-0{,}8=0{,}2$; $P(\overline{A}_2)=1-0{,}7=0{,}3$; $P(\overline{A}_3)=1-0{,}9=0{,}1$.

а) Обозначим событие A – «ровно одно попадание в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом выстреле, промахи при втором и третьем; попадание при втором, промахи при первом и третьем; попадание при третьем, промахи при первом и втором. Тогда

$$A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

Учитывая, что события $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$; $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует:

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) =$$

$$= 0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1 + 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9 = 0{,}092\,.$$

б) Обозначим событие B – «ровно два попадания в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом и втором выстрелах, промах при третьем; попадание при первом и третьем, промах при втором; попадание при втором и третьем, промах при первом. Тогда

$$B = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$$

Учитывая, что $A_1A_2\overline{A_3}$, $A_1\overline{A_2}A_3$, $\overline{A_1}A_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(B) = P(A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3)$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1 + 0{,}8\cdot 0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9 = 0{,}398\,.$$

в) Обозначим событие C – «ровно три попадания в мишень»; событие D – «хотя бы одно попадание в мишень», тогда $D=A+B+C$.

Найдем вероятность события $C = A_1A_2A_3$, $P(C) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9 = 0{,}504$.

Получаем

$$P(D) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}092 + 0{,}398 + 0{,}504 = 0{,}994.$$

Так как попадания каждого стрелка независимые в совокупности события, то вероятность события D можем найти:

$$P(D) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}994\,.$$

7. В определенной ситуации вероятность выигрыша на бирже в течение дня равна 0,3. Какие варианты событий возможны при биржевой игре в той же ситуации в течение двух дней.

Решение. Введем обозначение событий: A_1 – «первый день выигрышный», A_2 – «второй день выигрышный». Вероятности проигрышей соответственно равны:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7\,,$$

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7\,.$$

Возможные следующие варианты событий:

1) оба дня выигрыш $P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$;

2) оба дня проигрыш $P(A) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$;

3) первый день выигрыш, второй – проигрыш $P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2}) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$;

4) первый день проигрыш, второй – выигрыш $P(A) = P(\overline{A_1})P(A_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.

Эти события образуют полную группу. Вероятность полной группы событий равна $0{,}09 + 0{,}49 + 0{,}21 + 0{,}21 = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование, у 357 – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное образование, или высшее образование, или то и другое?

2. Из 20 изделий первого сорта и 10 второго сорта, имеющихся на складе наугад взято 2 изделия. Найдите вероятность того, что оба эти изделия: а) первого сорта; б) второго сорта.

3. На стеллажах библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет три учебника. Найдите вероятность того, что все они будут в переплете.

4. В урне 6 белых, 4 черных и 2 красных шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найдите вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный шар и при третьем – красный шар.

5. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из 3 центральных телеканалов, равна 0,05. Предполагается, что эти события – независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем трем каналам; б) по одному каналу?

6. Студент знает 20 вопросов из 25 вопросов программы дисциплины «Основы высшей математики». Найдите вероятность того, что студент знает предложенные экзаменатором три вопроса.

7. Покупатель может приобрести акции 2 компаний *A* и *B*. Надежность 1-й оценивается экспертами на уровне 90%, а второй – 80%. Чему равна вероятность того, что обе компании в течении года не станут банкротами.

8. В студенческой группе из 20 человек 5 отличников. Наудачу по списку выбирают двух человек. Чему равна вероятность того, что:

a) оба студента отличники;

b) оба студента не отличники.

9. В городе имеется 3 коммерческих банка. Вероятности того, что банки обанкротятся в течение года соответственно равны 0,1; 0,2; 0,05. Найдите вероятности того, что в течение года обанкротятся

a) ровно два банка;

b) ровно один банк;
c) все три банка;
d) ни одного банка;
e) хотя бы один банк.

10. Подбрасывают две симметричные монеты. Какова вероятность того, что выпадут две цифры?

11. В отделе работают 10 человек, среди них 7 мужчин. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Какова вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами?

12. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,5. Найти вероятность того, что: а) только один стрелок попадёт в мишень; б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Занятие № 10. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Примеры решения задач

1. На фабрике на машинах a, b, c производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие фабрики дефектно?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранное изделие дефектно, и пусть H_1, H_2, H_3 – события, состоящие в том, что изделие произведено на машинах a, b, c соответственно. Очевидно, события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий.

По условию $P(H_1)=0{,}25$; $P(H_2)=0{,}35$; $P(H_3)=0{,}40$. Аналогично, $P(A|H_1)=0{,}05$; $P(A|H_2)=0{,}04$; $P(A|H_3)=0{,}02$ являются условными вероятностями события A при выполнении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно.

Применив формулу полной вероятности, найдем:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}35\cdot 0{,}04+0{,}40\cdot 0{,}02=0{,}0345.$$

2. Пусть выполнены условия задачи **1** и пусть известно, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Какова вероятность того, что оно было сделано на машинах a, b, c соответственно?

Решение. Пусть A, H_1, H_2, H_3 означает то же, что и в задаче **1**. Тогда задача состоит в нахождении условных вероятностей гипотез H_1, H_2, H_3 при условии, что событие A уже произошло. По условию $P(H_1)=0{,}25$; $P(H_2)=0{,}35$; $P(H_3)=0{,}40$. Аналогично, $P(A|H_1)=0{,}05$; $P(A|H_2)=0{,}04$; $P(A|H_3)=0{,}02$.

В задаче **1** найдено:

$P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=0{,}0345.$

Применяя формулу Байеса, имеем

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345}=\frac{25}{69}.$$

Аналогично получаем $P(H_2|A)=\frac{28}{69}$, $P(H_3|A)=\frac{16}{69}$.

3. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах, причем деталей первого завода 80 %, а второго – 20 % от общего количества. Вероятность брака на первом заводе равна 0,05, на втором заводе – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Пусть гипотеза H_1 – «взятая деталь изготовлена первым заводом», гипотеза H_2 – «взятая деталь изготовлена вторым заводом», событие A – «взятая деталь оказалась бракованной». Тогда согласно условию задачи $P(H_1)=0{,}8$; $P(H_2)=0{,}2$; $P(A|H_1)=0{,}05$; $P(A|H_2)=0{,}01$.

Вероятность того, что деталь бракованная, равна

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}8\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}01=0{,}042.$$

Вероятность того, что бракованная деталь изготовлена первым заводом, такова:

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)} = 0{,}952.$$

4. На город примерно 165 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году – с запада (считается, что год не високосный и с других направлений ветер дуть не может). Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе – в последний день каждой недели. Определить, как часто город подвергается воздействию вредных выбросов. Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Решение. Пусть событие H_1 – «ветер дует с севера», событие H_2 – «ветер дует с запада», событие A – «город подвергается воздействию вредных выбросов». Тогда согласно условию задачи

$$P(H_1)=\frac{165}{365}=\frac{33}{73},\quad P(H_2)=\frac{200}{365}=\frac{40}{73},\quad P(A|H_1)=\frac{1}{3},\quad P(A|H_2)=\frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{33}{73}\cdot\frac{1}{3}+\frac{40}{73}\cdot\frac{1}{7}\approx 0{,}23.$$

Таким образом, около двух месяцев в году город накрыт промышленным смогом.

Задачи для самостоятельного решения

1. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продажи участка составит 0,5. Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью, равной 0,7 экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев?

2. Судоходная компания организует средиземноморские круизы в течение летнего времени и проводит несколько круизов в сезон. Эксперт по туризму, нанятый компанией, предсказывает, что вероятность того, что корабль будет полон в течение сезона, будет равна 0,92, если доллар не подорожает по отношению к рублю, и с вероятностью – 0,75, если доллар подорожает. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,23. Чему равна вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы?

3. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 0,8. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 0,95, а отрицательные – с вероятностью 0,99. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

4. Среди студентов института – 30% первокурсники, 35% студентов учатся на 2-м курсе, на 3-м и 4-м курсе их 20% и 15% соответственно. По данным деканата известно, что на первом курсе 20% студентов сдали сессию только на отличные оценки, на 2-м курсе – 30%, на 3-м курсе – 35%, на 4-м курсе – 40% отличников. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Чему равна вероятность того, что он (или она) – третьекурсник?

5. Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60% – местные авиалинии, 30% – авиалинии по СНГ и 10% – международные авиалинии. Среди пассажиров местных авиалиний 50% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 60%, на международных – 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один пассажир. Чему равна вероятность того, что он: а) бизнесмен; б) прибыл из стран СНГ по делам бизнеса; в) прилетел местным рейсом по делам бизнеса; г) прибывший международным рейсом бизнесмен?

6. Известно, что в некоторой социальной группе 30% молодых людей, 45% людей среднего возраста и 25% пожилых. Известно, что из числа молодых некоторый товар покупают 30%; процент для людей среднего 15% и пожилого возраста 10%. Из этой группы в ходе анкетного опроса случайным образом выбирается человек. Найдите вероятность того, что этот человек покупает данный товар. Найдите вероятность того, что человек, забывший указать свой возраст, но указавший, что он не покупает данный товар, является человеком среднего возраста.

7. Число государственных банков, имеющихся в городе, относится к числу коммерческих банков как 3:2. Вероятность того, что клиент обратится в коммерческий банк равна 0,2; а того, что он обратится в государственный банк равна 0,1. Клиент обращается в банк. Найдите вероятность того, что это государственный банк.

8. По статистике турист, прибывший накануне на автобусе, поезде или самолете, заказывает утренний экскурсионный тур с вероятностями 0,2, 0,4 и 0,7 соответственно. Найдите вероятность того, что прибывший в отель турист закажет тур, если автобусом приезжает 55%, поездом – 30%, а самолетом – 15% постояльцев.

9. На горнолыжном курорте фуникулер оборудован тремя независимыми предохранительными системами с надежностью срабатывания 0,95, 0,93 и 0,9 соответственно. Известно, что в результате перепада напряжения в сети, сработала одна из них. Найдите вероятность того, что не сработала третья система.

10. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы прибора в течение смены для каждого узла 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найдите вероятность того, что за смену откажут: а) два узла; б) не менее трех узлов; в) по крайней мере один узел.

Занятие № 11. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона.

Примеры решения задач

1. Найдите вероятность того, что при десятикратном бросании монеты «орел» выпадет ровно 5 раз.

Решение. В данном случае $p = q = \dfrac{1}{2},\ n = 10,\ m = 5.$ Отсюда находим

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0,246.$$

2. В результате наблюдений на некоторой реке установлено, что в течение 20 лет имело место четыре случая пересыхания реки. Найдите вероятность того, что за двадцатилетний период будет наблюдаться:

1. от трех до пяти случаев пересыхания реки (включительно);
2. не более пяти случаев пересыхания реки;
3. более пяти случаев пересыхания реки.

Решение. Вероятность того, что за 20 лет произойдет m случаев пересыхания реки $(0 \le m \le 20)$ равна $P_{20}(m) = C_{20}^{m} p^{m} q^{20-m},$ где $p = \dfrac{4}{20} = 0,2,\ q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8.$

Тогда искомая вероятность составит

1) $P_{20}(3) + P_{20}(4) + P_{20}(5) =$

$= C_{20}^{3} \cdot 0,2^{3} \cdot 0,8^{17} + C_{20}^{4} \cdot 0,2^{4} \cdot 0,8^{16} + C_{20}^{5} \cdot 0,2^{5} \cdot 0,8^{15} \approx$

$\approx 0,2054 + 0,2182 + 0,1746 = 0,5982.$

2) $P(m \le 5) = \sum_{m=0}^{5} P_{20}(m) = C_{20}^{0} \cdot 0,2^{0} \cdot 0,8^{20} + C_{20}^{1} \cdot 0,2^{1} \cdot 0,8^{19} +$

$+ C_{20}^{2} \cdot 0,2^{2} \cdot 0,8^{18} + C_{20}^{3} \cdot 0,2^{3} \cdot 0,8^{17} + C_{20}^{4} \cdot 0,2^{4} \cdot 0,8^{16} + C_{20}^{5} \cdot 0,2^{5} \cdot 0,8^{15} \approx$

$\approx 0,0115 + 0,0576 + 0,1369 + 0,2054 + 0,2182 + 0,1746 = 0,8042.$

3) $P(m > 5) = 1 - P(m \le 5) = 1 - 0,8042 = 0,1958.$

3. Монета бросается 5 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет: а) два раза; б) менее двух раз; в) не менее двух раз; г) более двух раз.

Решение. Обозначим через A событие – «при однократном бросании монеты выпал герб». Тогда противоположным событием $\overline{A}$ будет событие – «выпала цифра», при этом считаем, что монета симметрична, поэтому $P = P(A) = \frac{1}{2}$ и $q = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$. Монета при неизменных условиях бросается пять раз. Вероятность появления герба в каждом единичном испытании постоянна и равна $\frac{1}{2}$, поэтому здесь применима формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)} p^m q^{n-m}.$$

а) при пяти бросках герб выпал два раза:

$$n = 5,\ m = 2,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

$$P_5(2) = \frac{5}{16}.$$

б) событие B – «при пяти бросках монеты герб выпадает менее двух раз» – означает, что герб или выпадает один раз или вообще не выпадает. Поэтому $P(B) = P_5(1) + P_5(0)$.

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5!}{1!\cdot 4!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32},$$

$$P(B) = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

в) событие C – «при пяти подбрасываниях монеты герб выпал не менее двух раз» – означает, что герб выпал или два раза, или три раза, или четыре раза, или пять раз. Потому $P(C) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Противоположное ему событие $\overline{C}$ означает, что герб выпал менее двух раз, а это событие B. Тогда

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-(P_5(0)+P_5(1))=1-P(B)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16},\ P(C)=\frac{13}{16}.$$

г) событие D – «при пяти подбрасываниях монеты герб выпал более двух раз» – означает, что герб выпал либо три, либо четыре, либо пять раз. Тогда $P(D)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$. Противоположным событию D – будет событие $\overline{D}$ – «герб выпал не более двух раз». $P(\overline{D})=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)$. А так как эти вероятности нам уже известны, то $P(D)$ можно найти, используя вероятность события $\overline{D}$:

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-(P_5(0)+P_5(1)+P_5(2))=1-\frac{1}{32}-\frac{5}{32}-\frac{10}{32}=$$

$$=1-\frac{16}{32}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ P(D)=\frac{1}{2}.$$

4. Для того чтобы проверить точность своих финансовых счетов, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских проводок счетов. Служащие компании при обработке входящих счетов допускают примерно 5% ошибок. Аудитор случайно отбирает 20 входящих документов. Найдите наивероятнейшее число документов, в которых будет обнаружена ошибка.

Решение. По условию $n=20,\ p=0{,}05,\ q=0{,}95$. Найдем наивероятнейшее число m_0 из двойного неравенства:

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Подставим данные задачи:

$$20\cdot 0{,}05-0{,}95\le m_0\le 20\cdot 0{,}05+0{,}05,$$

получаем $1-0{,}95\le m_0\le 1+0{,}05$ или $0{,}05\le m_0\le 1{,}05$. Т.к. m_0 – целое число, заключенное между 0,05 и 1,05, то $m_0=1$, поэтому наивероятнейшее число ошибочных счетов, обнаруженных аудитором будет равно 1.

5. Вероятность того, что изделие, сошедшее с конвейера, первого сорта равна 0,9. Какова вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся первого сорта?

Решение. По условию $n=400,\ m=356,\ p=0{,}9,\ q=0{,}1$, т.е. n – велико, $npq=400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=36>10$. Тогда

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P_{400}(356)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\ \varphi(x)=\frac{1}{6}\varphi(x),$$

где $x=\dfrac{356-400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\approx -0{,}67.$

Находим $\varphi(-0{,}67)=0{,}3188$.

Тогда $P_{400}(356)\approx\dfrac{0{,}3188}{6}=0{,}0531$.

6. Завод отправил на базу 500 изделий, вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено 2 изделия.

Решение. По условию $n = 500,\ p = 0{,}002$, а $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1 < 10$. Для нахождения вероятности $P_{500}(2)$ воспользуемся формулой Пуассона, так как условия её применения выполнены. Тогда

$$P_{500}(2) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} \approx \frac{0{,}36788}{2} \approx 0{,}18394 .$$

7. Вероятность того, что студент не прошел медицинский осмотр, равна p=0,2. Найдите вероятность того, что среди 400 случайно выбранных студентов окажутся не прошедшими медицинский осмотр от 70 до 100 студентов.

Решение. По условию, k_1=70; k_2=100; n=400; p=0,2; q=0,8. Следовательно,

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}02}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25,\quad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}02}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5,$$

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-12{,}5) = \Phi(2{,}5) + \Phi(12{,}5) = 0{,}49 + 0{,}39 = 0{,}88.$$

8. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой кампании. Какова вероятность того, что будет продано: а) не менее 70 и не более 85 акций; б) не менее 70; в) не более 69 акций.

Решение. Событие A – «акция продана» $P(A) = p$.

а) По условию n=100, p=0,8, q=0,2, $k_1 = 70$, $k_2 = 80$. Воспользуемся формулой

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию

$$P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5,$$

$$x_2 = \frac{85 - 80}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

$$P_{400}(70{,}85) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5).$$

По таблице значений функции Лапласа и учитывая нечетность этой функции находим $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$, $\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938$.

Тогда $P_{400}(70{,}85) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882$.

б) Требование того, что фирма продает не менее (больше либо равно) 70 акций означает, что будет продано либо 70, либо 71, либо 72, и т.д., либо 100 акций. Значит в данном случае $k_1 = 70$, а $k_2 = 100$. Тогда

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где, $x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -\frac{10}{4} = 2{,}5$, $x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{4} = 5$.

По таблице значений находим $\Phi(-2{,}5) = -0{,}4938$, $\Phi(5) = 0{,}5$, тогда

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938.$$

в) Событие A – «появилось не менее 70 раз» противоположно событию B – «появилось не более 69 раз», потому $P_{100}(0{,}69) = 1 - P_{100}(70{,}100) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$.

Значит вероятность того, что будет продано либо 69, либо 68, либо 67, и т.д., либо ноль (ни одной) акции $P_{100}(0{,}69) \approx 0{,}0062$.

9. На базу отдыха прибыло 1000 подростков. Какова вероятность того, что среди этих отдыхающих окажется 5 детей, страдающих клаустрофобией, если в среднем 0,1 % подростков страдают данной болезнью?

Решение. Имеем: n=1000, m=5, $p = \frac{0{,}1\%}{100\%} = 0{,}001$.

Так как n – велико, а p – мало, то воспользуемся формулой Пуассона:

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1,\ P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} = \frac{1}{120 \cdot e} \approx 0{,}003086 \approx 0{,}0031.$$

10. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна 0,002. В течение дня банк оперирует с 500 банкнотами. Найдите вероятность встретить в течение дня в ходе обработки встретиться менее трех фальшивых банкнот.

Решение. Из условия следует, что n=500, p=0,002. Так как n – велико, а p – мало, то воспользуемся формулой Пуассона. Имеем $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

Тогда

$$P_{500}(m < 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = 2{,}5 \cdot e^{-1} \approx 0{,}919.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Из студентов старших курсов ФФСН доля отличников составляет 31%. Для оценки остаточных знаний была протестирована группа студентов старших курсов. Сколько студентов было отобрано в группу проверки, если наивероятнейшее число отличников в группе равно 23?

2. Страховой агент работает с 20 потенциальными клиентами. Вероятность того, что клиент заключит договор на страхование имущества постоянно для каждого клиента и равна $\frac{3}{5}$. Вычислить наивероятнейшее число клиентов, которые заключат договор с агентом.

3. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 40%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 120 изделий?

4. Страховая компания изучает вероятность дорожных происшествий для юношей, имеющих мотоциклы. Было установлено, что вероятность попасть в дорожное происшествие для юноши в течение года равна 0,35. Найдите вероятность того, что из 700 юношей имеющих мотоцикл, в дорожное происшествие попадут: а) точно 270 юношей; б) более чем 230 и менее чем 270 юношей; в) более чем 270 юношей.

5. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{200}$. Найдите вероятность того, что среди 200 соединений произойдет: а) точно одно неправильное соединение; б) менее трех неправильных соединений; в) более двух неправильных соединений.

6. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. Испытано 9 приборов. Какова вероятность того, что откажут: а) два прибора; б) один прибор; в) менее трех приборов?

7. В партии из 100 изделий 10% бракованных. Контролер для проверки наугад выбирает 8 изделий. Какова вероятность того, что бракованными будут: а) все изделия; б) хотя бы одно изделие; в) менее двух изделий.

8. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найдите вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) ровно 75 раз.

9. Анализ работы кредитного отдела банка, выявил, что 12% фирм, бравших кредит в банке обанкротились и не вернут кредиты. Найдите наивероятнейшее число фирм, которые не вернут кредит, если в банке взяли кредит 25 фирм.

10. Устройство состоит из 500 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого элемента за время t равна 0,002. Найдите вероятность того, что за время t откажут: а) ровно 3 элемента; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы один.

11. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется поврежденной, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит поврежденных бутылок: а) ровно две; б) более двух; в) хотя бы одну.

12. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Занятие № 12. Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики случайных величин. Законы распределения случайных величин.

Примеры решения задач

1. Подбрасываются две монеты и подсчитывается количество выпавших «орлов» на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X – число выпадения «орлов» на обеих монетах. Записать закон распределения этой случайной величины.

Решение. В данном испытании пространство элементарных событий равно $\Omega = \{(О, О), (Р, Р), (О, Р), (Р, О)\}$, где О означает, что выпал «орел», Р – выпала «решка». «Орел» может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности этих значений равны соответственно

$$p_1 = P(X=0) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = P(X=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad p_3 = P(X=2) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

2. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Случайная величина X – число попаданий по мишени. Записать закон распределения случайной величины.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли. В данном случае p=0,3; q = 0,7; n = 3, откуда получаем:

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^3 = 0,343,$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^2 = 3 \cdot 0,3 \cdot 0,49 = 0,441,$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^1 = 3 \cdot 0,09 \cdot 0,7 = 0,189,$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^0 = 0,027.$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

3. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа.

a) Составить закон распределения случайной величины X.

b) Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. а) Дискретная случайная величина X может принимать значения 1,2,3,4,5,6 (студент угадает либо с первой, либо со второй и т.д. до шестой попытки) $P(x=1)=1/6$ (с первой попытки угадано нужное число, тогда число благоприятных исходов равно 1, а число всех исходов равно 6). Если x=2, то число угадано со второй попытки $P(x=2)=\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. Если событие состоит в том, что первые две попытки были неудачные и только третья оказалась удачной, то вероятность такого события

$P(x=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$. Далее $P(x=4)=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Аналогично $P(x=5)=\frac{1}{6}$. $P(x=6)=\frac{1}{6}$.

Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

б) $M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}$.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=15{,}17-12{,}25\approx 2{,}92$, где

$M(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$.

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2{,}92}\approx 1{,}7$.

4. Найдите математическое ожидание случайной величины Z, если $M(X)=2$, $M(Y)=3$: а) $Z=3X-4Y$; б) $Z=X+5Y$.

Решение. а) Используем свойство – математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий; постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания – имеем:

а) $M(Z)=3M(X)-4M(Y)=3\cdot2-4\cdot3=6-12=-6$; б) $M(Z)=17$.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–1	0	2
P	p_1	p_2	p_3

Найдите p_1, p_2, p_3, если известны величины – математическое ожидание этой случайной величины $M(X)=0{,}1$ и математическое ожидание ее квадрата $M(X)^2=0{,}9$.

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1, имеем $p_1+p_2+p_3=1$.

Принимая во внимание, что $M(X)=0{,}1$, получаем соотношение

$-1p_1+0p_2+2p_3=0{,}1$.

Составим ряд распределения для случайной величины X^2:

X^2	1	0	4
P	p_1	p_2	p_3

и запишем выражение

$M(X^2)=1p_1+0p_2+4p_3$.

Используя условие задачи $M(X)^2=0{,}9$, имеем

$1p_1+4p_3=0{,}9$,

откуда получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$p_1+p_2+p_3=1,$$
$$-1p_1+0p_2+2p_3=0{,}1,$$
$$1p_1+4p_3=0{,}9.$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = \frac{7}{30},\; p_2 = \frac{3}{5},\; p_3 = \frac{1}{6}.$$

6. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ(X) этой случайной величины.

Решение. Находим $M(X)$ по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$.

$$M(X) = -5\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Дисперсию $D(X)$ будем искать по формуле $D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2$. Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем $M(X^2) = 25\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}2 = 15{,}3$. Тогда

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$.

7. Монету бросили 7 раз. Сколько раз в среднем появится герб?

Решение. Случайная величина X – выпадение герба. Она сможет принимать значения $X = 0,1,2,\ldots,7$. Запишем закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{35}{128}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{1}{128}$

где вероятности найдены по формуле Бернулли $P(X = m) = P_m(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, здесь $n = 7,\; p = \frac{1}{2},\; q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $m = 0,1,2,\ldots,7$.

$$P(X=0) = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128};\; P(X=1) = C_7^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{128};$$

$$P(X=2) = C_7^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{21}{128};\; P(X=3) = C_7^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128};$$

$$P(X=4) = C_7^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{128};\; P(X=5) = C_7^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128};$$

$$P(X=6) = C_7^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{128};\; P(X=7) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}.$$

Найдем $M(X)$:

$$M(X) = 0\cdot\frac{1}{128} + 1\cdot\frac{7}{128} + 2\cdot\frac{21}{128} + 3\cdot\frac{35}{128} + 4\cdot\frac{35}{128} + 5\cdot\frac{21}{128} + 6\cdot\frac{7}{128} + 7\cdot\frac{1}{128} =$$

$$= \frac{448}{128} = 3{,}5.$$

То есть герб в среднем появится 3-4 раза.

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 100 рублей, а остальные – по 10 рублей. Составить закон распределения случайной величины X – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных белых шаров.

4. Дан ряд распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$.

а)

X	–1	5	6
P	0,2	0,4	0,4

б)

X	1,2	2,3	4,1
P	0,35	p_2	0,24

5. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

6. Случайная величина X задана своим законом распределения:

X	–1	0	x_3	5
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Найдите x_3, если известно, что $M(X) = 1{,}9$.

7. Организована беспроигрышная лотерея. Имеется 1000 выигрышей, из них 400 по 10 руб., 300 – по 20 руб., 200 – по 100 руб. и 100 – по 200 руб. Каков средний размер выигрыша для купившего один билет?

Занятие № 13. Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики случайных величин. Законы распределения случайных величин.

Примеры решения задач

1. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найдите: а) плотность распределения вероятностей $p(x)$, б) математическое ожидание $M(X)$, в) дисперсию $D(X)$, г) вероятность попадания случайной X на интервал $[0,1)$, д) построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

Решение. а) По определению $p(x) = F'(x)$, тогда

$$p(x) = \begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{2x}{9}, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

б) Найдем математическое ожидание по формуле: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$,

$$M(X)=\int\limits_0^3 \frac{2x}{9}xdx=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^2dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3}=\frac{2\cdot 27}{27}=2.$$

в) Вычислим дисперсию: $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$, где

$$M(X^2)=\int\limits_0^3 \frac{2x}{9}x^2dx=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^3dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3=\frac{x^4}{18}\Bigg|_0^3=\frac{3^4}{18}=\frac{9}{2}.$$

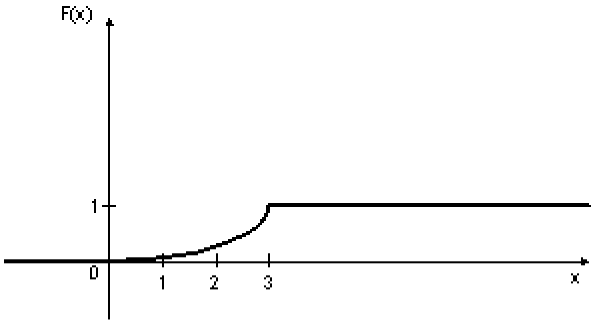
Тогда $D(X)=\dfrac{9}{2}-2^2=\dfrac{9}{2}-4=\dfrac{9-8}{2}=\dfrac{1}{2}=0{,}5.$

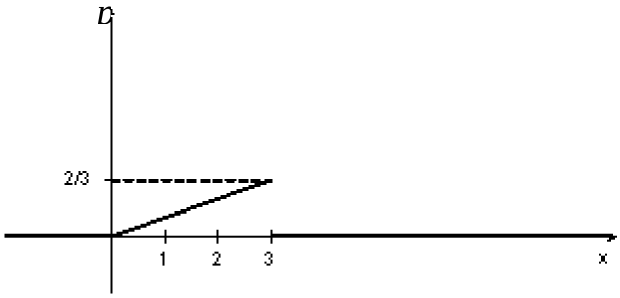
г) Исходя из свойства функции распределения, имеем:

$P(\alpha\le x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$, тогда

$$P(0\le x<1)=F(1)-F(0)=\frac{x^2}{9}\Bigg|_{x=1}-\frac{x^2}{9}\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{9}=0{,}111$$

д) Строим графики функций $F(x)$ и $p(x)$:





2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найдите коэффициент *a*.

Решение. Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to 2-} F(x) = \lim\limits_{x\to 2-} ax^2 = \lim\limits_{x\to 2+} F(x) = 1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 2} ax^2 = 1$, таким образом

$$a\cdot 2^2 = 1,\ a\cdot 4 = 1,\ a = \frac{1}{4}, \text{ тогда } F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

3. Задана плотность распределения случайной величины X

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a(x+1), & -1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a.

Решение. Из свойства плотности распределения вероятностей: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ следует:

$$\int\limits_{-1}^{2} a(x+1)dx = 1; \quad a\int\limits_{-1}^{2}(x+1)dx = 1; \quad a\left(\int\limits_{-1}^{2} xdx + \int\limits_{-1}^{2} dx\right) = 1; \quad a\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + x\Big|_{-1}^{2}\right) = 1;$$

$$a\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} + 2 + 1\right) = 1; \ a\left(\frac{3}{2} + 3\right) = 1; \ a\cdot\frac{9}{2} = 1,\ a = \frac{2}{9}.$$

4. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биномиальный закон распределения вероятностей числа пригодных деталей из взятых наугад 6 деталей.

Решение. Из условия задачи следует, что $p = 0{,}75$, $q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $n = 6$. В соответствии с формулой Бернулли находим:

$$P(X=0) = 1\cdot(0{,}25)^6 \approx 0{,}0002\ ;$$

$$P(X) = 6\cdot(0{,}75)\cdot(0{,}25)^5 \approx 0{,}0044;$$

$$P(X) = 15\cdot(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4 \approx 0{,}033;$$

$$P(X=3) = 20\cdot(0{,}75)^3\cdot(0{,}25)^3 \approx 0{,}132\ ;$$

$$P(X=4) = 15\cdot(0{,}75)^4\cdot(0{,}25)^2 \approx 0{,}297\ ;$$

$$P(X=5) = 6\cdot(0{,}75)^5\cdot(0{,}25) \approx 0{,}356\ ;$$

$$P(X=6) = 1\cdot(0{,}75)^6 \approx 0{,}178\ .$$

Закон распределения данной случайной величины X – «числа стандартных деталей из 6 взятых наудачу» запишем в виде таблицы:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,0002	0,0044	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Проверка: $0{,}0002 + 0{,}0044 + 0{,}033 + 0{,}132 + 0{,}297 + 0{,}356 + 0{,}178 = 1.$

5. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит рекламу, оценивается в 0,002. В случайном порядке выбраны 500 телезрителей. Найдите вероятность того, что рекламу увидят: а) ровно три телезрителя; б) менее трех телезрителей.

Решение. По условию $n = 500,\ p = 0{,}002,\ k = 3$. Найдем $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}02 = 1$. Имеет место формула Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

а) Найдем вероятность того, что рекламу увидят ровно три телезрителя:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} = 0{,}0613.$$

б) Найдем вероятность того, что рекламу увидят менее трех телезрителей:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2e} = 0{,}9197.$$

6. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $R(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ ($t > 0$). Найдите вероятность того, что телевизор проработает безотказно в течение 50 ч.

Решение. По формуле надежности $R(t) = e^{-\lambda t}$, т.к. $\lambda = 0{,}02$ получим $R(50) = e^{-0{,}02 \cdot 50} = 0{,}3679$.

7. Непрерывная случайная величина X распределена по закону: $F(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Найдите вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал (0,2;0,5).

Решение. Это показательное распределение. Вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в заданный интервал $(a,\ b)$, где $a \ge 0$, может быть вычислена по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}$.

Тогда $P(0{,}2 < X < 0{,}5) = e^{-4 \cdot 0{,}2} - e^{-4 \cdot 0{,}5} = e^{-0{,}8} - e^{-2} = 0{,}4493 - 0{,}1353 = 0{,}314$.

8. Продолжительность жизни (в днях) растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину X, имеющую показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{140}$. Определить, какая доля растений данного вида погибает за период 100 дней.

Решение. Находим

$$P(0 \le X \le 100) = \int_0^{100} \frac{1}{140} e^{-\frac{x}{140}} dx = -e^{-\frac{x}{140}} \Bigg|_0^{100} = 1 - e^{-\frac{5}{7}} \approx 0{,}51.$$

9. Известно, что температура водоема в течение месяца является равномерно распределенной случайной величиной на отрезке $[6, 10]$. Найдите среднюю температуру водоема в данном месяце.

Решение. Пусть X – температура водоема в течение месяца. Тогда ее среднее значение равно $M(X)=\frac{6+10}{2}=8$.

10. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 30 у.е., и средним квадратическим отклонением, равным 10. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 у.е.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha \le X < \beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$. По условию $\alpha=10,\ \beta=50,\ a=30,\ \sigma=10$, тогда

$$P(10 \le X < 50)=\Phi(\frac{50-30}{10})-\Phi(\frac{10-30}{10})=\Phi(2)+\Phi(2)=2\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда, искомая вероятность равна:

$$P(10 < X < 50)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544\ .$$

11. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае – случайная величина, подчиненного нормальному закону с математическим ожиданием 0,5 кг и средним квадратическим отклонением 0,09 кг. Установить: а) вероятность того, что наудачу взятый грейпфрут имеет вес в пределах от 0,4 до 0,7 кг; б) вероятность того, что вес наудачу взятого грейпфрута отличается от математического ожидания не более, чем на 0,2 кг; в) в каких границах следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

Решение.

а)

$$P(0{,}4 < X < 0{,}7)=\Phi\left(\frac{0{,}7-0{,}5}{0{,}09}\right)-\Phi\left(\frac{0{,}4-0{,}5}{0{,}09}\right)=\Phi(2{,}22)+\Phi(1{,}11)=0{,}4867+0{,}3664=0{,}8531,$$

б) $P\left(\left|X-0{,}5\right|<0{,}2\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}2}{0{,}09}\right)=2\Phi(2{,}22)=2\cdot 0{,}4867=0{,}9734$,

в) $P\left(\left|X-0{,}5\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}09}\right)=0{,}95$, тогда $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}09}\right)=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475$.

По таблице приложения 2 имеем $\frac{\varepsilon}{0{,}09}=1{,}96$, откуда $\varepsilon=1{,}96\cdot 0{,}09=0{,}1764$ (кг).

Значит, границы, в которых следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95, будут

$$\left(a-\varepsilon;a+\varepsilon\right)=\left(0{,}5-0{,}1764;0{,}5+0{,}1764\right)=\left(0{,}3236;0{,}6764\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

2. По данной функции распределения $F(x)$ случайной величины X найдите плотность распределения вероятностей $p(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность попадания случайной величины X на интервал (0,5; 1,5) и построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{8}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a, плотность распределения вероятностей $p(x)$, и вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1; 2].

4. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $p(x)$, причем

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a(3x-x^2), & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найдите коэффициент a и вероятность попадания случайной величины X в промежуток (1; 2).

5. Определить параметры функции $p(x) = \begin{cases}ax^3+bx, x\in[1;4],\\ 0, x\notin[1;4].\end{cases}$

чтобы она являлась плотностью непрерывной случайной величины с математическим ожиданием, равным 2.

6. Производится 9 независимых испытаний. При каждом испытании событие A появляется в одной и той же вероятностью . Записать в виде

таблицы закон распределения случайной величины X – «числа появлений события A при этих испытаниях».

7. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет ровно 4 раза.

8. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,002. Найдите вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет не более чем на трех веретенах.

9. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найдите вероятность следующих событий: «в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию»; «в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию»; «в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию».

10. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности $p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 7e^{-7x}, & x \ge 0. \end{cases}$.

Найдите вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X попадет в интервал (0,15; 0,6), математическое ожидание, дисперсию случайной величины X.

11. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $R(t) = 1 - e^{-0,02t}$ ($t>0$). Найдите вероятность того, что за t=27 ч элемент: а) откажет; б) не откажет.

12. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [-2; 7].

13. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

14. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Найдите вероятность того, что за данную минуту она получит ровно два вызова.

15. Среди семян имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 500 семян обнаружить 5 семян сорняков.

16. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

17. Средний результат индивидуальных экономических прогнозов представляет собой общий согласованный прогноз. Пусть этот прогноз относительно величины банковской процентной ставки в текущем году подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 20% и средним квадратическим отклонением 10%. Из группы аналитиков случайным образом отбирается один человек. Найдите вероятность того, что согласно прогнозу аналитика отношение уровня процентной ставки по абсолютной величине будет меньше 3%.

18. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 12,5. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (10, 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания случайной величины X в интервал (35, 40)?

19. Среднее время обслуживания покупателя 20 минут. Чему равна вероятность простоя в очереди от 20 до 40 минут?

20. Испытывают два независимо работающих электроприбора. Длительность работы первого элемента имеет показательное распределение с параметром 0,02, второго – 0,04. Найдите вероятность того, что за 50 часов оба элемента откажут.

21. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за две минуты до отхода следующего поезда?

22. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами a=375 г, σ=25 г. Найдите вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

23. Линия связи обслуживает 1000 абонентов, каждый из которых разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должны иметь линии связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдет ни одного вызова?

24. Нефтеразведывательная компания получила финансирование для проведения 6 нефтеразработок. Вероятность успешной нефтеразведки 0,5. Предположим, что нефтеразведку осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. Составить закон распределения случайной величины X – числа успешных нефтеразведок. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Примерные темы для рефератов

1. Основные направления использования математики в социологических исследованиях.
2. История проникновения математических методов в социальные науки.
3. Роль и задачи математики в социологических исследованиях.
4. Взаимодействие и межпредметные связи математики и социологии.
5. Применение элементов теории множеств в социологических исследованиях.
6. Применение бинарных отношений в социологических исследованиях.
7. Применение матриц и определителей в социологических исследованиях.
8. Применение систем линейных алгебраических уравнений при решении задач с социально-экономическим содержанием.
9. Применение производной в социологических исследованиях.
10. Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере.
11. Применение элементов комбинаторики в социологических исследованиях.
12. Приложения элементов теории вероятностей к решению задач из социально-экономической сферы.
13. Применение случайных величин в социологических исследованиях.
14. Примеры использования основных законов распределения в социологических исследованиях.
15. Приложения элементов математической статистики к решению задач из социально-экономической сферы.
16. Применение математических методов при изучении социальных явлений.
17. Применение математических методов при прогнозировании социальных явлений.
18. Роль и место математического моделирования в современном обществе и социологических исследованиях.
19. Математическое моделирование как метод социальных исследований.
20. История использования математического моделирования в социологических исследованиях.
21. Примеры использования математического моделирования в социологических исследованиях.

22. Примеры использования графов в социологических исследованиях.

3.2. Вопросы к экзамену

1. Что такое множество? Приведите примеры множеств. Назовите способы задания множества.
2. Какие множества называются конечными, бесконечными? Приведите примеры.
3. Как определяется пустое множество? Какое множество называется одноточечным? Чем одноточечное множество отличается от элемента множества? Что такое мощность множества.
4. Что такое объединение двух множеств? Изобразите объединение двух множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Перечислите свойства операции объединения.
5. Что такое пересечение двух множеств? Изобразите пересечение множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Перечислите свойства операции пересечения.
6. Что такое симметрическая разность множеств. Запишите две формулы для нахождения симметрической разности. Как используется симметрическая разность в социологических исследованиях?
7. Что такое матрица? Перечислите типы матриц. Какая матрица называется квадратной, а какая единичной?
8. Какие линейные операции над матрицами вы знаете? Дайте определения суммы и разности матриц. Как умножить матрицу на число?
9. Какие матрицы называются согласованными? Как перемножить две матрицы? Назовите свойства умножения матриц.
10. Что такое определитель матрицы? Для каких матриц можно вычислить определитель? Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
11. Запишите формулу для вычисления определителя третьего порядка. Назовите свойства определителей.
12. Какая матрица называется невырожденной. Дайте определение обратной матрицы. Запишите алгоритм нахождения обратной матрицы.
13. Что такое система линейных алгебраических уравнений и что такое решение системы? Какие системы линейных алгебраических уравнений называются совместными, несовместными, определёнными и неопределенными.
14. Какие методы решения систем линейных алгебраических уравнений вы знаете?
15. Дайте определение перестановок из n элементов. По какой формуле можно найти число всевозможных перестановок из n элементов без повторений? По какой формуле можно найти число всевозможных перестановок из n элементов с повторениями?
16. Что называют размещениями из n элементов по m элементов? По какой формуле можно найти число всевозможных размещений из n

элементов по m элементов без повторений? По какой формуле можно найти число всевозможных размещений из n элементов по m элементов с повторениями?

17. Дайте определение сочетаний из n элементов по m элементов. Чему равно число сочетаний из n элементов по m элементов без повторений? По какой формуле можно найти число всевозможных сочетаний из n элементов по m элементов с повторениями?

18. Дайте определения опыта (испытания), события. Какое событие называется случайным, достоверным, невозможным в данном опыте. Приведите соответствующие примеры.

19. Какие события называются несовместными в данном опыте? Какие события называются противоположными в данном опыте? Что такое полная группа событий? Приведите соответствующие примеры.

20. Какие операции над событиями вы знаете? Перечислите их свойства.

21. Дайте определение вероятности события. Перечислите её свойства.

22. Какие два события называются совместными? Чему равна вероятность суммы двух совместных событий?

23. Какие два события называются несовместными? Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий? Как найти сумму вероятностей двух противоположных событий?

24. Какие два события называются независимыми? Что такое условная вероятность? Сформулируйте теоремы умножения событий для зависимых и для независимых событий.

25. Какие события образуют полную группу событий? Какие события называются гипотезами? Запишите формулу полной вероятности. При каких условиях она применяется?

26. Запишите формулу Байеса. Как проверить правильность вычисления апостериорных (послеопытных) гипотез? Для чего используются формулы Байеса?

27. Что такое схема Бернулли? Как вычисляются биномиальные вероятности?

28. Когда пользуются Формулой Пуассона, а когда теоремой Лапласа?

29. Дайте определение случайной величины. Какие случайные величины называются дискретными, а какие непрерывными? Приведите примеры таких случайных величин.

30. Укажите числовые характеристики случайной величины. Как определяется математическое ожидание для дискретной случайной величины? Перечислите основные свойства математического ожидания.

31. Как определяется дисперсия для дискретной случайной величины? Перечислите основные свойства дисперсии. Что такое среднеквадратическое отклонение и как его найти?

32. Какое распределение СВ называется нормальным? Где оно применяется в социологических исследованиях?

3.3. Средства диагностики

Оценка и определение уровня знаний и практических профессиональных Перечень рекомендуемых средств диагностики:

1. Компьютерное тестирование.
2. Контрольные работы.

Методика формирования итоговой оценки:

Итоговая оценка формируется на основе документов:

• Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012);

• Положение о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020);

• Положение об организации аттестации лиц, не сдавших экзамены, зачеты, не прошедших иные формы контроля результатов учебной деятельности, предусмотренные учебными планами и учебными программами, и ликвидации академической разницы в учебных планах в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ 29.08.2018 № 490-ОД);

• Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов (курсантов, слушателей) от 18.11.2019.

• Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь 21-04-01/105 от 22.12.2003).

Формой текущей аттестации по дисциплине «Основы высшей математики и теории вероятностей» учебным планом предусмотрен экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

– контрольные работы – 50 %;
– компьютерное тестирование – 50 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационная оценка – 60 %.

3.4. Примерные промежуточные контрольные работы

Контрольная работа 1. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами.

1. Пусть даны множества $A=\{1,6,8\}$, $B=\{3,4,5,6\}$. Найдите $A\cap B\,, A\cup B\,, A\Delta B$.

2. Являются ли множества $\{1,2,5\}$, $\{\{1,2\},\{2,5\}\}$ одинаковыми? Почему?

3. Докажите $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

4. Социолог исследует способности у 300 студентов. Оказалось, что 100 студентов преуспевают в математике, 120 – в музыке, 110 – в спорте. Кроме того, было обнаружено, что 30 студентов преуспевают как в математике, так и в музыке, 30 – как в музыке, так и в спорте, 40 – как в математике, так и в спорте. И только 10 студентов преуспели сразу в трех областях. Сколько студентов преуспевает в двух областях? Сколько студентов преуспевает в одной области?

5. Пусть A – «множество букв вашей фамилии», а B – «множество букв вашего имени». Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \,\Delta\, B$.

6. Дано множество $A=\{1,\ 7,\ 3,\ \{1\},\ \{1,4\}\}$. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами множества A, а какие подмножествами: 1, 7, $\{7\}$, $\{1,7\}$, $\{1,3\}$, $\{7,\{3\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{1,4\}$, $\{3,7,\{1,4\}\}$

7. Выписать все подмножества множества: $A=\{-1, \varnothing, \{1\}\}$.

8. Заштриховать ту часть диаграммы, которая соответствует множеству: $B\cap(A\cup C)$, $A\setminus(B\setminus C)$.

Контрольная работа 2. Матрицы, определители. Системы линейных алгебраических уравнений.

1. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 7\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

2. Найти $4A^{т}$-$3B$, где $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

3. Найти матрицу, обратную заданной: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

4. Найти определитель следующей матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

5. Приведите пример матриц A и B, таких, что $AB=BA$.

6. Решить уравнение: $\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ 2 & x\end{vmatrix}=0$

7. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 9x_1 + x_2 + 3x_3 = -14 \end{cases}$$

Контрольная работа 3. Вероятность случайного события. Основные теоремы теории вероятностей.

1. В ящике имеются 8 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу извлекают три детали. Найти вероятность того, что одна из них окажется окрашенной.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков - нечетное число.

3. В группе из 30 студентов 5 занимается на «отлично»,15 на «хорошо», и 8 на «удовлетворительно». Наугад один за другим вызывается к доске три студента. Какова вероятность того, что это три «хорошиста»?

4. В телестудии три телевизионных камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены:1) две камеры; 2) три камеры.

5. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят их строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что откажут ровно два узла.

6. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях выделено из первой группы курса 4, из второй 6, из третьей группы 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную института, соответственно равны: 0,9, 0,7, 0,8. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот студент?

7. Вероятность появления события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,005. Найти вероятность того, что событие появится ровно 1 раз.

8. Приведите примеры достоверного, невозможного, несовместных и противоположных событий.

Контрольная работа 4. Дискретные и непрерывные случайные величины.

1. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Случайная величина X – число промахов при трех выстрелах. Найти: 1) закон распределения ДСВ X; 2) математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратичное отклонение s(X).

2. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением 3,3 и математическим ожиданием 8,7. Найти $P(4<X<12)$.

3. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 30 у.е., и средним квадратическим отклонением, равным 10. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 у.е.

4. Среднее время обслуживания в парикмахерской равно 30 минут. Чему равна вероятность для клиента, что его обслужат во временном промежутке от 10 до 20 минут?

5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

3.5. Эвристические задания

Эвристические задания по теме 1.3. Бинарные отношения (2 ч/ДО).

Целеполагание студента: Выберите из предложенных целей занятия две наиболее значимые для себя (или предложите свой вариант в пункте «другое») и обоснуйте их:

- Получить новые знания по математике, которые пригодятся в моей будущей профессии.
- Усвоить сложные математические понятия.
- Получить хорошую отметку по дисциплине.
- Научиться правильно задавать вопросы.
- Поприсутствовать на занятии, поскольку от этого зависит мая рейтинговая оценка.
- Убедиться в основательности собственных знаний, умений и навыков.
- Усовершенствовать собственную коммуникативную компетентность во время дискуссии с преподавателем и одногруппниками.
- Продемонстрировать преподавателю мой уровень знания математики.
- Продемонстрировать одногруппникам мой уровень знания математики.
- Другое:________________________

Открытое задание

ЗАДАНИЕ 1 «РАЗНЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ОТНОШЕНИЯ»

Бинарные отношения широко используются в социологических исследованиях. Бинарным отношением назовём некоторое подмножество R множества . При этом будем говорить, что элемент a находится в бинарном отношении R с элементом b, если a и b принадлежат A и (a,b) принадлежит R.

– Проанализируйте: Являются ли бинарными следующие отношения: «быть одноклассником», «быть старше»?

– Приведите от трёх до пяти примеров бинарных отношений, с которыми вы встречались в повседневной жизни. Каждый пример должен отражать определенную сферу вашей жизни: семья, друзья, учёба и т.д.

– Состоите ли вы в каких-нибудь бинарных отношениях? В каких бинарных отношениях вы бы хотели состоять?

ЗАДАНИЕ № 2. «ФОРМУЛА ЛЮБВИ»

Изучив понятия: бинарное отношение на множестве и эквивалентность на множестве, выполните следующие задания и ответьте на вопросы:

– Между членами семьи существуют отношения родства, которые можно выразить словами: «быть мужем», «быть братом» и т. д. Множество М – множество членов вашей семьи. Укажите всевозможные отношения на множестве М;

– Бинарные отношения могут задаваться формулой. Формула x+y=любовь, задает бинарное отношение на множестве людей. Этому отношению принадлежит любая пара людей, между которыми существует любовь. Придумайте свою формулу, задающую бинарное отношение и опишите её;

– В какой еще форме, на ваш взгляд, можно представить бинарное отношение? Какая форма представления бинарных отношений вам понравилась больше и почему?

Рефлексия студентов: Вернитесь к целеполаганию и ответьте на вопросы:

1. Перечислите трудности, с которыми вы столкнулись при изучении темы? Как вы преодолевали эти трудности?
2. Что вам удалось больше всего при изучении темы и почему?
3. Что и почему у вас не получилось?
4. Каков главный результат для вас лично при изучении темы?
5. Опишите свои эмоциональные впечатления на разных этапах занятия. Что труднее всего удалось в эмоциональном плане, а что – легче всего?
6. Удалось ли реализовать ваши цели, поставленные в начале занятия?

Эвристическое задание по теме 5.1. Математическое моделирование социальных процессов (2 ч/ДО).

Целеполагание студента: Заполните таблицу до начала занятия:

Что я знаю о графах?	
Что я не знаю о графах?	
Что я хочу узнать о графах?	
Какие знания, полученные на занятии, понадобятся в моей жизни и будущей профессии?	
Сформулируйте не менее трёх собственных	

проблемных вопросов, касающихся тематики лекции.	
Сформулируйте не менее трёх своих личных целей, которые вы ставите перед собой в начале занятия.	

Открытое задание

Эвристическое задание «УДИВИТЕЛЬНАЯ КРАСОТА ГРАФОВ»

Графы находят применение в социологии, антропологии, экономике, теории коммуникаций, социальной психологии и многих других сферах, где анализируются социальные сети.

– Приведите три примера использования графов в повседневной жизни.

– Вы хотите спланировать путешествие. Постройте граф, отображающий сроки, затраты, переезды. Что ещё вы бы включили в данный граф?

– Изобразите в виде графа схему проезда от вашего дома к месту учёбу.

Эвристическое задание на обобщение темы занятия «СЕМЕЙНОЕ ДЕРЕВО»

Моделирование социальных процессов с помощью графов находят широкое применение в социальных науках. Элементы социальной структуры (люди, сообщества, группы) представляются в виде узлов графа, а отношения между ними (организационные, экономические зависимости, уровни принятия решений, коммуникации) представляются в виде рёбер, соединяющих вершины графа.

Представьте родословную своей семьи с помощью графа одним из двух способов. Дерево графа может быть нисходящим и изображать всех потомков одной супружеской пары или восходящим, на котором будут представлены все предки конкретного человека. Выбор способа обоснуйте.

Рефлексия студентов: Вернитесь к целеполаганию и ответьте на вопросы:

1. Удалось ли реализовать ваши цели, поставленные перед занятием?
2. Перечислите трудности, с которыми вы столкнулись при изучении темы? Как вы преодолевали эти трудности?
3. Что вам удалось больше всего при изучении темы и почему? Что и почему у вас не получилось?
4. Каков главный результат для вас лично при изучении темы?
5. Опишите свои эмоциональные впечатления на разных этапах занятия. Что труднее всего удалось в эмоциональном плане, а что – легче всего?

3.6. Примерные тестовые задания

Тест 1. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами

1. Основоположником теории множеств является немецкий математик
a) Георг Кантор;
b) Исаак Ньютон;
c) Рене Декарт.
2. Каждый элемент множества содержится в нем
a) один раз;
b) два раза;
c) бесконечное количество раз.
3. Для обозначения множеств используются
a) строчные буквы латинского алфавита, например, а, в, с, ...;
b) прописные буквы русского алфавита А, Б, В, …;
c) прописные буквы латинского алфавита А, В, С,…,;
d) строчные буквы русского алфавита, например, а, б, в, ...
4. Для обозначения элементов множества используются
a) прописные буквы латинского алфавита А, В, С,…;
b) строчные буквы латинского алфавита, например, а, в, с, ...;
c) прописные буквы русского алфавита А, Б, В, …;
d) строчные буквы русского алфавита, например, а, б, в, ...
5. Что имеет значение в диаграммах Эйлера-Венна
a) относительный размер кругов;
b) взаимное расположение кругов;
c) относительный размер и взаимное расположение кругов.
6. Из представленных ниже совокупностей укажите те, которые являются множествами:
a) Изданные книги;
b) Великие русские писатели;
c) Студенты-отличники;
d) Числа от 1 до 5.
7. Из представленных ниже совокупностей укажите те, которые являются множествами:
a) Дни с хорошей погодой в году;
b) Студенты-отличники;
c) Недорогие автомобили;
d) Точки на прямой;
e) Числа от 10 до 15.
8. Укажите верные утверждения: Пустое множество
a) Одно;
b) Конечное;
c) Универсальное;
d) Бесконечное;

e) Неопределенное;
f) Является подмножеством любого множества.

9. Дано множество А = {1, 7, 3, {1}, {1,4}}. Укажите, какие из следующих объектов являются элементами множества А, а какие подмножествами:

a) 1;
b) {7};
c) {1,7};
d) {1,3};
e) {7,{3}};
f) {{1}};
g) {1,{4}};
h) {3,7,{1,4}}.

10. Дано множество А = {1, 7, 3, {1}, {1,4}}. Укажите, какие из следующих объектов являются подмножествами множества А, а какие:

a) 1;
b) {7};
c) {1,7};
d) {1,3};
e) {7,{3}};
f) {{1}};
g) {1,{4}};
h) {3,7,{1,4}}.

11. Множества состоят из

a) Элементов;
b) Списков;
c) Чисел;
d) Точек;
e) Социальных объектов.

12. Пусть даны множества А={4,6,8}, В={3,4, 6,9}. Найти $A \cap B$.

a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

13. Пусть даны множества А={4,6,8}, В={3,4, 6,9}. Найти $A \cup B$.

a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

14. Пусть даны множества А={4,6,8}, В={3,4, 6,9}. Найти $A \setminus B$.

a) {4, 6, 8, 9};

b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

15. Пусть даны множества А={4,6,8}, В={3,4, 6,9}. Найти В \ А.
a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

16. Пусть даны множества А={4,6,8}, В={3,4, 6,9}. Найти А Δ В.
a) {4, 6, 8, 9};
b) {4, 6};
c) {3, 4, 6, 8, 9};
d) {8};
e) {3, 9};
f) {3, 8, 9}.

Тест 2. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений

1. Операция сложение матриц возможна только для матриц, которые
a) состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов
b) являются согласованными
c) являются квадратными
d) состоят из нулевых элементов

2. Найдите обратную матрицу к данной А=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
c) 3) не существует;
d) 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. При умножении матрицы–строки, состоящей из 5 элементов, на матрицу–столбец, тоже состоящую из 5 элементов, получаем
a) матрицу–строку, состоящую из 5 элементов
b) матрицу 1-го порядка
c) матрицу 5-го порядка
d) матрицу 25-го порядка

4. При транспонировании квадратной матрицы определитель
a) меняет знак на противоположный

b) не изменяется
c) становится равным нулю

5. Найдите транспонированную матрицу к данной А=$\begin{pmatrix} d & b \\ c & d \\ a & c \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} c & b \\ c & d \\ b & a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} d & b \\ c & d \\ a & c \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} d & c & a \\ b & d & c \end{pmatrix}$

6. При перестановке двух строк или столбцов матрицы определитель
a) не изменяется
b) меняет знак на противоположный
c) становится равным нулю

7. Система линейных алгебраических уравнений будет совместной, если она
a) имеет хотя бы одно решение
b) имеет только одно решение
c) не имеет решений

8. Совместная система называется определенной, если она
a) имеет хотя бы одно решение
b) имеет только одно решение
c) не имеет решений

9. Если определитель системы равен нулю, то для ее решения можно использовать
a) метод Гаусса
b) метод Крамера
c) метод обратной матрицы

Тест 3. Основы комбинаторики. Вероятность случайного события

1. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события A={извлечен шар белого цвета}; B={извлечен шар красного цвета}; C={извлечен шар черного цвета}. Что представляет собой событие: $\overline{A+C}$?
a) извлечен шар белого или чёрного цвета
b) извлечен шар красного цвета
c) невозможное событие

2. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события

А={извлечен шар белого цвета}; В={извлечен шар красного цвета}; С={извлечен шар черного цвета}. Что представляет собой событие: AB?

d) извлечен шар белого или чёрного цвета

e) извлечен шар красного цвета

f) невозможное событие

3. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события А={извлечен шар белого цвета}; В={извлечен шар красного цвета}; С={извлечен шар черного цвета}. Что представляет собой событие: AC+B?

a) извлечен шар белого или чёрного цвета

b) извлечен шар красного цвета

c) невозможное событие

4. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «решки»?

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{3}$

5. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «орлы»?

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

6. Подбрасывается два игральных кубика. Сколько элементарных исходов соответствуют событию – на двух кубиках в сумме выпало 7 очков?

a) 3

b) 2

c) 6

d) 7

7. Правление коммерческого банка выбирает из 8-ми кандидатов три человека на различные должности (все 8 кандидатов имеют равные шансы). Сколькими способами это можно сделать? Для ответа на этот вопрос требуется рассчитать

a) число размещений из 8 элементов по 3, *b)* число сочетаний из 8 элементов по 3,

c) число перестановок из 8 элементов.

8. Подбрасывается два игральных кубика. Сколько элементарных исходов соответствуют событию – на двух кубиках в сумме выпало 8 очков?

a) 3

b) 2

c) 6

d) 5

9. Стрелок стреляет по мишени 2 раза. Он попадает в мишень с вероятностью P=0,6. Какова вероятность того, что он попадет по мишени оба раза?

a) 0,12

b) 0,3

c) 0,36

10. В урне находятся 15 одинаковых по размеру шаров, из которых 5 красных и 10 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

a) $\frac{5}{10}$

b) $\frac{5}{15}$

c) $\frac{10}{15}$

11. Пусть событие A – светит солнце, а событие B – дует ветер. Что представляет собой событие A*B

a) светит солнце, но нет ветра

b) дует ветер, но не светит солнце

c) светит солнце и дует ветер

d) или светит солнце или дует ветер

12. Пусть событие A – светит солнце, а событие B – дует ветер. Что представляет собой событие A\B

a) светит солнце, но нет ветра

b) дует ветер, но не светит солнце

c) светит солнце и дует ветер

d) или светит солнце или дует ветер

13. Пусть событие A – светит солнце, а событие B – дует ветер. Что представляет собой событие B\A

a) светит солнце, но нет ветра

b) дует ветер, но не светит солнце

c) светит солнце и дует ветер

d) или светит солнце или дует ветер

14. В урне находятся 15 одинаковых по размеру шаров, из которых 5 красных и 10 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

a) $\frac{5}{10}$

b) $\frac{5}{15}$

c) $\frac{10}{15}$

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Содержание учебного материала

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СОЦИАЛЬНЫМ ОБЪЕКТАМ

Тема 1.1. Роль и место математики в гуманитарных науках и социологических исследованиях

Введение в дисциплину «Основы высшей математики и теории вероятностей». Предмет высшей математики. Основные этапы использования математики в социальных исследованиях.

Тема 1.2. Основные понятия теории множеств. Операции над множествами

Понятие множества. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств. Примеры множеств в социальных науках. Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера-Венна. Применение теории множеств к анкетным опросам и социальным группам.

Тема 1.3. Бинарные отношения

Понятие бинарного отношения. Примеры бинарных отношений в социологических исследованиях. Моделирование социальных процессов и явлений с помощью бинарных отношений.

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Тема 2.1. Матрицы, определители

Матрица как наглядный способ описания многомерных социологических объектов. Определение и основные типы матриц. Основные операции над матрицами и их свойства. Определители и их свойства. Использование матриц при решении задач с экономическим и социологическим содержанием.

Тема 2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Основные понятия и методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Математические модели в экономике и социологии в виде систем линейных алгебраических уравнений.

РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Тема 3.1. Основы дифференциального исчисления

Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной функции одной вещественной переменной, её интерпретация как показателя динамики различных социально-экономических явлений и процессов. Основные правила дифференциального исчисления. Примеры использования производной в социально-экономической сфере.

Тема 3.2. Основы интегрального исчисления

Понятие неопределённого и определенного интегралов. Интегрирование простейших функций. Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере.

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Тема 4.1. Основы комбинаторики

Предмет комбинаторики. Комбинаторные принципы сложения и умножения. Выбор без повторений. Выбор с повторениями. Использование комбинаторных методов для обработки и анализа социологических данных.

Тема 4.2. Вероятность случайного события

Предмет теории вероятностей и ее роль в социологических исследованиях. Случайные события и их классификация. Классическая формула вычисления вероятности.

Тема 4.3. Основные теоремы теории вероятностей

Теоремы сложения вероятностей. Независимые события. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 4.4. Дискретные и непрерывные случайные величины

Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры случайных величин в социологических исследованиях. Закон распределения дискретной случайной величины. Примеры использования различных случайных величин и их законов распределения в социальных науках, их роль в социологических исследованиях.

РАЗДЕЛ 5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

Тема 5.1. Математическое моделирование социальных процессов

Типы математических моделей. Математические модели в социологии. Математическое моделирование социальных процессов с помощью графов.

4.2. Примерный тематический план

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Семинарские занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СОЦИАЛЬНЫМ ОБЪЕКТАМ**	**6**	**4**				**2**	
1.1	Роль и место математики в гуманитарных науках и социологических исследованиях	0,5						Компьютерное тестирование.
1.2	Основные понятия теории множеств. Операции над множествами	3,5	4				2	Компьютерное тестирование. Контрольная работа по теме 1.2
1.3	Бинарные отношения	2						Компьютерное тестирование.
2	**ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ**	**6**	**6**				**2**	
2.1	Матрицы, определители	4	4					Компьютерное тестирование
2.2	Системы линейных алгебраических уравнений	2	2				2	Компьютерное тестирование. Контрольная

								работа по темам 2.1 и 2.2
3	**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ**	**4**						
3.1	Основы дифференциального исчисления	2						Компьютерное тестирование.
3.2	Основы интегрального исчисления	2						Компьютерное тестирование.
4	**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ**	**16**	**16**				**4**	
4.1	Основы комбинаторики	4	4					Компьютерное тестирование. Контрольная работа по теме 4.1
4.2	Вероятность случайного события	2	2					Компьютерное тестирование
4.3	Основные теоремы теории вероятностей	5	6				2	Контрольная работа по темам 4.2 и 4.3
4.4	Дискретные и непрерывные случайные величины	5	4				2	Компьютерное тестирование.
5	**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ**	**2**						
5.1	Математическое моделирование социальных процессов	2						Компьютерное тестирование.
	ИТОГО	**34**	**26**				**8**	

4.3. Рекомендуемая литература

Основная учебная литература

1. Велько, О.А. Основы высшей математики для социологов: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2020. – 303 с.
2. Велько, О.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2022. – 399 с.
3. Красовская, Т.Ф. Высшая математика. Бинарные отношения. Алгебраические структуры / Т.Ф. Красовская, П.В. Плотников, А.В. Киселева. – Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 2021.– 87 с.

Дополнительная учебная литература

4. Velko, O.A. Open type tasks as a means to activate students' creative activity / O.A. Velko, N.A. Moiseeva // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя», 15 – 16 травня, 2019 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. – Краматорськ : ДДМА, 2019. – С. 151–153.
5. Ахтямов, А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб. пособие / А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
6. Велько, О.А. Методические подходы к преподаванию математики студентам-социологам // Математика и информатика в естественнонаучном и гуманитарном образовании. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. –С. 58–61.
7. Велько О.А. Теория вероятностей и математическая статистика: сб. задач / О.А. Велько, Е.В. Воронкова, Г.К. Игнатьева, Л.В. Корчёмкина, И.П. Мацкевич, С.А. Мызгаева; под общ. ред. И. П. Мацкевича. – Минск: МИУ, 2003. – 56 с.
8. Велько, О.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 15 Социальные коммуникации / О.А. Велько // Учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269619. Дата доступа: 02.07.2021.
9. Велько, О.А. Основы математической статистики и их применение в социологических исследованиях : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 110 с. : ил., табл.– Библиогр.: с. 102–104. Деп. в БГУ 29.03.2023. https://elib.bsu.by/handle/123456789/295986.
10. Велько, О. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей

математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 257 с.: ил. – Библиогр.: с. 255–257. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241078. Дата доступа: 06.03.2020.

11. Велько, О.А. Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 74 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 73–74. Деп. в БГУ 29.03.2023. https://elib.bsu.by/handle/123456789/295977.

12. Велько, О.А. Элементы теории вероятностей : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 104 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 99–101. Деп. в БГУ 29.03.2023. https://elib.bsu.by/handle/123456789/295981.

13. Велько, О.А. Элементы теории множеств : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 49 с. : ил. – Библиогр.: с. 48–49. Деп. в БГУ 29.03.2023. https://elib.bsu.by/handle/123456789/295984.

14. Велько, О.А. Эвристическое занятие «Графы как инструмент моделирования процессов природы и общества» / О.А. Велько, Н.В. Кепчик // Матэматыка. – 2020. – № 6. – С. 12 – 20.

15. Воронов, М.В., Мещерякова, Г. П. Математика для студентов гуманитарных факультетов. /М.В. Воронов, Г.П. Мещерякова. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2002. –375 с.

16. Гайшун, Л.Н. Теория вероятностей: Учебное пособие для студентов экономических специальностей / Л.Н. Гайшун, Г.К. Игнатьева, О.А. Велько. – Минск: МИУ, 2002. – 167 с.

17. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2001. – 400 с.

18. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб.пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 10-е изд. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с.

19. Гончарова, Г.А. Элементы дискретной математики / Г.А. Гончарова, А.А. Мочалин. – М.: Форум-Инфра-М, 2004. – 128 с.

20. Жолков, С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. / С.Ю. Жолков – М: УИЦ «Гардарики», 2002. –531 с.

21. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 256 с.

22. Мартон, М.В. Основы математического анализа в социально-экономической сфере : учебно-методическое пособие / М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 79 с. : ил. – Библиогр.: с.

78–79. № 002229032023, Деп. в БГУ 29.03.2023 https://elib.bsu.by/handle/123456789/295970.

23. Мартон, М.В. Элементы теории вероятностей в социологических исследованиях: элементы комбинаторики : учебно-методическое пособие / М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 46 с. : ил. – Библиогр.: с. 45–46. № 002529032023, Деп. в БГУ 29.03.2023. https://elib.bsu.by/handle/123456789/295983.

24. Мацкевич, И.П. Математические методы в психологии / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 3-е изд. – Минск: МИУ, 2009. – 188 с.

25. Мацкевич, И.П. Статистические методы в психологии: Учебно-методический комплекс / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 2-е изд. – Минск: МИУ, 2012. – 194 с.

26. Моисеева Н.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-23 01 15 «Социальные коммуникации»/ Н.А. Моисеева, О.А. Велько; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2021.–239 с.: ил., табл.–Библиогр.: с. 238–239.

27. Петров, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-методический комплекс / В.А. Петров, Г.К. Игнатьева, О.А. Велько. – 2-е изд. – Минск: МИУ, 2009. – 268 с.

28. Суходольский, Г.В. Лекции по высшей математике для гуманитариев: учеб. пособие / Г.В. Суходольский. – Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2001. – 248 с.

Электронные ресурсы

1. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://eduffsn.bsu.by/course/view.php?id=40. – Дата доступа: 04.09.2023.

2. Велько, О.А. Основы информационных технологий: УМК для специальности 1-23 01 05 «Социология» [Электронный ресурс] / О. А. Велько // БГУ. Минск, 18.03.2013. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/37504. – Дата доступа: 04.09.2023.

3. Велько, О.А. Основы информационных технологий. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // БГУ. – Минск, 25.10.2019. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/233275. – Дата доступа: 04.09.2023.

4. Велько, О.А. Современные информационные технологии: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // БГУ. – Минск, 2.07.2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269620. – Дата доступа: 04.09.2023.

5. Велько, О.А. Информационные технологии. Учебная программа УВО для специальности 1-86 01 01 Социальная работа (по направлениям) [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева, М.В. Мартон // БГУ. –

Минск, 20.04.2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/242000. – Дата доступа: 04.09.2023.

6. Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В. А. Еровенко, М.В. Мартон, О.А. Велько // Типовая учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа: – http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164. – Дата доступа: 04.09.2023.

7. Мартон, М.В. Основы информационных технологий: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» [Электронный ресурс] / М.В. Мартон, О.В. Матейко, О.А. Велько // БГУ. – Минск, 2019. – Режим доступа: – http://elib.bsu.by/handle/123456789/218163. – Дата доступа: 04.09.2023.

8. Мартон, М.В. Основы информационных технологий: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности 1-23 01 05 «Социология» / М.В. Мартон, О.М. Матейко, О.А. Велько [Электронный ресурс] // БГУ. – Минск, 30.06.2017. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/189883. – Дата доступа: 04.09.2023.

9. Моисеева, Н.А. Информационные технологии : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-25 01 03 «Мировая экономика». В 2 ч. Ч. 1 / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 131 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 130–131. – Режим доступа: – https://elib.bsu.by/handle/123456789/297259. – Дата доступа: 04.09.2023.

10. Моисеева, Н.А. Информационные технологии : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-25 01 03 «Мировая экономика». В 2 ч. Ч. 2 / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 124 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 122–124. – Режим доступа: – https://elib.bsu.by/handle/123456789/297260. – Дата доступа: 04.09.2023.