

ВОЛНА МАРШАКА И ФРОНТ ПРОНИКНОВЕНИЯ: ПРОСТЫЕ ВЫСОКОТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН РБ, Минск, Республика Беларусь

Рассмотрено уравнение радиационной гидродинамики, когда внутренняя энергия и непрозрачность имеют степенные зависимости от плотности и температуры. Получены высокоточные автомодельные решения для волны Маршака при степенном и экспоненциальном изменении во времени температуры поверхности тела.

Радиационные тепловые волны играют важную роль в физике плазмы и, в частности, в термоядерном синтезе с инерционным удержанием (ICF). В экспериментах с непрямым возбуждением ICF лазерные лучи освещают внутреннюю стенку резонатора с высоким Z , который предназначен для преобразования энергии лазера в рентгеновское излучение. Классическим примером нелинейной диффузии излучения является волна Маршака, впервые рассмотренная в 1958 году [1]. Решения подобного типа представляют несомненный интерес для ICF [2]. Тепловая волна, будучи автомодельной, рассматривается в приближении диффузии в материал с постоянной удельной теплоемкостью и со средней непрозрачностью по Росселанду, как степенной функции от температуры. Гидродинамическое движение не учитывается. Достаточно подробное обсуждение данной проблемы дано Михаласом [3]. Автомодельные решения получены в работах [4–6], когда в пределе твердую стенку можно считать бесконечно плотной [7]; при этом найдено разумное согласие с экспериментальными результатами [8]. Хаммер и Розен [5] предложили решения, основанные на разложении по малому параметру $\varepsilon = \beta/(4 + \alpha)$, когда внутренняя энергия изменяется как T^β , а непрозрачность – как $T^{-\alpha}$. Смит [9] получил автомодельные решения без учета нагретой поверхности с последующим наложением граничного условия.

Пусть при $t \geq 0$ на поверхность пластины ($x = 0$) падает излучение, в результате чего температура поверхности изменяется по степенному либо экспоненциальному законам:

$$T(0, t) = T_0(t/t_0)^k, \quad (1)$$

$$T(0, t) = T_0 e^{2kt}. \quad (2)$$

Примем постоянными плотность материала ρ и его удельную теплоемкость C_v . Для теплового потока F в любой локальной точке запишем:

$$F = -\frac{16\sigma T^3}{3k_R \rho} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (3)$$

Представим непрозрачность по Росселанду степенной функцией $k_R = k_R(T_0)(T/T_0)^{-n}$, причем показатель степени $n = 0$ описывает рассеяние электронов, а значение $n = 3$ относится к связанно-свободному либо свободно-свободному поглощению [10]. Подстановка формулы для непрозрачности в (3) дает выражение для теплового потока

$$F = -\frac{16\sigma}{3(n+4)T_0^n k_R(T_0)\rho} \frac{\partial T^{n+4}}{\partial x}. \quad (4)$$

Отсюда получаем уравнение лучистой теплопроводности (диффузии излучения)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho C_v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{16\sigma}{3(n+4)T_0^n k_R(T_0)\rho} \right) \frac{\partial T^{n+4}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T^{n+4}}{\partial x^2} \quad x > 0, \quad (5)$$

где параметр χ , описывающий лучистую теплопроводность, задается выражением

$$\chi = \frac{16\sigma T_0^3}{3(n+4)k_R(T_0)\rho^2 C_v}. \quad (6)$$

Для решения задач (1), (5) и (2), (5) запишем искомые функции, соответственно, в виде

$$T(x, t) = T_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^k \theta(\eta), \quad \eta = x / \sqrt{2\chi T_0^n t^{(n+3)k}}, \quad (7)$$

$$T(x, t) = T_0 e^{2kt} \theta(\eta), \quad \eta = x e^{2(n+3)kt}. \quad (8)$$

Подстановка (7) и (8) в уравнение (5) дает, соответственно, дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 \theta^{n+4}}{\partial \eta^2} + (1 + k(n+3))\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - 2k\theta = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \theta^{n+4}}{\partial \eta^2} + (n+3)\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - 2\theta = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями $\theta(0) = 1$, $\theta(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 0$. Умножим дифференциальные уравнения (9) и (10) на η и проинтегрируем по частям по области $\eta = [0, \eta_0]$. Для параметра η_0 имеем $V(\eta_0) = 0$. В итоге приходим к интегральным соотношениям, соответственно:

$$\int_0^1 \theta(\xi) \xi d\xi = \frac{1}{2(1+k(n+4))s^2}, \quad \int_0^1 \theta(\xi) \xi d\xi = \frac{1}{2(4+n)s^2}, \quad \xi = \eta/\eta_0. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию $V = \theta^{n+3}$. Для нее из (9)–(11) следуют дифференциальные уравнения (для граничных условий (1) и (2) соответственно):

$$\frac{1+k(n+3)}{n+4} \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1}{n+3} \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - 2k \frac{n+3}{n+4} V = 0, \quad (12)$$

$$\frac{n+3}{n+4} \eta \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1}{3+n} \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - 2 \frac{n+3}{n+4} V = 0. \quad (13)$$

Применив для фронта η_0 ($\xi_0 = 1$) уравнения (12) и (13), находим, соответственно:

$$\frac{\partial V(1)}{\partial \xi} = -\frac{n+3}{n+4} (1 + k(n+3)) \eta_0^2, \quad \frac{\partial V(1)}{\partial \xi} = -\frac{(n+3)^2}{n+4} \eta_0^2. \quad (14)$$

Функцию θ опишем полиномом

$$\theta = (1 + a\xi)(1 - \xi)^{\frac{1}{n+3}}. \quad (15)$$

Подстановка (16) в (12) и (15) дает определяющие трансцендентные уравнения:

$$\left(\frac{3+n}{4+n} (1 + k(3+n)) s^2 \right)^{\frac{1}{3+n}} + \frac{10+3n}{2(3+n)} \left(1 - \frac{(4+n)(7+2n)}{2(3+n)^2(1+k(4+n))s^2} \right) = 1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 V^{\frac{n+4}{n+3}}}{\partial \eta^2} + (n+3)\eta \frac{\partial V^{\frac{1}{n+3}}}{\partial \eta} - 2V^{\frac{1}{n+3}} = 0. \quad (17)$$

Для степенного закона (1) получаем, в частности, решение следующего вида:

$$\theta = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right)^{\frac{1}{n+3}} \left[1 + \left(\left(\frac{(3+n)(1+k(3+n))}{4+n} s^2 \right)^{\frac{1}{3+n}} - 1 \right) \frac{\eta}{\eta_0} \right]. \quad (18)$$

Некоторые результаты расчета на основе (16), (18) и численного решения представлены на рисунке 1. Графики кривых для функций $V(\eta)$ и $\theta(\eta)$, отвечающих аналитическому описанию согласно (18) и численному решению, полностью сливаются, что наглядно свидетельствует о высокоточном решении рассмотренной задачи о волне Маршака, отвечающей лучистой теплопроводности.

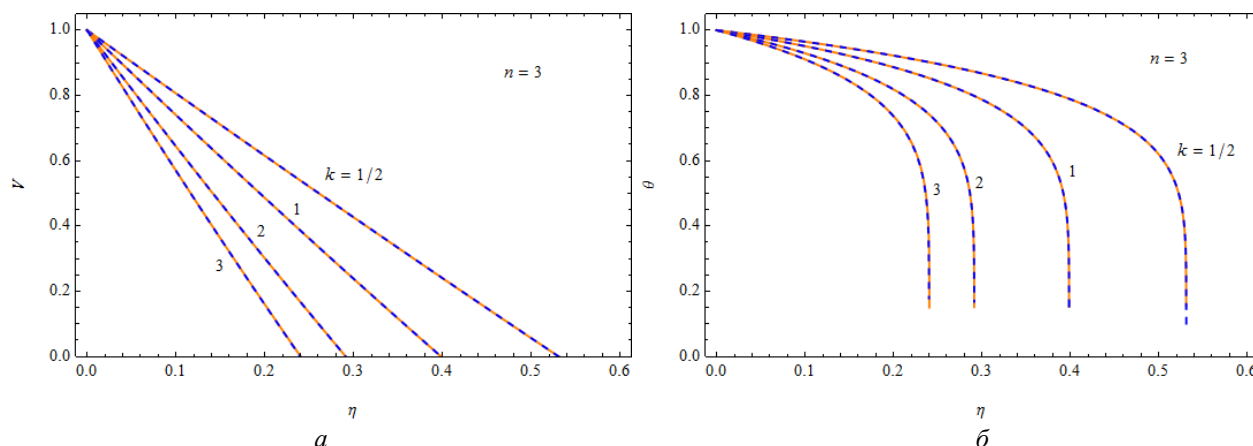


Рисунок 1 – Графики функций $V(\eta)$ (а) и $\theta(\eta)$ (б) на основе численного (сплошная линия) и аналитического (18) (пунктирная линия) решений применительно к граничному условию (1)

Список литературы

1. Marshak, R. E. Effect of Radiation on Shock Wave Behavior / R. E. Marshak // Phys. Fluids. – 1958 – Vol. 1. – N 1 – P. 24–29.
2. Brun, L. Laser Interaction and Related Plasma Phenomena / L. Brun, R. Dautray, F. Delo-beau, C. Patou, F. Perrot, J.-M. Reisse, B. Sitt, and J.-P. Watteau / Plenum, New York, 1977. – Vol. 4. – P. 1059–1080.
3. Mihalas, D. Foundation of Radiation Hydrodynamics / D. Mihalas. – New York, Oxford University Press, 1984. – 718 p.
4. Heaslet, M. A. Diffusion from a Fixed Surface with a Concentration-dependent Coefficient / M. A. Heaslet, A. Alksne // J. Soc. Industr. Appl. Math. – 1961. – Vol. 9. – N. 4. – P. 584–596.
5. Hammer, J. A Consistent Approach to Solving the Radiation Diffusion Equation / J. H. Hammer, M. D. Rosen // Phys. Plasmas. – 2003. – Vol. 10. N 5. – P. 1829–1845.
6. Sanmartin, J. R. and A. Barrero, Self-similar motion of laser half-space plasmas / J. R. Sanmartin, A. Barrero // Phys. Fluids. – 1978 – Vol. 21. – N 11. – P. 1957–1966.
7. Sanz, J. A. Self-similar model for tamped ablation driven by thermal radiation / J. Sanz, J. A. R. Piriz and F. G. Tomasel // Phys. Fluids. – 1992. – Vol. 4. – N 3. – P. 683–692.
8. Sigel, R. X-ray generation in a cavity heated by laser light. III. Comparison of the experimental results with theoretical predictions for x-ray confinement / R. Sigel, R. Pakula, S. Sakabe and G. D. Tsakiris // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 38. – N. 11. – P. 5779–5785.
9. Smith, C. C. Solutions of the radiation diffusion equation / C. C. Smith // High Energy Density Physics. – 2010. – Vol. 6. – P. 48–56.
10. Castor, J. I. Radiation Hydrodynamics / J. I. Castor. – U.S. Department of Energy by University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 2003.