

ОБ ОДНОМ ВЫСОКОТОЧНОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Институт тепло- и массообмена НАН РБ им. А. В. Лыкова, Минск, Республика Беларусь

Предложен новый подход в приближенном решении уравнения лучистой теплопроводности, когда внутренняя энергия и непрозрачность имеют степенные зависимости от плотности и температуры, а температура поверхности тела поддерживается при постоянном значении. Проведенные расчеты на основе полученных аналитических и численных решений показали высокую точность найденных аппроксимаций.

Тепловые волны, вызванные излучением, встречаются в различных астрофизических и лабораторных ситуациях и с разной степенью точности могут быть описаны в диффузионном приближении, когда тепловой поток определяется для любой заданной точки в виде локального градиента плотности лучистой энергии [1]. Несмотря на то, что современные вычислительные методы дают в ряде случаев высокоточные решения, по-прежнему сохраняет актуальность аналитический подход, дающий понимание природы рассматриваемой проблематики, а также позволяющая получать быструю оценку в экспериментальных исследованиях [2, 3]. Первый шаг в данном направлении был сделан Баренблаттом [4], исследовавшим автомодельные решения. Одно из полученных им решений дает линейно возрастающую во времени глубину проникновения тепловой волны; второе отвечает сохранению полной энергии, содержащейся в волне и остающейся постоянной после ее начального выброса в точке пространства. Последний случай подробно рассмотрен в работе Зельдовича и Райзера [5]. Два других точных решения представлены Хаммером и Розеном [5], при этом фактически повторены решения Баренблатта с заменой точки на поверхность. В работе Маршака [6] исследованы варианты получения точных решений данной задачи. Отметим также работу Паттла [7]. Приближенные аналитические решения представлены Хислетом и Алксне [8], Лонгом и Тахиром [9], Гарнье (с соавт.) [10] и в последнее время – Крифом [11].

Наше рассмотрение ограничим сверхзвуковой волной излучения, имеющей четко выраженный фронт со свойствами среды, которые задаются степенными функциями от температуры. В приближении лучистой теплопроводности (отсутствие движения, постоянство плотности среды) уравнение лучистого переноса имеет вид [5]

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e = - \frac{\partial}{\partial x} F, \quad F = - \frac{4}{3K\rho} \frac{\partial}{\partial x} \sigma T^4 \quad (1)$$

где e – внутренняя энергия на единицу массы, ρ – плотность, T – температура, F – тепловой поток, σ – постоянная Стефана–Больцмана, K – средняя непрозрачность по Росселанду, t – время, x – пространственная координата. Предполагается, что e и K имеют степенную зависимость от плотности и температуры: $e = fT^\beta/\rho^\mu$, $K^{-1} = gT^\alpha/\rho^\lambda$, где f и g – константы, α , β , μ и λ – показатели степени.

Рассмотрим случай, когда полупространство $x > 0$ заполнено средой с плотностью ρ , а примыкающее к нему полупространство является пустым. Пусть начиная с момента времени $t = 0$ «холодная» среда ($x > 0$) контактирует по всей поверхности со средой при температуре T_0 . Если пренебречь перемещением, то уравнение лучистого переноса принимает вид

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{K\rho} \frac{\partial \sigma T^4}{\partial x} \quad (2)$$

Подставив в него (1) с учетом $\rho = const$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial T^\beta}{\partial t} = \chi \frac{\partial T^{4+\alpha}}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где $\chi = \frac{16}{12+3\alpha} \frac{g\sigma}{f\rho^{2-\mu+\lambda}}$ – коэффициент, характеризующий тепловой поток [5].

Введя степень $m = (4 + \alpha)/\beta$ и $T^\beta = \theta$, уравнение (3) запишется как

Секция 3. Прикладные проблемы радиопизики

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \theta^m}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \theta^{n+4}}{\partial x^2}, \quad (m = n + 4), \quad (4)$$

что отвечает по форме уравнению лучистой теплопроводности из работы [9]. Исходя из начальных и граничных условий имеем:

$$T(x, 0) = 0 \rightarrow \theta(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

$$T(0, t) = T_0 \rightarrow \theta(0, t) = \theta_0 = T_0^{\frac{1}{\beta}}, \quad t > 0. \quad (6)$$

В безразмерных переменных $\theta = \theta/\theta_0$, $\eta = x/\sqrt{2\chi\theta^{n+3}}$ вместо (4)–(6) получаем [9]

$$\frac{\partial^2 \theta^{n+4}}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \quad \eta > 0, \quad (7)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (8)$$

Умножим уравнение (7) на η и проинтегрируем по области $\eta = [0, \eta_0]$, где η_0 – фронт тепловой (радиационной) волны при $\theta(0 \leq \eta < \eta_0) \neq 0$ и $\theta(\eta > \eta_0) = 0$. В итоге имеем

$$\int_0^{\eta_0} \theta(\eta) \eta d\eta = \frac{1}{2} \rightarrow \int_0^1 \theta(\xi) \xi d\xi = \frac{1}{2\eta_0^2}, \quad (\xi = \frac{\eta}{\eta_0}). \quad (9)$$

Функцию θ опишем полиномами (в первом и втором приближениях), соответственно

$$\theta = (1 + a_1 \xi)(1 - \xi)^{\frac{1}{n+3}}, \quad \theta = (1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2)(1 - \xi)^{\frac{1}{n+3}}. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов a_1 и a_2 введем в рассмотрение функцию $V = \theta^{n+3}$, для которой из (7) получаем уравнение

$$\frac{d^2 V^{\frac{1}{n+3}}}{d\eta^2} + \eta \frac{dV^{\frac{1}{n+3}}}{d\eta} = 0 \rightarrow \frac{\eta}{n+4} \frac{dV}{d\eta} + \frac{1}{n+3} \left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + V \frac{d^2 V}{d\eta^2} = 0. \quad (11)$$

Применив условие $V(\eta_0) = 0$ (с последующим дифференцированием), находим

$$\frac{dV(\eta_0)}{d\eta} = -\frac{n+3}{n+4} \eta_0, \quad \frac{d^2 V(\eta_0)}{d\eta^2} = -\frac{n+3}{n+4}, \quad \frac{d^3 V(\eta_0)}{d\eta^3} = -\frac{(n+3)^2}{(n+4)^3 (2n+7) \eta_0}, \quad \dots \quad (12)$$

Для первого приближения получаем определяющее уравнение

$$\left(\frac{n+3}{n+4} \eta_0\right)^{\frac{1}{n+3}} + \frac{3n+10}{2(n+3)} \left[1 - \frac{(n+4)(2n+7)}{2(n+3)^2 \eta_0^2}\right] = 1. \quad (13)$$

Расчет согласно (13) при $n = 0$ и 3 дает практически точный параметр η_0 , задающий положение фронта тепловой волны: $\eta_0 = 1.231188$ и 1.1199365 с ошибками всего 0.0012% и 0.00014% по сравнению с точными значениями $\eta_0 = 1.231173$ и $\eta_0 = 1.119935$ [9]. Таким образом, полученные решения уравнения лучистой теплопроводности с отмеченными выше приближениями при постоянстве температуры на поверхности тела можно считать высокоточными, причем даже при первом приближении.

Для первого приближения из (9) и (10) получаем окончательно

$$\theta = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n+3}} \left[1 + \left(\left(\frac{n+3}{n+4} s^2\right)^{\frac{1}{3+n}} - 1\right) \frac{\eta}{\eta_0}\right]. \quad (14)$$

Результаты расчета на основе приближенного решения (14) и на основе численного решения уравнения (11) представлены на рисунке 1. Графики, отвечающие аналитическому и численному решениям, практически полностью сливаются.

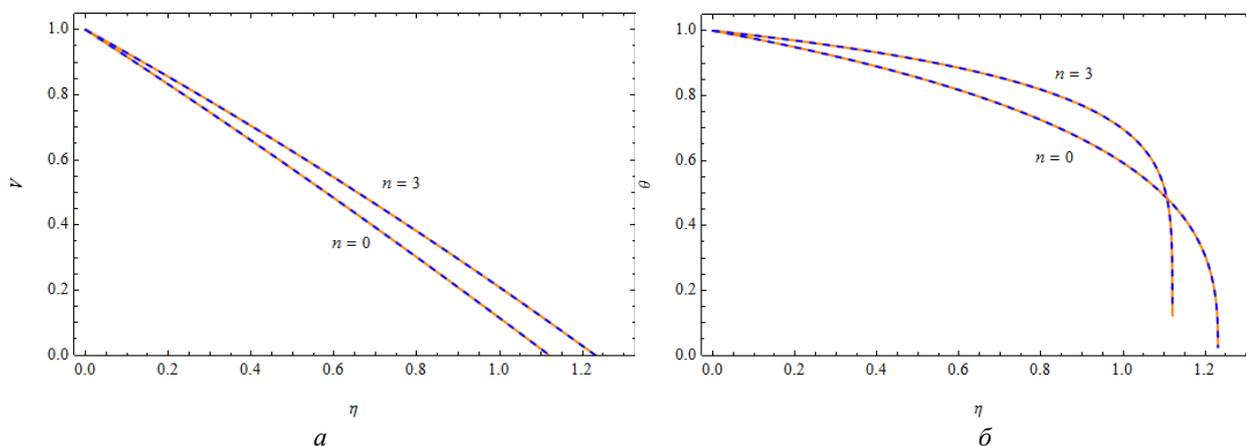


Рисунок 1 – Графики функций $V(\eta)$ (а) и $\theta(\eta)$ (б) на основе численного (сплошная линия) и аналитического (14) (пунктирная линия) решений при $n = 0$ и $n = 3$

Список литературы

1. Hammer, J. A Consistent Approach to Solving the Radiation Diffusion Equation / J. H. Hammer, M. D. Rosen // *Phys. Plasmas*. – 2003. – Vol. 10. N 5. – P. 1829–1845.
2. Heaslet, M. A. Diffusion from a Fixed Surface with a Concentration-dependent Coefficient / M. A. Heaslet, A. Alksne // *J. Soc. Industr. Appl. Math.* – 1961. – Vol. 9. – N. 4. – P. 584–596.
3. Smith, C. C. Solutions of the radiation diffusion equation / C. C. Smith // *High Energy Density Physics*. – 2010. – Vol. 6. – P. 48–56.
4. Баренблатт, Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде / Г. И. Баренблатт // *ПММ*. – 1952. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 67–78.
5. Зельдович, Я. Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер – М.: Физматлит, 2008. – 656 с.
6. Marshak, R. E. Effect of Radiation on Shock Wave Behavior / R. E. Marshak // *Phys. Fluids*. – 1958 – Vol. 1. – N 1 – P. 24–29.
7. Pattle, R. E. Diffusion from an Instantaneous Point Source with a a Concentration-dependent Coefficient / R. E. Pattle // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1959. – Vol. 12. – P. 407–409.
8. Heaslet, M. A. Diffusion from a Fixed Surface with a Concentration-dependent Coefficient / M. A. Heaslet, A. Alksne // *J. Soc. Industr. Appl. Math.* – 1961. – Vol. 9. – N. 4. – P. 584–596.
9. Long, K. F. Plasma induced energy deposition and radiation transport effects in ion beam heated plane metal targets and analytic solutions of the non-linear radiation conduction equation / K. F. Long, N. A. Tahir // *Laser and Particle Beams*. – 1986. – Vol. 4. – N 2. – P. 287–313.
10. Garnier, J. Guy Malinié, Yves Saillard, and Catherine Cherfils-Clérouin Self-similar solutions for a nonlinear radiation diffusion equation / J. Garnier, G. Malinié, Y. Saillard and C. Cherfils-Clérouin // *Phys. of Plasmas*. – 2006. – Vol.13; doi: 10.1063/1.2350167.
11. Krief, M. Analytic solutions of the nonlinear radiation diffusion equation with an instantaneous point source in non-homogeneous media / M. Krief // *Phys. Fluids*. – 2021, 057105; doi: 10.1063/5.0050422.