БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
_______________ О.Г. Прохоренко

«15» июня 2023 г.

Регистрационный № УД – 11871/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2021, типового учебного плана № G31-1-025/пр-тип. от 30.06.2021г. и учебных планов: №G31-1-029/уч. от 30.06.2021 г., №G31-1-029/уч.-СИБД от 30.06.2021 г., №G31-1-209/уч. от 22.03.2022 г., №G31-1-209/уч.-СИБД от 22.03.2022 г.

СОСТАВИТЕЛЬ:

А.И. Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

В.М. Волков, профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент;

М.В. Игнатенко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Т.С. Якименко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.И. Шербаф, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики учреждения образования "Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка", кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования
(протокол № 11 от 24.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 8 от 31.05.2023)

Заведующий кафедрой ____________ М.В. Игнатенко

подпись Ф.И.О.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «Численные методы» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в его содержание.

Учебная программа учебной дисциплины «Численные методы» разработана для студентов III курса очной формы обучения специальности 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Цели и задачи учебной дисциплины

Основные **цели** дисциплины «Численные методы»:

– дать теоретическую и практическую подготовку по методам численного решения задач линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений математической физики, теоретической и прикладной механики;

– ознакомить учащихся с современными технологиями математического моделирования, основанными на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения;

– научить основам работы в системе компьютерной алгебры «Mathematica».

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Численные методы» относится к модулю «Численные методы. Пакеты прикладных программ» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина опирается на знания, полученные при изучении дисциплин «Алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и связана с дисциплиной «Численные методы механики сплошных сред».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Численные методы» должно обеспечить формирование у студентов следующей **специализированной компетенции:**

СК-1. Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых задач механики, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

– источники погрешности численных результатов;

– понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;

– требования корректности постановки задачи;

– основные приемы оценки погрешности численных методов;

– назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, методы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU-факторизация, итерационные методы Ричардсона, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге-Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье);

– достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений;

– современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

– ***уметь:***

– оценить корректность постановки задачи;

– выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи;

– использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;

– анализировать достоверность и трактовать численные результаты;

владеть:

– навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;

– навыками программирования численных алгоритмов;

– основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Численные методы» изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 90 часов, в том числе 52 аудиторных часов, из них: лекции – 30 часов (в том числе 6 ч/ДО), лабораторные занятия – 20 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение.

Об основных задачах и содержании вычислительной математики. Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского.

Тема 2. Элементы теории погрешностей.

Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Примеры неустойчивых алгоритмов. Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций.

Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами. Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Конечные разности. Разделенные и разности, их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона. Представление погрешности интерполирования. Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций. Многочлены Чебышева. Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Интерполирование сплайнами. Интерполяционная задача Эрмита. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье. Численное дифференцирование и оценка его погрешности. Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов.

Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании. Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования. Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования. Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы. Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида.

Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ.

Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности. Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента. LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации. Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра. Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации. Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений. Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.

Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов. Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости. Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона. Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости. Методы Рунге-Кутты. Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса. Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира.

Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем. Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ. Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Тема 10. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма.

Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

Тема 11. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.

Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость. Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости. Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума. Обзорные занятия по теме «Методы численного решения дифференциальных уравнений». Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО) для специальности 1-31 03-02 Механика и математическое моделирование

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение.	2						Опрос
2	Элементы теории погрешностей.	2 (ДО)						Опрос, проверка индивидуальных заданий
3	Интерполирование и приближение функций.	2			2		2	Опрос, отчет по лабораторной работе
4	Приближенное вычисление интегралов.	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, контрольная работа
5	Численные методы решения систем ЛАУ.	4			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий

6	Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе
7	Решение нелинейных уравнений и систем.	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, контрольная работа
8	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе
9	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, контрольная работа
	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2 (ДО)						
10	Численное решение интегральных уравнений Фредгольма.	2			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий
11	Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.	4			4			Опрос, отчет по лабораторной работе, коллоквиум по темам 1-11
	Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.	2 (ДО)						
	Всего часов	**30**			**20**		**2**	**Экзамен**

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Волков В.М. Численные методы: учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч.1. – Минск: БГУ, 2016. – 87 с. – URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/161943.
2. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова. — Москва: ИНФРА-М, 2022. — 368 с. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1852192.
3. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. – 734 с. – По ссылке доступна электронная версия издания 2022 г. – URL: https://e.lanbook.com/book/210368.
4. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 672 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/210674.
5. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 512 с. — Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/2002583.
6. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учеб. пособие / Г. И. Марчук. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. - 608 с. - По ссылке доступна электронная версия издания 2022 г. - https://e.lanbook.com/book/210302.

Перечень дополнительной литературы

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков — М.: Наука, 1987. 632 с.
2. Игнатенко, М. В. Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск: БГУ, 2006. 116 с.
3. Монастырный, П. И. Сборник задач по методам вычислений: учебное пособие / А.И. Азаров, В.А. Басик, М.В. Игнатенко и др./ под ред. П.И. Монастырного. Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 376 с.
4. Самарский, А. А Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1989. 432 с.
5. Бахвалов, Н.С. Численные методы. Решение задач и упражнения: Учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А.А. Корнев, Е.В. Чижонков. – М.: Бином, 2016.– 352 с.

6. Волков, В. М. Численный анализ и оптимизация / В.М. Волков, О.Л. Зубко, И.Н. Катковская, И.Л. Ковалева, В.Г. Кротов, П. Лима. – Минск: Белгослес, 2017. – 207 с.
7. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. – 640 с.
8. Годунов, С. К. Разностные схемы. / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
9. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Academia, 2018. – 96 с.
10. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
11. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.
12. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
13. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 286 с.
14. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.
15. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
16. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. – 470 с.
17. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Альянс, 2016. – 432 с.
18. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
19. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
20. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.
21. Фадеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фадеев, В.П. Фадеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 386 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Рекомендуются следующие формы диагностики результатов учебной деятельности: опрос, отчет по лабораторным работам, проверка индивидуальных заданий, контрольные работы и коллоквиум.

Оценка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, примеров из практики и т. д.

Оценка отчета по лабораторным может включает корректность используемых методов исследования, привлечение знаний из сопредельных областей, организация работы группы.

Контроль УСР проводится преподавателем с использованием ИКТ в форме опроса и проверки результатов выполнения работы.

Полученные студентом количественные результаты учитываются как составная часть итоговой отметки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен – **экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Рекомендуются следующие примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

- опрос – 10%;
- отчет по лабораторным работам и индивидуальным заданиям – 20%;
- контрольные работы – 30%;
- коллоквиум – 40%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационной отметки – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Задание 1.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций. (2 ч.).

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля – письменный отчет по лабораторной работе.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются

1) эвристический подход:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализация обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

2) практико-ориентированный подход:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

3) методы и приемы развития критического мышления, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

4) метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации
по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий;

– выполнение домашнего задания;

– подготовка к лабораторным занятиям;

– курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины;

– подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале механико-математического факультета БГУ https://edummf.bsu.by и содержащие учебные материалы (лекций, вопросы и задачи к коллоквиуму, примерные задания к контрольным работам, задания к лабораторным работам, вопросы к экзамену и т.п.).

Примерный перечень заданий исследовательского характера для контрольных работ

Индивидуальные задания исследовательского характера для самостоятельной работы включают аналитические решения теоретических задач различного уровня сложности, которые сдаются на проверку в письменном виде.

Тема 1. Введение.
Тема 2. Элементы теории погрешностей

1. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований R и r и образующая l, измеренные с точностью до 0,01 см, следующие $R = 23,64$ см, $r = 17,31$ см, $l = 10,21$ см.

2. Высота h и радиус основания R цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении π, выражается при $r = 1$ формулой $p = 96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$. Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить π с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Какая из формул $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$ или $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)$, где $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ является численно более устойчивой для вычисления отклонения S^2 множества событий $x_1, \dots, x_n$.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 1 , задачи 1-30.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций

1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4; -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

2. Функция $f(x) = e^{2x}$ приближается на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трём узлам: $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\sqrt{3}/9$.

3. Пусть функция $f(x)=\sin x$ задана на отрезке $[4;b]$. При каком $b>4$ многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по оптимальным узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \le 10^{-3}$?

4. Оценить число равноудаленных на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ точек, обеспечивающее интерполирование функции $f(x)=\sin x$ с точностью $\varepsilon \le 10^{-2}$.

5. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной (квадратичной) интерполяции, если шаг равен 1?

6. Оценить погрешность приближения функции e^{2x} на [2; 5] интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по оптимальным узлам.

7. С какой точностью можно вычислить по формуле Ньютона $\cos 10{,}5$ по известным значениям $\cos 10$, $\cos 11$, $\cos 12$, $\cos 13$, $\cos 14$, $\cos 15$?

8. Оценить число точек на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающее интерполирование функции $f(x)=\sin x$ с точностью $\varepsilon \le 10^{-2}$.

9. Функция $\ln(x)$ приближается на отрезке $[1,2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырём узлам 1, ${}^{4}\!/_{3}$, ${}^{5}\!/_{3}$, 2. Доказать, что погрешность интерполирования в равномерной норме не превосходит ${}^{1}\!/_{300}$.

10 Дана таблица синусов с шагом 1. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 6, задачи 1-62.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов

1. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т.е. $x_{n+1-i}=-x_i$, $i=1,...,n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле $I(f)\approx\sum_{i=1}^{n}c_i f(x_i)$ для вычисления интеграла $I(f)=\int_{-a}^{a}p(x)f(x)dx$ коэффициенты, соответствующие симметричным узлам равны, т.е. $c_{n+1-i}=c_i$, $i=1,...,n$.

2. Для вычисления $\int_0^1 f(x)dx$ применяется составная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений N, обеспечивающее точность $0{,}5\cdot 10^{-3}$ на двух классах функций:

1) $\|f''(x)\| \le 1$; 2) $\int_0^1 |f''(x)|dx \le 1$.

3. Найти оценку погрешности вычисления интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ при $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ по составной квадратурной формуле

$$S(f) = \big(f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + \ldots + 4f(0{,}9) + f(1{,}0)\big)/30.$$

4. Оценить минимальное количество узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int_0^2 f(x)dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon \le 0{,}5\cdot 10^{-4}$ на классе функций, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in[0;2]} \left|f^{(IV)}(x)\right| \le 1$.

5. Пусть $f \in C^{(1)}[-1;1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1,2,3$, где $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = \big(7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)\big)/15.$$

Проверить, что $\int_{-1}^1 P_5(x)dx = S_5(P_5)$, и доказать, что $S_5(f)$ точна на полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

6. Доказать, что ортогональный многочлен степени n имеет ровно n различных корней на отрезке $[a,b]$.

7. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + \ldots$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int_a^b p(x)P_n^2(x)dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ со старшим коэффициентом 1.

8. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x) = x^n + \ldots$ показать справедливость рекуррентного соотношения $\psi_n(x) = (x + b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n\psi_{n-2}(x)$ с коэффициентом $c_n > 0$.

9. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$.

10. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 7, задачи 1-4; гл. 8, задачи 1-217.

Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ.

1. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_1$, справедливо представление $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_\infty$, справедливо представление $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

3. Пусть $A = A^T$. Доказать, что $\max\limits_{\|x\|_2=1} |(Ax, x)| = \rho(A)$.

4. Пусть числа $d_k > 0, k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k |x_k|$ является нормой вектора x. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

5. Пусть числа $d_k > 0, k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_k (d_k |x_k|)$ является нормой вектора x. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

6. Пусть $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что метод простой итерации $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + \phi$ для системы $Ax = b$ сходится.

7. Пусть $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что $\det A \ne 0$.

8. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что итерационный процесс $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\left(A\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b\right)$ сходится при $\tau > 0$. Оценить его скорость сходимости, если известны $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$.

9. Найти все матрицы, для которых метод итераций будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

10. При каких значениях параметра τ метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$ для системы уравнений $Ax = f$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 5 & 0{,}8 & 4 \\ 2{,}5 & 3 & 0 \\ 2 & 0{,}8 & 4 \end{bmatrix}$ сходится для произвольного приближения?

11. Доказать неравенство $\|x\|_C^2 \le \rho(C)\|x\|_2^2$, где $C = C^T > 0$.

12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{bmatrix}$. Записать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальное значение итерационного параметра τ.

13. Показать, что для системы ЛАУ $Ax = b$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{bmatrix}$, метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b$ сходится для любого начального приближения при $0 < \tau < 0.4$.

14. Найти все матрицы, для которых метод Зейделя будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

1. Пусть $A = A^T$ имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$ Доказать, что при любом $\tau > 0$ итерационный процесс $\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A\left(\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2}\right) = b$ сходиться. Определить оптимальное значение $\tau_{опт}$.

2. Найти α, β, при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем уравнений $x = Hx + \phi$ с матрицей вида $H = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

3. Число обусловленности матрицы A равно q. Найти число обусловленности матрицы A^{-1}.

4. При решении системы ЛАУ с матрицей размерности 128×128 методом сопряженных градиентов за 50 итераций достигается относительная погрешность приближенного решения 1.*e*-3. Какое максимальное число итераций потребуется для достижения точности не хуже, чем 1.*e*-9?

5. Число обусловленности симметричной матрицы K=1.e9. Максимальное собственное значение при этом равно 1000. Вычислить минимальное и максимальное собственные значения обратной матрицы.

6. Какой будет значение переменной x, если все переменные класса double p=(S+1)^2/(S-1)^2; if(p==1); x=1; else x=0; end;

a) p=1.e-20; b) p=1.e-12; c) p=1.e12; d) p=1.e151; p=1.e155.

7. Какая геометрическая фигура в R^3 будет определена множеством точек $\|x\| = const$ в случае максимальной и квадратичной норм?

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.2, задачи 81-88, 107-114.

Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления корня n-ой степени $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$, n-вещественное число.

2. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ методом простой итерации.

3. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 1}{20}$ сходится.

4. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p > 1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

5. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p > 1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

6. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

7. Пусть дана функция $\phi(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x - \gamma$. При каких ограничениях на параметры α, β, γ метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

8. Пусть дана функция $\phi(x) = ae^{-bx^2} + c$, $a \neq 0$, $b \geq 0$. При каких ограничениях на a,b и c метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

9. Построить метод простой итерации для решения уравнения $2 + x = e^x$, $x > 0$.

10. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

11. Дано уравнение $x = \phi(x) = \pi/2 \sin x$, которое решается методом простой итерации $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

12. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

13. Для вычисления $x = \sqrt{2}$ используется итерационный процесс $x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n + \nu(x_n^2 - 2)$. При каком выборе ν этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

14. Построить метод простой итерации для решения уравнения $\cos x - \frac{1}{x}\sin x = 0$, сходящийся при любом начальном приближении $x_0 \neq 0$.

15. Найти область сходимости метода простой итерации для следующего уравнения $x = e^{2x} - 1$.

16. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x) = 3x + \cos x + 1 = 0$ методом простой итерации.

17. Уравнение $x = 2^{x-1}$ решается методом простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

18. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

19. При каких значениях p метод простой итерации $x_{k+1} = x_k + p\left(1 - x^{1/2}\right)$ сходится к корню $x = 1$: а) если $x_0 > 1$; б) если $x_0 < 1$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.4, задачи 52, 54, 105.

Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Используя разностное уравнение, выписать формулу для вычисления интеграла $I_k(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(kx) - \cos(k\alpha)}{\cos x - \cos\alpha} dx$, где α – параметр.

2. Доказать, что для чисел Фибоначчи f_k: $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, справедливо равенство $f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots$

3. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1}-5y_k+6y_{k-1}=0$ удовлетворяет уравнению $y_{k+1}-9y_k+27y_{k-1}-23y_{k-2}-24y_{k-3}+36y_{k-4}=0$

4. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1}-12y_{k-1}+2y_{k-2}+27y_{k-3}-18y_{k-4}=0$ однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y_{k+1}-3y_{k-1}+2y_{k-2}=0$ и $y_{k+1}-9y_{k-1}=0$.

5. Вычислить определитель $\Delta_k=\det A_k$ трехдиагональной матрицы порядка k $A_k=\begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}$, учитывая, что $\Delta_0=1$.

6. Найти решение разностной задачи $y_{k+2}+y_k=0$, $y_0=2$, $y_1=1$.

7. Пусть ϕ_k и z_k – два частных решения уравнения $a_1y_{k+1}+a_0y_k+a_{-1}y_{k-1}=0$, $a_1a_{-1}\neq 0$. Доказать, что определитель матрицы $A_k=\begin{pmatrix} \phi_k & \phi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$ либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех k одновременно.

8. Найти решение разностной задачи $y_{k+2}+4y_{k+1}+4y_k=0$, $y_0=1$, $y_1=4$.

9. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1}-2xy_i+y_{i+1}=0$, $y_0=1$, $y_1=x$ являются полиномы Чебышева первого рода $T_i(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^i+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^i\right]$, $|x|\geq 1$.

10. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1}-2xy_i+y_{i+1}=0$, $y_0=1$, $y_1=2x$, являются полиномы Чебышева второго рода $U_i(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{i+1}-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{i+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$, $|x|\geq 1$.

11. Найти общее решение уравнения $y_{i-1}-5y_i+6y_{i+1}=0$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

12. Найти общее решение уравнения $y_{i-1}-\frac{5}{2}y_i+y_{i+1}=0$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

13. Определить 1000-й член последовательности, первые два члена которой равны единице, а последующие определяются рекуррентными соотношениями $y_{i+1}=y_{i-1}+y_i$, $i=2,3\ldots$.

14. Найти общее решение уравнения $by_{i+1}-cy_i+ay_{i-1}=0$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$

15. Найти общее действительное решение уравнения $2y_{i-1}-y_i+y_{i+1}=0$, $i=0,\pm1,\pm2,\ldots$

16. Найти решение разностной задачи $2y_i+3y_{i+1}+y_{i+2}=0$, $y_0=2$, $y_1=1$.

17. Найти решение разностной задачи $y_{k+2}+4y_{k+1}+4y_k=0$, $y_0=1$, $y_1=4$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.10, задачи 51-56.

Тема 10. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма.

Тема 11. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.

1. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial u}{\partial x}+\phi(x,t)$ на сетке (x_m,t_n), где $x_m=mh$, $t_n=n\tau$, используя шаблоны:

1) $Ш(x_m,t_n)=\{(x_{m-1},t_n),(x_{m+1},t_n),(x_{m-1},t_{n+1}),(x_{m+1},t_{n+1})\}$;

2) $Ш(x_m,t_n)=\{(x_m,t_{n-1}),(x_{m-1},t_n),(x_m,t_n),(x_{m+1},t_n),(x_m,t_{n+1})\}$;

Оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным в точке (x_m,t_n).

2. Построить аппроксимацию условия $u(0,t)=\psi(t)$ с привлечением значений сеточных функций в точках: 1) $\left(\dfrac{1}{2}h,t_n\right)$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}h,t_n\right),\left(\dfrac{3}{2}h,t_n\right),\left(\dfrac{5}{2}h,t_n\right)$. Оценить погрешность аппроксимации.

3. Показать, что разностная схема $\dfrac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\dfrac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на сетке (x_m,t_n), $x_m=mh$, $t_n=n\tau$, со вторым порядком по τ и четвертым по h, если $\dfrac{\tau}{h^2}=\dfrac{1}{6}$.

4. Пусть даны дифференциальное уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\dfrac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\sigma\dfrac{y_{m+1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\sigma)\dfrac{y_{m+1}^n-2y_m^n+y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при ка-

ком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и вторым по h.

5. Исследовать сходимость к решению задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\infty<x<+\infty, \; 0\le t\le T, \; u(x,0)=\psi(x), \quad -\infty<x<+\infty, \; a>0-Const$ решений следующей разностной схемы

$$\frac{y_m^n-y_m^{n-1}}{\tau}=a\sigma\frac{y_{m+1}^n-y_m^n}{h}+a(1-\sigma)\frac{y_m^n-y_{m-1}^n}{h},$$

$$y_m^0=\psi(x_m), \; m=0,\pm1,\pm2,..., \; n=0,1,...N-1, \; N\tau=T.$$

6. Исследовать сходимость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=(1-\sigma)\frac{y_{m-1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m+1}^{n+1}}{2h^2}+\sigma\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{2h^2},$$

$$m=1,2,...M-1, \; n=0,1,...N-1, N\tau=T, Mh=1,$$

$$y_m^0=\psi(x_m), \; u_0^n=0, \; u_M^n=0,$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0\le x\le 1, \; 0\le t\le T,$$

$$u(x,0)=\psi(x),$$

$$u(0,t)=0, \; u(1,t)=0,$$

Здесь $x_m=mh$, $t_n=n\tau$, $0\le\sigma\le1$.

7. При каких значениях параметра $\theta\in[0;1]$ разностная схема $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=(1-\theta)\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}+\theta\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}$ устойчива?

8. Определить, при каких значениях параметра $\theta\in[0;1]$ схема $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\theta\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h}+(1-\theta)\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}=0$ устойчива?

9. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\sigma\frac{y_{m+1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{y_{m+1}^n-2y_m^n+y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и четвертым по h.

10. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\frac{h^2}{2\tau}\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$.

11. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$.

12. Определить порядок аппроксимации разностных схем на решении уравнения теплопроводности и переноса

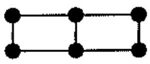
а) $\dfrac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \dfrac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} + f_m$, б) $\dfrac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \dfrac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0$.

13. Методом гармоник исследовать устойчивость разностной схемы

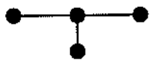
$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0.$$

14. Какой (-ие) из шаблонов соответствует типовым неявным двухслойным схемам для нестационарного уравнения теплопроводности?

1

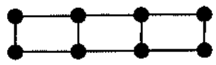


2



3

4



Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Представление чисел с плавающей запятой и особенности арифметических операций с ними. Машинные эпсилон, ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Оценка погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Невязка. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ.
4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
12. Проблема собственных значений.
13. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
14. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
15. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Численные методы механики сплошных сред	Теоретической и прикладной механики	Отсутствуют	Утвердить согласование (протокол № 11 от 24.05.2023г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на _____/_____ учебный год

№п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № ___ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

_____________________ _________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор. физ.-мат. наук, профессор С.М. Босяков