

ISSN 2523-4714

УДК 336.717.06:519.23

Г. О. Читая

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь

**ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ЗАДОЛЖЕННОСТИ ЗАЕМЩИКОВ БАНКА
В СРЕДНЕСРОЧНОЙ ДИНАМИКЕ**

Рассмотрена модифицированная Марковская задача принятия решений, в соответствии с которой определяется оптимальная структура задолженности заемщиков коммерческого банка на среднесрочную перспективу. Математическое моделирование осуществлено на основе сочетания аппарата простых Марковских цепей с методом линейного программирования. Основным результатом решения модифицированной задачи является долевое распределение категорий заемщиков по признаку просроченной задолженности в сочетании с применяемой стратегией взыскания долга.

Ключевые слова: цепи Маркова, линейное программирование, задолженность заемщиков, оптимизация стратегий управления, процентные доходы

Для цитирования: Читая, Г. О. Оптимизация структуры задолженности заемщиков банка в среднесрочной динамике / Г. О. Читая // Бизнес. Инновации. Экономика : сб. науч. ст. / Ин-т бизнеса БГУ. — Минск, 2023. — Вып. 7. — С. 130–136.

G. Chitaya

Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus

**OPTIMIZATION OF DEBT STRUCTURE OF THE BANK'S BORROWERS
IN THE MEDIUM-TERM DYNAMICS**

A modified Markov decision-making problem is considered, according to which the optimal debt structure of commercial bank borrowers for the medium term is determined. Mathematical modeling is carried out on the basis of a combination of the apparatus of simple Markov chains with the method of linear programming. The main result of solving the modified problem is the share distribution of categories of borrowers based on debt in combination with the applied debt collection strategy.

Keywords: Markov chains, linear programming, debt of borrowers, optimization of management strategies, interest income

For citation: Chitaya G. Optimization of debt structure of the bank's borrowers in the medium-term dynamics. *Biznes. Innovatsii. Ekonomika = Business. Innovations. Economics*. Minsk, 2023, iss. 7, pp. 130–136 (in Russian).

В активных операциях коммерческого банка по размещению средств заметную долю занимают кредиты. Банки, прибегая к рекомендуемой методике, потенциальных заемщиков по признаку их надежности в возврате средств соотносят к определенной группе риска. Как правило, количество групп риска является конечным. Для банковской практики характерно ведение так называемой кредитной истории своих клиентов. Можно признать очевидным формирование статистики распределения численности заемщиков на группы риска в дискретной динамике.

**Модифицированная Марковская задача принятия решений
в создании оптимальной структуры задолженности заемщиков банка**

Если предположить, что количество групп риска составляет m , то конечное число элементарных исходов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ будет характеризовать возможность включения (пребывания) заемщиков

в одной из групп риска, а $p_1 = P\{\xi_1\}$, $p_2 = P\{\xi_2\}$, ..., $p_m = P\{\xi_m\}$ — представляют собой вероятности соотнесения заемщиков к соответствующим группам риска. События, отражающие соотнесение заемщиков к группам риска (по крайней мере, по тем клиентам, которые ранее не обращались за кредитами), независимы друг от друга. Из независимости рассматриваемых событий следует также, что если бы нас интересовал только результат на одном каком-то шаге t (в момент времени t), то вероятность $p_i^t = P\{\xi_i^t\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $t = 1, 2, \dots, T$) определяется единственным образом и никак не зависит от предыстории, т. е. от того, какие результаты были получены на предыдущих этапах временной последовательности. В такой интерпретации процесс отнесения заемщиков к группам риска можно рассматривать как Марковский случайный процесс, поскольку вероятность пребывания заемщиков в группе i на временном этапе t (p_i^t) зависит от их пребывания в той или иной группе риска в предыдущий момент времени ($t - 1$) и не зависит от того, как процесс развивался на ранних стадиях.

Если заемщиков квалифицировать как объект, а их принадлежность к группе риска — состояние, то рассмотрение системы «объект — его состояние в заданный момент времени t » позволяет интерпретировать величину p_{ij} как вероятность того, что объект окажется в состоянии j в момент времени t , если он находился в состоянии i в момент времени ($t - 1$). Такие зависимости последовательных случайных величин являются зависимостями Марковского типа, а соответствующие последовательности представляют собой цепи Маркова. Матрицы $P^t = \|p_{ij}^t\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$; $t = 1, 2, \dots, T$) представляют собой матрицы переходных вероятностей. Их также называют стохастическими, так как они обладают свойством, когда все их элементы неотрицательны, и суммы элементов любой строки равны единице [1]. Рассматривая строку таблицы, в которой присутствуют количества заемщиков, распределенные по группам риска, ее можно преобразовать в строку с долями заемщиков из каждой группы риска в общей их численности на данном этапе времени (на шаге t). При такой интерпретации параметр p_{ij} будет показывать долю заемщиков момента времени ($t - 1$), перешедших в момент времени t из категории риска i в категорию j . Доли будут обладать теми же свойствами, что и вероятности строки матрицы P^t . В случае использования матрицы, когда p_{ij}^t постоянны во времени, т. е. не зависят от t , соответствующая Марковская цепь окажется однородной. Подобные матрицы в банковской практике называются матрицами миграции заемщиков-должников между группами риска.

Представление исходных данных о количественном (в абсолютных величинах) распределении заемщиков по группам риска для каждого конечного дискретного набора временных тактов, т. е. в виде матрицы-столбца $H^t = (h_1^t, h_2^t, \dots, h_m^t)$, ($t = 1, 2, \dots, T$), при построении стохастической матрицы позволяет пересчитывать ее по мере получения новых данных в динамике по H^t . Поэтому есть основания пользоваться однородными цепями Маркова, так как временной фактор в определенном смысле может быть учтен с помощью пополняемых исходных данных и их отражением в каждой новой стохастической матрице.

В зависимости от типа Марковской однородной цепи, в частности от того, обладает ли она эргодическим свойством и не является неприводимой [2], можно решить ряд прикладных задач в рамках управления рисковыми группами заемщиков, у которых может возникать задолженность перед банком. Управлять задолженностью заемщиков означает, что имеется некий конечный набор стратегий или альтернатив на предстоящий среднесрочный период времени, разбитый на конечное число этапов. Например, исходя из практики работы банков с заемщиками, этапы соответствуют поквартальной динамике. Среднесрочные кредиты выдаются на 5–8 лет, соответственно поквартальная динамика может насчитывать 20–30 кварталов. Мы исходим из предположения о том, что за такой период при малых колебаниях экономической конъюнктуры, структура задолженности заемщиков по категориям риска может оказаться стационарной в среднесрочной динамике, также стационарной (постоянной) может выступить какая-либо из исходных стратегий (альтернатив) управления задолженностью. Это является основной научной гипотезой данной научной статьи, приемлемость которой подтверждается только лишь эмпирическими данными, согласно которым за 30–40 кварталов структура задолженности незначи-

тельно менялась и способ (стратегия) взыскания долга также оставался неизменным в практике работы одного из коммерческих банков г. Минска за 2000–2020 гг.

Согласно [3, с. 712–719] в Марковской задаче принятия решений предложены два метода оптимизации стационарных стратегий управления системой для бесконечного числа этапов. Теоретическая схема, предусматривающая комбинированное использование простых Марковских цепей с методом динамического программирования для бесконечного временного горизонта соответственно сформулированной выше гипотезе, может быть реализована и для среднесрочной банковской динамики заимствований.

Модифицированная задача управления структурой задолженности заемщиков для конечного числа этапов автором статьи решена в работе [4, с. 506–514], в которой параметры $p_{ij}(k)$ интерпретируются как доли заемщиков, перешедших из группы риска (состояния) i в группу (состояние) j при использовании альтернативы k во временной цепи $(t-1, t)$, а количество стратегий (альтернатив) управления задолженностью заемщиков составляет K ($k = 1, 2, \dots, K$). Следовательно, i -я строка матрицы $P_k = (p_{ij}(k))$ будет показывать долевое перераспределение перешедших из i -й категории заемщиков в другие категории на отрезке времени $(t-1, t)$. Подобное объяснение получают элементы матрицы $R_k = r_{ij}(k)$, соответствующие процентным доходам банка при использовании стратегии управления (взыскания долга) k .

Принимая во внимание введенные обозначения, $v_i(k)$ отвечают ожидаемому или средневзвешенному процентному доходу банка за один этап перехода по i -й категории заемщиков:

$$v_i(k) = \sum_{j=1}^m p_{ij}(k) r_{ij}(k), i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, K. \quad (1)$$

Оптимизацию стратегий управления системой в [3] рекомендуется осуществить полным перебором стационарных стратегий и методом итераций по стратегиям.

Алгоритм реализации метода полного перебора включает в себя 4-шаговую процедуру определения стационарных вероятностей состояний системы и ожидаемую величину дохода за один этап перехода, а в конечном счете выбор отвечающей максимальной величине ожидаемого дохода стационарной стратегии и соответствующих ей стационарных вероятностей состояний исследуемой системы. Количество стационарных стратегий, отталкиваясь от исходных, составляет K^m . Следовательно, при возрастании K и m число стратегий возрастает по степенной функции.

При использовании метода итераций по стратегиям возникает проблема сходимости к оптимальному решению в итеративной процедуре перехода от одной стратегии к другой. Речь идет о необходимости доказательства быстрой сходимости итеративной процедуры оптимизации.

Учитывая отмеченные трудности численной оптимизации по рассмотренным двум алгоритмам, удобно использовать метод линейного программирования [3, с. 722–726]. В модифицированной задаче оптимизации структуры задолженности заемщиков по категориям риска на среднесрочный период, по нашему мнению, правомерно задействовать метод линейного программирования. В то же время следует указать на две примечательные особенности.

Примечание 1. Решение оптимизационной задачи во многом зависит от определения параметров p_{ij} . В учебной литературе они считаются априори заданными, и, как правило, способы их построения не рассматриваются. На практике они в большинстве случаев оцениваются статистически, например, используя соответствующие относительные частоты [5; 6]. В общем случае проблема оценки переходных вероятностей оказывается более сложной [7]. Один из возможных подходов к прозрачному описанию приема, предложенного в работах [4; 5], изложен в [8, с. 385–389].

Примечание 2. Установление значений параметров r_{ij} возможно на основе эмпирических данных для конкретной прикладной задачи.

Согласно [3, с. 724] установление оптимальных значений переменных x_{ik} в рамках задачи линейного программирования (ЗЛП) осуществляется с критерием оптимальности максимизации ожидаемого процентного дохода (E) за этап (временной такт) среднесрочного периода,

в течение которого система вступает в фазу стационарного режима. В соответствии с Марковской задачей принятия решений x_{ik} представляет собой совместную вероятность пребывания системы в состоянии i и применения стратегии k . В модифицированной нами задаче переменная x_{ik} находит объяснение устоявшейся доли i -й категории заемщиков в суммарной величине задолженности заемщиков всех категорий и использовании банком k -й стратегии взыскания долга.

ЗЛП имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K v_i(k) x_{ik} \rightarrow \max, \\ \sum_{k=1}^K x_{jk} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K p_{ij}(k) x_{ik} &= 0, j = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K x_{ik} &= 1, \\ x_{ik} &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметры $v_i(k)$ определяются по формуле (1).

Переменные x_{ik} связаны со стационарными (устоявшимися) вероятностями состояний системы $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ соотношениями

$$\sum_{k=1}^K x_{ik} = \pi_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

При этом

$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1. \quad (4)$$

В интерпретации модифицированной задачи, вектор $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ характеризует стационарную (устоявшуюся) структуру задолженности заемщиков в среднесрочной динамике.

Постановка и решение задачи оптимизации структуры задолженности заемщиков на среднесрочный период

Управление по кредитным операциям коммерческого банка работает с заемщиками (физические лица) в части возврата основной суммы долга и процентов по ней исходя из того, какова продолжительность задолженности по возврату средств в днях. Имеется квартальная динамика за предыдущие четыре года средней численности заемщиков по их просроченной задолженности четырьмя возможными категориями (состояниями): 1–30 дней, 31–60 дней, 61–90 дней, 91 день и выше. Банк за четырехлетний период использовал и намерен продолжить использовать на предстоящую среднесрочную перспективу определенные стратегии по взысканию просроченной задолженности:

- привлечение собственной службы безопасности;
- подача исков в хозяйственный суд по должникам;
- факторинг (продажа долгов третьим лицам).

В зависимости от перехода заемщиков из одной категории в другую (из одного состояния в другое), с квартала на квартал среднеквартальная величина процентных доходов банка менялась в тысячах рублей по используемым трем стратегиям взыскания долга за прошедший четырехлетний период.

Данные квартальной динамики численности заемщиков и сложившихся среднеквартальных процентных доходов одного из минских банков по всем стратегиям управления заимствованы из работы [4, с. 511, 512 табл. 1–6].

Требуется определить оптимальную стационарную структуру задолженности категорий заемщиков в суммарной задолженности и максимальную величину процентных доходов за один временной такт (этап) в среднесрочной динамике.

Решение задачи предполагает сначала нахождение матриц переходных вероятностей Маркова, имеющих природу долевого перераспределения заемщиков-должников по их категориям во временной цепи «предыдущий квартал – текущий квартал» в соответствии с алгоритмом, описанным в работе [8]. Далее, для определения коэффициентов целевой функции ЗЛП (2), отвечающим параметрам $v_i(k)$, используется формула (1).

В соответствии с используемыми обозначениями число стратегий $K = 3$ ($k = 1, 2, 3$), а состояний системы задолженности (категории заемщиков) – $m = 4$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Матрицы $P_k = (p_{ij}(k))$ получаются в рамках программных расчетов, матрицы $R_k = (r_{ij}(k))$ сформированы на основе отчетных данных банка.

В результате расчетов получены матрицы $P_k = (p_{ij}(k))$ и значения параметров $v_i(k)$ (см. таблицу).

$$P_1 = p_{ij}(1) = \begin{pmatrix} 0,862 & 0,052 & 0,032 & 0,054 \\ 0,107 & 0,837 & 0,038 & 0,018 \\ 0,082 & 0,045 & 0,852 & 0,021 \\ 0,002 & 0,004 & 0,001 & 0,993 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = p_{ij}(2) = \begin{pmatrix} 0,945 & 0,027 & 0,006 & 0,022 \\ 0,054 & 0,875 & 0,059 & 0,012 \\ 0,026 & 0,016 & 0,92 & 0,038 \\ 0,004 & 0,005 & 0,007 & 0,984 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = p_{ij}(3) = \begin{pmatrix} 0,973 & 0,011 & 0,002 & 0,014 \\ 0,037 & 0,906 & 0,034 & 0,023 \\ 0,03 & 0,045 & 0,921 & 0,004 \\ 0,003 & 0,002 & 0,005 & 0,99 \end{pmatrix},$$

Численные значения параметров $v_i(k)$

Numerical values of parameters $v_i(k)$

i	$v_i(k)$		
	$v_i(1)$	$v_i(2)$	$v_i(3)$
1	1 638,54	1 499,07	1 521,03
2	1 361,4	1 421,53	1 432,78
3	457,665	376,27	387,58
4	–335	–253,34	–256,24

Оптимальное решение ЗЛП (2) при $K = 3$ ($k = 1, 2, 3$), $m = 4$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) и данных таблицы в матричной записи выглядит следующим образом:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & x_{13}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & x_{23}^* \\ x_{31}^* & x_{32}^* & x_{33}^* \\ x_{41}^* & x_{42}^* & x_{43}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,372 \\ 0 & 0,091 & 0 \\ 0 & 0 & 0,115 \\ 0 & 0,422 & 0 \end{pmatrix}, E^* = \max E = 632,35.$$

В соответствии с формулами (3) и (4) оптимальная (стационарная) структура задолженности заемщиков банка по их категориям на среднесрочный период соответствует вектору: $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*) = (0,372, 0,091, 0,115, 0,422)$ и процентный доход ежеквартально составит в среднем 632,25 тыс. р. Согласно полученному вектору в среднесрочной перспективе доля заемщиков с просроченной задолженностью более 91 день высокая (0,422) и сигнализирует о необходимости изменения проводимой банком кредитной политики в отношении заемщиков — физических лиц. Об эффективности мер (стратегий) взыскания просроченной задолженности по категориям заемщиков свидетельствуют оптимальные значения переменных x_{jk}^* . В частности, в среднесрочной динамике доля просроченной задолженности в 1–30 дней со значением 0,372 будет достигаться при использовании стратегии взыскания долга факторингом, а просроченная задолженностью заемщиков свыше 91 день (доля 0,422) будет иметь место с привлечением хозяйственного суда в разбирательствах с данной категорией заемщиков.

Заключение

1. Просроченная задолженность заемщиков перед коммерческим банком рассмотрена в виде системы с состояниями, соответствующими категориям риска по возврату заемных средств. Аргументировано, что процесс соотнесения заемщиков к группам риска можно рассматривать как Марковский случайный процесс, поскольку вероятность пребывания заемщиков в группе i на временном этапе t (p_i^t) зависит от их пребывания в той или иной группе риска в предыдущий момент времени ($t - 1$) и не зависит от того, как процесс развивался на ранних стадиях.

2. В модифицированной автором Марковской задаче принятия решений параметр p_{ij} не является вероятностной величиной, он показывает долю заемщиков момента времени ($t - 1$), перешедших в момент времени (t) из категории риска i в категорию j . Доли будут обладать теми же свойствами, что и вероятности строки матрицы P^t . Подобные матрицы в банковской практике называются матрицами миграции заемщиков-должников между группами риска.

3. Выдвинута гипотеза о том, что при малых колебаниях экономической конъюнктуры структура задолженности заемщиков по категориям риска может оказаться стационарной в среднесрочной динамике, также стационарной (постоянной) может выступить какая-либо из исходных стратегий (альтернатив) управления задолженностью. Об истинности гипотезы можно судить только лишь историческими эмпирическими данными банковской практики, согласно которым в среднем за 30–40 кварталов структура задолженности незначительно менялась и способ (стратегия) взыскания долга также оставался неизменным.

3. Аргументирована целесообразность применения метода линейного программирования в определении устоявшейся за среднесрочный период структуры просроченной задолженности банка по рассмотренным категориям заемщиков.

4. Сформированы данные по одному из коммерческих банков Минска о численности заемщиков по категориям с просроченной задолженностью и процентных доходах банка в соответствии с используемыми им стратегиями управления и установлена оптимальная структура просроченной задолженности в среднесрочной динамике.

Список использованных источников

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики : учеб. для студентов экон. спец. вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. — М. : ЮНИТИ, 1998. — 1022 с.
2. Кемени, Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл. — М. : Наука, 1970. — 271 с.
3. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций / Хэмди А. Таха; пер. с англ. В. И. Тюпти, А. А. Минько. — 6-е изд. — М. : Вильямс, 2001. — 911 с.
4. Читая, Г. О. Моделирование управления задолженностью заемщиков коммерческого банка : сб. науч. тр. Белорус. гос. экон. ун-та / Г. О. Читая, В. С. Филинчук. — Минск : БГЭУ, 2022. — Вып. 15. — С. 506–514.
5. Зубрилин, Ю. В. Моделирование динамики распределения доходов населения с помощью однородных цепей Маркова / Ю. В. Зубрилин // Экономика и мат. методы. — 1970. — Т. VI, № 5. — С. 774–778.

6. Зайкин, В. С. Применение простых цепей Маркова для прогнозирования расходов населения / В. С. Зайкин // Проблемы моделирования народного хозяйства : сб. науч. тр. / под ред. К. К. Вальтуха, Б. Г. Миркина, Л. С. Мещанинова ; ГНИИ АСПиУ, МинПСАиСУ СССР, ИЭОПП СО АН СССР. – Новосибирск, 1973. – Ч. III. – С. 13–24.

7. Ли, Ц. Оценивание параметров Марковских моделей по агрегированным данным / Ц. Ли, Д. Джадж, А. Зельнер. – М. : Статистика, 1977. – 221 с.

8. Читая, Г. О. Построение Марковской матрицы вероятностей перехода заемщиков коммерческого банка // Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость : материалы VI Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 15–16 мая 2013 г. – Минск : БГЭУ, 2013. – Т. 2. – С. 385–387.

References

1. Ayvazyan S. A., Mkhitarian V. S. *Applied statistics and essentials of econometrics*. Moscow, 1998. 1022 p. (in Russian).

2. Kemeny J., Snell J. *Finite Markov chains*. Moscow, 1970. 271 p. (in Russian).

3. Taha Hamdy A. *Operations research: An introduction*. New York ; London, 1987. 876 p.

4. Chitaya G. O., Filiniuk V. S. Modeling of debt management of borrowers of a commercial bank. *Sbornik nauchnykh trudov Belorusskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta* [Collection of scientific papers of the Belarusian State Economic University]. Minsk, 2022, iss. 15, pp. 506–514 (in Russian).

5. Zubrilin U. V. Modeling the dynamics of the distribution of incomes of the population using homogeneous Markov chains. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods], 1970, vol. VI, no. 5, pp. 774–778 (in Russian).

6. Zaykin V. S. The use of simple Markov chains for forecasting population expenditures. *Problemy modelirovaniya narodnogo khozyaistva* [Problems of modeling the national economy]. Novosibirsk, 1973, part III, pp. 13–24 (in Russian).

7. Lee T. C., Judge G. G., Zellner A. Estimating the parameters of the Markov probability model from aggregate time series data. Amsterdam ; London, 1970. 254 p.

8. Chitaya G. O. Construction of a Markov matrix of transition probabilities for borrowers of a commercial bank. *Ekonomicheskii rost Respubliki Belarus': globalizatsiya, innovatsionnost', ustoichivost': materialy VI Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Economic growth of the Republic of Belarus: globalization, innovation, sustainability: materials of the VI International scientific and practical conference]. Minsk, 2013, vol. 2, pp. 385–387 (in Russian).

Информация об авторе

Читая Гигла Отарович – доктор экономических наук, профессор; заведующий кафедрой математических методов в экономике, Белорусский государственный экономический университет, e-mail: chitaya_g@bseu.by

Information about the author

Chitaya G. – Grand PhD in Economic sciences, Professor; Head of the Department of mathematical methods in economics, Belarusian State Economic University, e-mail: chitaya_g@bseu.by

Статья поступила в редколлегию 17.05.2023

Received by editorial board 17.05.2023