УДК 539.3, 517,951

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В. А. Нифагин

Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, vladnifagin@bsu.by

Пусть в пространстве расположено недоступное для непосредственного наблюдения тело. Однако, его можно облучать с различных сторон и регистрировать тень на некоторой плоскости П, перпендикулярной направлению облучения. Обратная задача состоит в определении формы тела по множеству его теней. В более общей форме решение обратной задачи интегральной геометрии состоит в восстановлении (реконструкции) многомерных функций по их интегральным характеристикам. Внедрение современных компьютерно-математических методов в решение обратных задач интегральной геометрии позволило существенно повысить эффективность медицинской диагностики и обеспечило создание новых методов лечения. Аналогичные методики широко используются в электронной и рентгеновской микроскопии – для получения структур кристаллов и макромолекул, механике разрушения – теории трещин для идентификации малых дефектов, в геофизике – для поиска и разведки месторождений полезных ископаемых, в астрофизике – для исследования полей планет и в других областях науки и техники.

Излагаются новые общие подходы в постановке и решении в теории обратных пространственных задач теории упругости. Таким образом, в результате облучения по разным направлениям мы знаем интегралы от функции f (x) по всевозможным прямым L. Обратная задача состоит в определении функции f (x) по совокупности этих интегралов.

Ключевые слова: линейная краевая задача теории упругости; пространственная задача Римана-Гильберта; обратные многомерные задачи интегральной геометрии.

INVERSE PROBLEMS OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL GEOMETRY

V. A. Nifagin

Belarussian state university, Belarus, Minsk, vladnifagin@bsu.by

Suppose in space there is a body inaccessible to direct observation. However, it is possible to irradiate it from different directions and record the shadow on some plane П perpendicular to the direction of irradiation. The inverse problem consists in determining the shape of the body by the family of its shadow lines. In a more general form, the solution of the inverse problem of integral geometry consists in reconstruction of multidimensional functions using their integral characteristics. The introduction of modern computer-mathematical methods in solving inverse problems of integral geometry in medicine allowed to increase significantly the efficiency of diagnosis and provided the creation of new methods of treatment. Similar methods are widely used in electron and X-ray microscopy for obtaining crystal structures and macromolecules, in fracture mechanics and crack theory.

New general approaches in formulating and solving inverse spatial problems of the theory of elasticity are outlined. Thus, as a result of solving the direct problem, we know the integrals of the function f (x) over all possible straight lines L. The inverse problem consists in determining the function f (x) by the set of these integrals.

Keywords: linear boundary value problem of elasticity theory; spatial Riemann-Hilbert problem; inverse multidimensional problems of integral geometry.

Введение

Разнообразные задачи механики сплошных сред, в частности теории упругости и пластичности решены с помощью редукции к краевой задаче теории аналитических функций, которая в различных постановках называется задачей Римана-Гильберта или задачей сопряжения [1]. В частности, плоские задачи теории упругости и пластичности для односвязных и многосвязных областей, а также ряд задач механики разрушения были решены методом функциональных уравнений, основанном на обобщенном принципе аналитического продолжения [2]. В простейшем случае краевые задачи теории упругости и пластичности в напряжениях и перемещениях сводятся к определению кусочно-аналитических функций внутри области по заданному скачку на граничной кривой. Тогда решение представимо в виде интегралов типа Коши по границе области. Дальнейшее развитие эта методология получила в теории интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений [3], что позволило найти решения многих важных в теоретическом и прикладном аспектах задач.

В работах [4,5] были применены методы теории функций нескольких комплексных переменных к пространственным задачам теории упругости, однако, как универсальные методики решения задач механики сплошных сред эти подходы не получили дальнейшего развития.

Исследования структур матричных комплексных переменных, функции и операторов позволили установить соответствие между описаниями трехмерного действительного пространства E_3 и комплексного пространства C^2. Найдена схема сведения статических пространственных задач теории упругости к действительным бигармоническим задачам Дирихле и Неймана, позволяющая получить граничные условия на действительные функции напряжений. Таким образом, появилась возможность описания основных пространственных краевых упругопластических задач в пространстве C^2 и сведения их к граничным задачам матричных аналитических функций.

Для формулировки граничной задачи в матричных аналитических функциях C^2 преобразуем поверхностные краевые условия в контурные.

$$\sigma_{ij}^{(m)} n_j \Big|_{S^+} = F_i^{(m)} \rightarrow \tilde{\sigma}_{ik}^{(m)} n_k \Big|_{\Gamma^+} = \tilde{F}_i^{(m)} \tag{1}$$

где $\vec{n}_S = \left(n_j\right) \in S^+,\ \vec{n}_\Gamma = \left(n_k\right) \in \Gamma^+$.

Выбор контура Γ осуществляется на основе заданного распределения поверхностных сил $\vec{F}(S)$ с помощью главного вектора и главного момента этих сил

$$\vec{F} = \int\limits_{S^+} \vec{F}\, ds,\ \vec{\mathrm{M}} = \int\limits_{S^+} \left[\vec{r}, \vec{F}\right] ds \qquad \vec{r} = \left(x_i\right) \in S \tag{2}$$

Векторы $\vec{F}$ и $\vec{\mathrm{M}}$ (2) однозначно определяют плоскость Π, в сечении которой поверхности S образуется плоский пространственный контур γ, представляющий всю поверхность S тела. Фигурирующий в условиях (1) вектор нормали к поверхности $\vec{n}_s = \left(n_j\right)$ переходит на кривой γ в вектор $\vec{n}_\Gamma = \left(n_k\right)$. Заметим, что для гладких поверхностей S выбранный выше замкнутый плоский пространственный контур γ проецируется на координатные плоскости в три гладких плоских контура $\gamma_{ij}\ \left(i, j = \overline{1,3},\ i \neq j\right)$

Контурные интегралы в обратных краевых задачах трехмерной интегральной геометрии

Для понимания рассматриваемых интегральных соотношений приведем построение контурного интеграла от матричной функции в $\square^2$. Будем интерпретировать $f_k\left(x_m\right) \in S \subset \mathrm{E}_n,\ k, m = \overline{1,4},\ n = 3,4$ как скалярные действительные функции. А $f\left(\kappa\right) = D_\kappa^{(2)}\left(f_k\left(x_m\right)\right),\ x \in D$ — матричную функцию.

Пусть $\gamma \in S$ простой Жордановый контур и $t = D_{\kappa}^{(2)}(t_m)$ — текущая точка этого контура. Соответственно $f(t)$ — матричная функция на контуре. Считаем, что функция $f(\kappa)$ дифференцируема в S и непрерывна на $S \bigcup \gamma$.

Тогда контурный интеграл $I = \int\limits_{\gamma} f(t)dt$ образуемый умножением матриц

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(\cdot) + i\, f_2(\cdot) & f_3(\cdot) + i\, f_4(\cdot) \\ -f_3(\cdot) + i\, f_4(\cdot) & f_1(\cdot) - i\, f_2(\cdot) \end{pmatrix};\ dt = \begin{pmatrix} dt_1 + i\, dt_2 & dt_3 + i\, dt_4 \\ -dt_3 + i\, dt_4 & dt_1 - i\, dt_2 \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$I = \left(\int\limits_{\gamma} f_1(t_m)dt_1 - f_2(t_m)dt_2 - f_3(t_m)dt_3 - f_4(t_m)dt_4 \right) e_1 +$$

$$+ \left(\int\limits_{\gamma} f_2(t_m)dt_1 + f_1(t_m)dt_2 - f_4(t_m)dt_3 + f_3(t_m)dt_4 \right) e_2 +$$

$$+ \left(\int\limits_{\gamma} f_3(t_m)dt_1 + f_4(t_m)dt_2 + f_1(t_m)dt_3 - f_2(t_m)dt_4 \right) e_3 +$$

$$+ \left(\int\limits_{\gamma} f_4(t_m)dt_1 - f_3(t_m)dt_2 + f_2(t_m)dt_3 + f_1(t_m)dt_4 \right) e_4$$

Разбивая последнее представление $I = \sum\limits_{j=1}^{4} I_j e_j$ по базису, детализируем вычисление интеграла

$$I_1 = \int\limits_{\gamma} f_1(t_m)dt_1 - f_2(t_m)dt_2 - f_3(t_m)dt_3 - f_4(t_m)dt_4$$

Спроектируем пространственный контур γ на координатные плоскости $Ox_k x_{k+1}$ $k,\ k+1 = \overline{1,4}$. Получим невырожденные плоские жордановы кривые $\gamma_{k\,k+1}$ представленные как проекции для трехмерного случая в соответствующих координатных плоскостях.

$$D_{12} \bigcup \gamma_{12} = \overline{D_{12}},\ D_{31} \bigcup \gamma_{31} = \overline{D_{31}},\ D_{23} \bigcup \gamma_{23} = \overline{D_{23}}.$$

Контур γ с учетом ориентации эквивалентен составной кривой с тем же направлением

$$\gamma_1 = \gamma_{AB} \cup \gamma_{BC} \cup \gamma_{CD} \cup \gamma_{DD_1} \cup \gamma_{D_1C_1} \cup \gamma_{C_1B_1} \cup \gamma_{B_1A_1} \cup \gamma_{A_1A}$$

где

$\gamma_{BC} = \gamma_{12}, \gamma_{C_1B_1} = \gamma_{21} \in x_1, 0, x_2;\ \gamma_{AB}, \gamma_{B_1A_1} \in x_1, 0, x_3; \gamma_{CD}, \gamma_{D_1C_1} \in 0, x_2, x_3;\ \gamma_{A_1A}, \gamma_{DD_1} \in x_1, 0, x_2$

Учитывая, что $\gamma_{DD_1} \to 0$ и $\gamma_{A_1A} \to 0$ из-за того, что обход контуров $\gamma_{AB}, \gamma_{CD}, \gamma_{D_1C_1}, \gamma_{B_1A_1}$ производится по прямым параллельным оси Ox_3 в противоположных направлениях, слагаемые входящие в интеграл I_1 по вертикальным отрезкам при интегрировании по действительной переменной t_3 равны нулю.

Таким образом, пространственный контур γ_1 становится плоским

$$\gamma_1 \to \gamma_{BC} \cup \gamma_{C_1B_1} \to \gamma_{12}$$

Также преобразовываются пространственные контуры γ_2 и γ_3 равносильно контуру γ и сводящиеся к плоским контурам γ_{23}, γ_{31}. В итоге, кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ объединяются в один пространственный контур $\gamma_1 \cup \gamma_{12}^{\pm} \cup \gamma_2 \cup \gamma_{23}^{\pm} \cup \gamma_3 \cup \gamma_{31}^{\pm}$, где $\gamma_{12}^{\pm}, \gamma_{23}^{\pm}, \gamma_{31}^{\pm}$ прямые участки контура, соединяющие $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

В результате получаем, что пространственный контур γ эквивалентен объединению плоских контуров $\gamma_{12} \cup \gamma_{23} \cup \gamma_{31}$, и интеграл I_1 вычисляется по следующей формуле

$$I_1 = \int_{\gamma_{12}} \left(f_1(t_m) dt_1 - f_2(t_m) dt_2 \right) + \int_{\gamma_{34}} \left(-f_3(t_m) dt_3 - f_4(t_m) dt_4 \right).$$

По той же схеме вычисляются остальные интегралы $I_j,\ j = \overline{2,4}$.

Прямая задача интегральной геометрии

На первом этапе формируются проекционные данные, на втором по проекционным данным восстанавливается изображение поперечного сечения. Чтобы определить внутреннюю структуру объекта, необходимо получить информацию о ней. Для этого используется излучение, проникающее сквозь объект. Пусть необходимо определить плотность распределения вещества $f(x_i, x_j)$ в сечении объекта. Исследуемый объект в пределах тонкого поперечного слоя просвечивается, например, параллельным пучком хорошо сфокусированных рентгеновских лучей. Направление лучей составляет некоторый угол ϕ с осью x_i. Лучи ослабляются веществом, находящимся внутри объекта, пропорционально его плотности. С противоположной стороны объекта располагается устройство, регистрирующее интенсивность каждого луча, прошедшего через объект. При этом полагается, что лучи распространяются в объекте вдоль прямой линии l, определяемой уравнением $x_i \cos\varphi + x_j \sin\varphi - p = 0$, (1) где p – расстояние от начала координат до соответствующего луча. Тогда интенсивность луча на выходе из объекта равна интегралу от искомого распределения $f(x_i, x_j)$ вдоль траектории l:

$$R(p,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\cos\varphi - x'_j \sin\varphi, p\sin\varphi + x'_j \cos\varphi) dx'_j \qquad (3)$$

где связь между исходной системой координат $\{x_i, x_j\}$ и повернутой на угол ϕ системой координат $\{x_i', y_j'\}$ определяется соотношением $x_i = x_i'\cos\phi - x_j'\sin\phi$, $x_j = x_i'\sin\phi + x_j'\cos\phi$, а уравнение прямой (1) в системе координат $\{x_i', x_j'\}$ имеет вид $x_i' - p = 0$, когда одна из координат зануляется. Итак, Интеграл $R(p, \phi)$ называется радоновским образом или проекцией, а преобразование (2) – преобразованием Радона. Проекции вычисляются под всевозможными углами ϕ и для тех значений p, при которых двумерная функция $f(x, y)$ отлична от нуля. На практике величина p ограничивается физическими размерами исследуемого тела, а угол ϕ изменяется в пределах от 0° до 180°, так как при изменении угла на 180° излучение ведется в строго обратном направлении, поэтому $R(p, \phi) = R(-p, \phi + \pi)$. Удобно ввести в рассмотрение окружность радиуса a, охватывающую исследуемое поперечное сечение. В этом случае интеграл в (3) имеет вид

$$R(p,\varphi) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(p\cos\varphi - x'_j \sin\varphi, x_i \sin\varphi + x'_j \cos\varphi) dx'_j \qquad (4)$$

Таким образом, каждое значение радоновского образа $R(p, \phi)$ есть интеграл от тех значений функции $f(x_i, x_j)$, которые она принимает вдоль луча l, определяемого параметрами p и ϕ. В качестве примера вычислим радоновский образ, например для двух гауссовских импульсов, описываемых соотношением

$$f(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^{2} \exp(\frac{(x_i - x^{(k)}{}_j)^2 + (x^{(k)}{}_j - y_i)^2}{2b^2}) \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), находим

$$R(p, \varphi) = \sum_{i=1}^{2} b\sqrt{2\pi} \exp(\frac{(x^{(k)}{}_i cos\varphi + x^{(k)}{}_j \sin\varphi - p)^2}{2b^2}) \qquad (6)$$

Функция (5) и соответствующий ей радоновский образ (6), вообще говоря, совсем непохожи друг на друга. Однако, между радоновским образом и функцией, порождающей его, имеется взаимно однозначное соответствие, которое лежит в основе большинства алгоритмов восстановления функций плотностей [6].

Сверточный алгоритм

Для восстановления функции f(x_i, x_j) по проекциям R(p, ϕ), необходимо найти преобразование, обратное преобразованию Радона. По сути для определения неизвестной функции f(x_i, x_j) необходимо решить интегральное уравнение (3) или (4). Одной из возможных реализаций этого решения является т.н. сверточный алгоритм. Сверточный алгоритм определяется соотношением

$$f_1(x_i, x_j) = \int_0^{\pi} \tilde{R}(x_i \cos\varphi + x_j \sin\varphi, \varphi) d\varphi \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{R}(x_i \cos\varphi + x_j \sin\varphi, \varphi) = \tilde{R}(p, \varphi) = \\ &= \int_{-a}^{a} h(p_1) R(p - p_1, \varphi) dp_1 \quad i, j = 1,2,3;\ i \neq j \end{aligned} \qquad (8)$$

Выражение (8) представляет свертку проекции R(p, ϕ) (при фиксированном угле ϕ) с функцией $h(p_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cos(\omega p_1) d\omega$

Очевидно, что операция, описываемая соотношением (7), является операцией обратного проецирования. Из (7) и (8) следует, что обратное преобразование Радона реализуется в два этапа. На первом этапе выполняется свертка по первой переменной проекции, результатом которой являются модифицированные проекции $\tilde{R}(s, \varphi)$. На втором этапе осуществляется их обратное проецирование.

Заключение

В пространственном двухэтапном алгоритме восстановления используется представление преобразования Радона в виде композиции двух двумерных преобразований. На первом этапе для каждого из направлений φ решается (7). На втором этапе решается (8) при фиксированном φ, что позволяет восстановить плотность. Дискретная расчетная схема показала наличие артефактов вблизи границы области восстановления, что свидетельствует о недостаточности числа направлений и величины шага.

Библиографические ссылки

1. *Yu. L. Rodin, The Riemann Boundary Problem on the Riemann Surfaces,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1988).
2. *Мирсалимов В. М.* Неоднородные упругопластические задачи - М.: Наука, 1987. – 256 с.
3. *N. P. Vekua,* Systems of Singular Integral Equations and Boundary-Value Problems, [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
4. *Александров Л. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости / Александров Л.Я., Соловьев Ю.И. — М.: Наука, 1978.
5. *Нифагин, В. А*. Методы функций многих комплексных переменных в пространственных задачах математической теории пластичности /В. А. Нифагин – Минск: БНТУ, 2008. – 191 с.
6. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям / Г. Хермен. – М.: Мир, 1983.