УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЯЖЕЛОГО АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА ВБЛИЗИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКИ

Р. Н. Нескородев

Донецкий государственный университет, Россия, ДНР, Донецк, nromn_72@mail.ru

В работе предложено построение решения трехмерных уравнений теории упругости анизотропного тела, представляющего собой массив горных пород с вертикальной выработкой. Массив моделируется полупространством. Общее представление решения для функций перемещений выражено через три аналитические функции обобщенных комплексных переменных. Полученное решение удовлетворяет граничным условиям на границе полупространства и содержит произвол для удовлетворения условиям на боковой поверхности. Приведены результаты численных исследований.

Ключевые слова: анизотропный массив горных пород; вертикальная выработка; напряженное состояние; функции обобщенных комплексных переменных.

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODOLOGY FOR INVESTIGATION THE STRESS-STRAIN STATE OF A HEAVY ANISOTROPIC MASSIF NEAR A VERTICAL EXCAVATION

R. N. Neskorodev

Donetsk state university, Russia, DPR, Donetsk, nromn_72@mail.ru

The paper proposes the construction of a solution of three-dimensional equations of the theory of elasticity of an anisotropic body, which is an array of rocks with vertical excavation. The massif is modeled by a half-space. The general representation of the solution for displacement functions is expressed in terms of three analytical functions of generalized complex variables. The resulting solution satisfies the boundary conditions at the boundary of the half-space and contains an arbitrary one to satisfy the conditions on the side surface. The results of numerical studies are presented.

Keywords: anisotropic rock mass; vertical excavation; stress state; functions of generalized complex variables.

Введение

В работе [1] для изотропного и в работе [2] для трансверсально-изотропного массива с вертикальной выработкой кругового сечения получены точные решения, описывающие напряженно-деформированное состояние вблизи полости от собственного веса. В данной работе предлагается решение трехмерной задачи теории упругости анизотропного тела, представляющее собой массив горных пород с вертикальной выработкой. Получены результаты численных исследований для выработок эллиптического сечения.

Постановка задачи

Рассматривается массив горных пород, ограниченный горизонтальной плоскостью (дневная поверхность). Отнесем его к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. От плоскости Oxy внутрь идет вертикальная полость в виде цилиндра произвольного сечения. Требуется определить напряженно-деформированное состояние массива около полостей от действия сил собственного веса.

Считаем, что свойства горных пород в разных направлениях различны и для описания их поведения используем модель упругого анизотропного тела. Полагаем линейную связь между напряжениями и деформациями, выраженную обобщенным законом Гука в форме [2]

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{6} a_{ik}\sigma_k\,, \quad \text{или} \quad \sigma_i = \sum_{k=1}^{6} A_{ik}\varepsilon_k \tag{1}$$

где a_{ik} - коэффициенты деформации, а A_{ik} - модули упругости, $i=\overline{1,6}$.

Для компактной записи уравнений (1) и (2) введены следующие обозначения

$$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6 \quad \text{для} \quad \sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy};$$
$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6 \quad \text{для} \quad \varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy}.$$

Уравнения (1) вместе с уравнениями равновесия соотношениями Коши образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропных средах.

Массив рассматривается как тяжелое упругое полупространство, свободное от напряжений на дневной поверхности

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad \text{при } z = 0. \qquad (2)$$

Для определения компонент напряжений и перемещений необходимо проинтегрировать уравнения равновесия с учетом закона Гука граничных при условиях (2).

Проекции вектора перемещений $u_k(x, y, z)$ и напряжения $\sigma_i(x, y, z)$ далее будем представлять в виде суммы

$$u_k = u_k^0 + u_k^* \quad (k = 1,2,3), \quad \sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^* \quad (i = \overline{1,6}), \qquad (3)$$

где функции u_k^0 и σ_i^0 определяют решение в нетронутом массиве, а u_k^* и σ_i^* – отражают влияние выработок.

Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве от действия сил собственного веса

Определим компоненты напряженно-деформированного состояния в нетронутом массиве под действием сил тяжести. Будем считать, что толща пород представлена однородными по плотности породами, т.е. плотность $\rho = const$. Отсутствие границ в направлении осей Ox и Oy накладывает ограничения на компоненты напряжений и перемещений. Они не должны зависеть от этих координат. Поэтому [2]

$$u_k^0 = u_k^0(z) \ (k = 1,2,3), \quad \sigma_i^0 = \sigma_i^0(z), \ \left(i = \overline{1,6}\right). \qquad (4)$$

Для определения величин u_k^0 и σ_i^0 в нетронутом массиве проинтегрируем уравнения равновесия и уравнения закона Гука (1) при условиях (2) на границе полупространства. В принятой системе координат (ось Oz направлена вниз) объемные силы имеют вид $X = Y = 0$, $Z = \rho g$, где g – ускорение силы тяжести, а ρ – плотность.

В результате получим

$$\sigma_i^0 = \tau_i \sigma_3^0 = -\tau_i \rho g z, \quad \left(i = \overline{1,6}\right), \quad u_k^0 = -\alpha_k \rho g z^2 / 2 + c_k, \quad (k = 1,2,3). \qquad (5)$$

Здесь введены обозначения $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = \tau_5 = 0$, а величины τ_1, τ_2, τ_6 и α_k определяются из системы уравнений

$$a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i6}\tau_6 = -a_{i3}\tau_3 \qquad (i = 1,2,6) \tag{6}$$

и соотношений

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{6} a_{5n}\tau_n\,, \quad \alpha_2 = \sum_{n=1}^{6} a_{4n}\tau_n\,, \quad \alpha_3 = \sum_{n=1}^{6} a_{3n}\tau_n\,. \tag{7}$$

Перемещения и напряжения в массиве с вертикальными выработками

Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет появления в массиве вертикальных выработок, описываются функциями $u_k^*(x,y,z)$, которые являются результатом интегрирования однородных уравнений равновесия, удовлетворяющих условиям (2). Рассматривая частный случай для трансверсально-изотропных горных пород с плоскостью изотропии, параллельной плоскости Oxy, можно получить точное решение задачи для выработки эллиптического сечения. В этом случае $u_1^* = -\partial_1 u_3^*$, $u_2^* = -\partial_2 u_3^*$, уравнения равновесия приводятся к гармоническому уравнению относительно функции u_3^*. Решением этого уравнения является функция

$$u_3^* = \varphi(\eta) + \overline{\varphi(\eta)}\,, \quad \eta = x + iy\,. \tag{8}$$

Напряжения принимают вид

$$\sigma_1^* = 2zA_{66}\partial_2^2 u_3^*, \quad \sigma_2^* = 2zA_{66}\partial_1^2 u_3^*, \quad \sigma_6^* = -2zA_{66}\partial_1\partial_2 u_3^*, \quad \sigma_3^* = \sigma_4^* = \sigma_5^* = 0\,.$$

Полные перемещения и напряжения представляются в виде сумм (3), где в представлениях (5) необходимо положить $\tau_1 = \tau_2$, а $\tau_4 = \tau_5 = \tau_6 = 0$.

После удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности в случае круговой полости можно получить следующие соотношения для полных напряжений

$$\begin{gathered}\sigma_1 = -z\tau_1\rho g(1 - R^2/2(\eta^2 + \bar\eta^2)/r^4)\,,\\ \sigma_2 = -z\tau_1\rho g(1 + R^2/2(\eta^2 + \bar\eta^2)/r^4)\,,\\ \sigma_6 = -z\tau_1\rho g i R^2/2(\eta^2 - \bar\eta^2)/r^4)\,, \quad \sigma_3 = -z\tau_3\rho g\end{gathered} \tag{9}$$

Решение в форме (9) получено С.Г.Лехницким [2]. Оно построено в полярной системе координат и может служить в качестве теста при решении задач другими методами для более общих случаев анизотропии и сечений выработки.

Численные исследования

Численные исследования проведены для случаев, когда варьировались геометрия эллиптической выработки и материал, из которого сложены горные породы. В качестве материала выбирался Алевролит1, Алевролит2 и гранит изотропный. Рассматривался массив, ослабленный выработкой эллиптического сечения с полуосями a и b, направление которых совпадает с направлением осей Ox и Oy соответственно. Полуось a принималась равной двум метрам, а b – варьировалась. Расчеты проведены для случаев когда $b=1$, $b=2$ или $b=3$ метрам.

Во всех рассмотренных случаях напряжения являются сжимающими. Наиболее подходящей выработкой, в случае, когда плоскость изотропии совпадает с плоскостью Oxy, является круговая, так как вокруг нее образуется равномерно распределенное поле напряжений. Если же плоскость изотропии наклонена к горизонту, то возможен поиск подходящей конфигурации выработки с точки зрения более равномерного распределения вокруг нее напряжений.

Библиографические ссылки

1. *Динник А. Н.* Распределение напряжений вокруг подземных выработок / А.Н. Динник, А.Б. Моргаевский, Г.Н. Савин // Тр. совещ. по управл. горным давлением. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1938. С. 7 – 55.

2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – Наука, 1977. – 416 с.