УДК 511

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ В БЕЛАРУСИ

И. М. Морозова[1], О. Н. Кемеш[2], Н. В. Шамукова[3]

[1), 2)] *Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск,* [1)] *inna.morozova@tut.by,* [2)] *kemesh.oksana@gmail.com*
[3)] *Военная академия Республики Беларусь, Беларусь, Минск, shamukova_n@mail.ru*

В статье представлена история развития в Беларуси теории чисел. Приведены результаты, полученные белорусскими математиками в этой области важнейшие и перспективные задачи, требующие решения.

Ключевые слова: теория чисел; В.Г. Спринджук; метрическая теория диофантовых приближений; размерность Хаусдорфа; мера Лебега; теорема Хинчина.

NUMBER THEORY IN BELARUS

I. M. Morozova[1], O. N. Kemesh[2], N. V. Shamukova[3]

[1), 2)] *Belarusian State Agrarian Technical University, Belarus, Minsk,*
[1)] *inna.morozova@tut.by,* [2)] *kemesh.oksana@gmail.com*
[3)] *Military Academy of the Republic of Belarus, Belarus, Minsk, shamukova_n@mail.ru*

The article presents the history of the development of number theory in Belarus. The results obtained by Belarusian mathematicians in this area are presented, the most important and promising problems that need to be solved.

Keywords: number theory; V.G. Sprindzhuk; metric theory of Diophantine approximations; Hausdorff dimension; Lebesgue measure; Khinchin's theorem.

Введение

Современная научная школа теории чисел в Беларуси имеет давнюю историю развития. Беларусь – родина выдающихся, теоретико-числовиков Р.О. Кузьмина (1891-1949) и Л. Г. Шнирельмана (1905-1938) – российских и советских математиков, член-корреспондентов АН СССР. До войны в Белорусский государственный университет (БГУ) был приглашен для чтения лекций студентам и специалистам академик АН СССР А. О. Гельфонд, незадолго до этого (1934) решивший седьмую проблему Гильберта. В конце 50-х годов прошлого века в БГУ действовал семинар по теории чисел под руководством доцента В.М. Ширшова, в работе которого принимал участие студент университета В.Г.

Спринджук, ставший в последствии, основателем нового направления в математике Беларуси.

С 1963 года В. Г. Спринджук начал работать в Институте математики НАН Беларуси, и это время можно считать началом системных исследований по теории чисел. Уже в 1964 году В.Г. Спринджуком была решена известная проблема специалиста по теории чисел К. Малера, более тридцати лет не поддававшаяся усилиям многих известных математиков. В 1969 году в Институте математики была создана лаборатория теории чисел, которую возглавлял до конца своей жизни (1987) академик Беларуси В.Г. Спринджук. Он в 1970 году первым из математиков Беларуси был приглашен для выступления с докладом на Международном математическом конгрессе в Ницце.

За эти годы школой теории чисел подготовлено более 30 кандидатов наук и три доктора наук, издано пять монографий [1], [2], [3], [4], [5].

Математики Беларуси провели пять международных конференций по теории чисел, выступали с докладами на различных международных конференциях, читали лекции более чем в 50 университетах мира.

Заслуги белорусских математиков были отмечены государством: в 1976 году С.В. Котов стал лауреатом премии Ленинского коммунистического союза молодежи Белоруссии, в 1999 году В.И. Бернику присуждена премия Академии наук Беларуси, в 2004 году В.И. Берник и В.В. Бресневич получили Государственную Премию Республики Беларусь.

Метрическая теория трансцендентных чисел

В 1932 году К. Малер предложил классификацию чисел, основанную на порядке аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов в этих числах [1].

Обозначим через $L_n(w)$ множество вещественных чисел ω, для которых неравенство

$$\left|P(\omega)\right| < H^{-w} \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$H = \max\limits_{1\le i\le n}\left|a_i\right| -$ высота многочлена $P(x)$. В.Г. Спринджук доказал, что множество $L_n(w)$ при $w > 0$ имеет нулевую меру Лебега. Из этого результата вытекает доказательство вещественного случая проблемы Малера. Суть доказательства состояла в использовании принципиально нового метода, который назвали методом существенных и несущественных областей.

Неравенство (1) обобщалось В.Г. Спринджуком. Он выдвинул гипотезу, согласно которой неравенство

$$\prod_{i=1}^{k}|P(\omega_i)| < H^{-n+k-1-\varepsilon}, 1 \le k \le n, \tag{2}$$

имеет для почти всех $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in R^k$ лишь конечное число решений при любом $\varepsilon > 0$. Гипотеза В.Г. Спринджука была доказана В.И. Берником [6].

Развивая методы В.Г. Спринджука, В. И. Берник и В.В. Бересневич доказали полный аналог теоремы А. Я. Хинчина. В докторской диссертации В.И. Берник решил проблему Бейкера-Шмидта, найдя точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, для которых неравенство $|P(x)| < H^{-w}$, $w > n$ имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах степени n и высоты H.

Обозначим через μA меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Пусть $£_n(\psi)$ — множество точек x некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\psi(H) \tag{3}$$

при монотонно убывающей функции $\psi(x)$ имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах P степени n и высоты H. Тогда

$$|P(x)| < H^{-n}\,\mu £_n(\psi) = \begin{cases} 0, \sum_{H=1}^{\infty}\psi(H) < \infty \\ \mu I, \sum_{H=1}^{\infty}\psi(H) = \infty \end{cases} {}^{+1}\psi(H) \tag{4}$$

утверждение о сходимости ряда в (4) доказано В. И. Берником, а о расходимости его учеником В. В. Бересневичем, доктором физ.-мат. наук.

В начале 2000 годов В.И. Берник, В.В. Бересневич, Д. Клейнбоком вместе с филдсовским лауреатом Г. Маргулисом обобщили результат (4), заменив многочлен на невырожденную кривую $G \in \mathbb{R}^n$, не лежащую целиком в $\mathbb{R}^l$, $1 \le l < n$. Еще более общие задачи решены в работах, в которых рассмотрены совместные приближения в пространстве действительных, комплексных и p-адических чисел [7], [8].

Отметим другие результаты, связанные с неравенствами (1), (3). И.Л. Мороцкой получен аналог теоремы А. Бейкера в p-адическом случае, а позднее [9] доказан аналог гипотезы Бейкера-Шмидта на поле p-адических чисел. Комплексный вариант этой гипотезы рассмотрен в [10]. Продвижение в исследовании неравенств (2) было сделано Ф.Ф. Желудевичем, который решил гипотезу Спринджука о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов в трех метриках одновременно. И.Р. Домбровский рассмотрел неравенство (2) с полиномами, имеющими несколько совпадающих коэффициентов и нашел размерность Хаусдорфа множеств действительных векторов с заданным порядком их покоординатного приближения корнями одного и того же многочлена.

Заключение

За более чем за 50 лет исследований по теории чисел в Беларуси получено много важных и интересных результатов. Установлена асимптотика числа решений диофантовых неравенств с использованием равномерного распределения дробных долей последовательности. Доказан ряд метрических теорем, которые находят применения в математическом анализе, теории уравнений математической физике, криптографии. В области трансцендентных чисел исследовано арифметическая природа гипергеометрических функций Зигеля с алгебраическими параметрами. Установлена связь между величинами решений диофантовых уравнений и числом классов идеалов. Дано эффективное описание целых алгебраических чисел с дискриминантами, содержащими фиксированные простые делители. Усилен результат Е. Вирзинга о приближении действительных чисел алгебраическими числами ограниченной степени. Исследовано влияние арифметических свойств коэффициентов многочленов на характер аппроксимации нуля их линейной комбинации. Построена теория исследования совместных минимумов линейно независимых форм и получено решение проблемы Ринна.

В настоящее время специалистами в области теории чисел решаются следующие проблемы: получение оценок для целочисленных многочленов заданной степени и высоты для которых, указаны оценки сверху для модулей производной в корне и величины дискриминантов; ведется исследования обобщение леммы Гельфонда с поля действительных чисел на совместные приближения в полях действительных, комплексных, *p*-адических чисел.

Исследования проблем теории чисел ведутся в Институте математики НАН Беларуси (Берник В.И., Васильев Д.В., Калоша Н.И., Коледа Д.В., Кудин А.С.), в Белорусском государственном аграрном техническом университете (Морозова И.М., Кемеш О.Н., Пантелеева Ж.И.), в Могилевском государственном университете имени А.А. Кулешова (Сакович Н.В., Засимович Е.В.), в Гродненском государственном университете имени Янки Купалы (Карлюкова И.А.), в Военной академии Республики Беларусь (Шамукова Н.В.).

Библиографические ссылки

1. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел/ В.Г. Спринждук. – Минск: Наука и техника, 1967. — 184 с.
2. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений/ В.Г. Спринждук. — Минск: Наука, 1977. — 143 с.
3. *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных/ В.Г. Спринждук. — Минск: Наука, 1982. — 287 с.
4. *Bernik V. I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds/ V.I. Bernik, M.M. Dodson – Cambridge: CUP. – 1999. – V. 137. – 172 p.
5. *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа/ В.И. Берник, Ю.В. Мельничук – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
6. *Берник, В. И.* Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Известия АН СССР. Серия. математика. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.
7. *Берник В. И.* Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\square \times \square \times \square_p$ / В.И. Берник, Н.И. Калоша // Весцi Нац. акадэмii навук Беларусi. Серыя: фiз.-мат. навук. – 2004. – № 1. – С. 121–123.
8. *Bernik V.* Simultaneous Diophantine approximation divergent in the real, complex, and *p*-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson //Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 149 – 2010. № 2. – P. 193–216.
9. *Берник В. И.* Диофантовы приближения в $\square_p$ и размерность Хаусдорфа/ Берник В.И., Мороцкая И.Л. // Весцi. Нац. Акадэмii навук Беларусi. Серыя: фiз.-мат. навук. – 1986. – № 3. – С. 3-9.
10. *Берник В. И.* Регулярные системы комплексных алгебраических чисел/ Берник В.И., Сакович Н. В. // Доклады Нац. академии наук Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 10–13.