УДК 531.38; 531.39

ОДИН СЛУЧАЙ ПОЛУРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ПЕРВОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ НЕАВТОНОМНОГО ГИРОСТАТА

А. В. Мазнев[1], Ю. С. Горбунова[2]

[1] *Донецкий национальный университет, ДНР, Донецк, o.mazniev@donnu.ru*
[2] *Академия гражданской защиты, ДНР, Донецк,yulya_gorbunova_1993@mail.ru*

Рассмотрена задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием потенциальных и гироскопических сил. При некоторых условиях на параметры задачи построено решение исходных уравнений, которые характеризуются линейной структурой скорости собственного вращения от независимой переменной.

Ключевые слова: прецессии; переменный гиростатический момент; потенциальные и гироскопические силы.

ONE CASE OF SEMI-REGULAR PRECESSION OF THE FIRST TYPE IN THE PROBLEM OF THE MOTION OF A NON-AUTONOMOUS GYROSTAT

A. V. Maznev[1], Y. S. Gorbunova[2]

[1] *Donetsk National University, DPR, Donetsk, o.mazniev@donnu.ru*
[2] *The Civil Defence Academy, DPR, Donetsk, yulya_gorbunova_1993@mail.ru*

The problem of motion of a gyrostat with a fixed point under the action of potential and gyroscopic forces is considered. Under some conditions on the parameters of the problem, a solution of the initial equations is constructed, which are characterized by a linear structure of the velocity of own rotation from an independent variable.

Keywords: precessions, variable gyrostatic momentum, potential and gyroscopic forces.

Введение

Прецессионные движения твердого тела и гиростата относятся к наиболее наглядным, с механической точки зрения, движениям и находят широкое применение в важной для техники теории гироскопических систем [1]. Обзор результатов, полученных в изучении прецессий гиростата с постоянным гиростатическим моментом, под действием потенциальных и гироскопических сил изложены в работах [2,3]. В последнее время интенсивно рассматриваются условия существования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом в силовых полях сложной структуры. В монографии [4] приведены результаты по изучению не только регулярных прецессий гиростата, но и полурегулярных прецессий первого и второго типов, а также прецессий общего вида и прецессионно-изоконических движений гиростата.

Доклад посвящен изучению полурегулярных прецессий первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с учетом переменности гиростатического момента. Построено решение уравнений движения гиростата, которое описывает рассматриваемое программное движение и представляет собой элементарные функции от вспомогательной переменной. Зависимость данной переменной от времени находится обращением рациональной функции.

Постановка задачи.

Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [5]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{0}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ – вектор гиростатического момента; $A = diag(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции; $B = diag(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = diag(C_1, C_2, C_3)$ матрица, определяющая квадратичные члены по компонентам единичного вектора оси симметрии силовых полей $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$ обозначает дифференцирование по времени t. Уравнения (1),(2) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная. Все указанные выше переменные и параметры заданы в главной системе координат $Oxyz$ единичными векторами $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ (O – неподвижная точка гиростата).

Полурегулярные прецессии гиростата первого типа зададим векторным инвариантным соотношением (ИС)[2,3]

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nu} + g(\nu_3)\boldsymbol{\beta}, \tag{5}$$

где ε_0 – скорость прецессии; $g(\nu_3)$ – дифференцируемая функция переменной ν_3, определяющая скорость собственного вращения гиростата; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – постоянный единичный вектор $(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1)$.

Подставим $\boldsymbol{\omega}$ из (5) в уравнение Пуассона (2)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = g(\nu_3)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}). \tag{6}$$

Из уравнения (6) следует ИС: $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu} = c_0$, где c_0 – постоянная. В скалярном виде это ИС и уравнение (5) запишем так

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3 = c_0 \tag{7}$$

$$\omega_i = \varepsilon_0\nu_i + g(\nu_3)\beta_i, \quad (i = \overline{1,3}). \tag{8}$$

Для производных $\dot{\nu}_i$ из (6) получим

$$\dot{\nu}_1 = g(\nu_3)(\beta_3\nu_2 - \beta_2\nu_3), \qquad \dot{\nu}_2 = g(\nu_3)(\beta_1\nu_3 - \beta_3\nu_1),$$
$$\dot{\nu}_3 = g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2), \tag{9}$$

Постановка задачи заключается в исследовании у уравнений (1),(2) ИС (7),(8), то есть в нахождении функций $g(\nu_3)$, параметров ε_0, β_i $(i = \overline{1,3})$ и параметров уравнения (1).

Интегрирование уравнений (1), (2) на ИС (7), (8).

Интерес представления аналитической формы прецессий первого типа в форме (7),(8), как показано в статье [6], состоит в том, что уравнения (9) интегрируются в виде квадратур. Запишем результат, представленный в [6]:

$$\nu_1(\nu_3) = \frac{1}{æ_0^2}\left[\beta_1(c_0 - \beta_3\nu_3) + \beta_2\sqrt{F(\nu_3)}\right], \tag{10}$$

$$(\nu_3) = \frac{1}{æ_0^2}\left[\beta_2(c_0 - \beta_3\nu_3) - \beta_1\sqrt{F(\nu_3)}\right], \tag{11}$$

$$\int_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{F(\nu_3)}} = t - t_0, \tag{12}$$

где $æ_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, а $F(\nu_3)$ имеет вид

$$F(\nu_3) = -\nu_3^2 + 2c_0\beta_3\nu_3 + (æ_0^2 - c_0^2). \tag{13}$$

Для интегрирования уравнения (1) положим $\lambda_1(t) = 0,\ \ \lambda_2(t) = 0$ и подставим $\omega_i\ (i = \overline{1,3})$ из (8) во второй интеграл системы (3)

$$\left(A_3\omega_3 + \lambda_3(t)\right) = \frac{1}{\nu_3}\left[\frac{1}{2}(B_1 - B_3 - 2\varepsilon_0A_1)\nu_1^2 + \frac{1}{2}(B_2 - B_3 - 2\varepsilon_0A_2)\nu_2^2 - \right.$$
$$\left. - g(\nu_3)(\beta_1A_1\nu_1 + \beta_2A_2\nu_2) + k_0\right], \tag{14}$$

где $k_0 = k + \frac{1}{2}B_3.\ k_0$

Записав уравнение (1) в виде системы трех скалярных уравнений, исключим из первых двух равенств функцию $\lambda_3(t)$. Полученное уравнение представим так

$$\left[\frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) - s_3\nu_3 + \frac{1}{2}C_3\nu_3^2\right]^{\bullet} = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 +$$
$$+\omega_3(B_1\nu_1\omega_2 - B_2\nu_2\omega_1) + \nu_3(s_2\omega_1 - s_1\omega_2) + \nu_3(C_1\nu_1\omega_2 - C_2\nu_2\omega_1). \tag{15}$$

Рассмотрим частный случай, который характеризуется условиями

$$A_2 = A_1,\ B_2 = B_1,\ C_2 = C_1,\ \ s_2 = 0,\ \ \ s_1 = 0,\ \ \ \beta_3 = 0. \tag{16}$$

При выполнении равенств (16) из последнего равенства системы скалярных уравнений и в силу третьего уравнения системы (9) имеем

$$\lambda_3(\nu_3) = l_1 - (B_1 + \varepsilon_0A_3)\nu_3, \tag{17}$$

а уравнение (15) позволяет указать первый интеграл

$$A_1\left(g^2(\nu_3) + 2\varepsilon_0c_0g(\nu_3)\right) - [\varepsilon_0^2A_1 + \varepsilon_0B_1 + (C_1 - C_3)]\nu_3^2 - 2s_3\nu_3 = l_2. \tag{18}$$

из которого находим функцию $g^2(\nu_3)$

$$g^2(\nu_3) = \frac{1}{A_1}[(\varepsilon_0^2A_1 + \varepsilon_0B_1 + (C_1 - C_3)\nu_3^2 + 2s_3\nu_3 + l_2]. \tag{19}$$

Заключение

Изучена задача об условиях существования полурегулярных прецессий первого типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Рассмотрен частный случай ИС, задающих прецессию гиростата, при наличии некоторых ограничений на параметры уравнений движения гиростата. Данный подход в изучении прецессий первого типа позволил построить новое решения уравнений класса Кирхгофа-Пуассона с переменным гиростатическим моментом.

Библиографические ссылки

1. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А.Ю. Ишлинский А.Ю. – М.: Наука. – 1976. – 672 с.

2. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 573–587.

3. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр., А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина – Донецк: ДонНУ. – 2009. – 222 с.

4. *Горр Г. В.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Г.А. Котов. – Донецк: ГУ "ИПММ", 2017. – 265 с.

5. *Горр Г. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев – Донецк: ДонНУ. – 2010. – 364 с.

6. *Горр Г. В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. – 2019. – 83, №2. – С.202–214.