

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

А. В. Мазнев¹⁾, Т. В. Белоконь²⁾

¹⁾ Донецкий национальный университет, ДНР, Донецк, o.mazniev@donnu.ru

²⁾ Донецкий национальный университет экономики и торговли имени Михаила
Туган-Барановского, ДНР, Донецк, B.Tatyana13@mail.ru

В работе рассмотрены условия существования полурегулярных прецессий первого типа в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Используя инвариантные соотношения, описывающие данные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом, найден новый случай интегрируемости уравнений класса Кирхгофа-Пуассона.

Ключевые слова: гиростат; потенциальные и гироскопические силы; прецессии.

ON ONE CASE SOLUTIONS TO THE EQUATIONS OF MOTIONS OF A GYROSTAT UNDER THE ACTION OF POTENTIAL AND GYROSCOPIC FORCES

A. V. Maznev¹⁾, T. V. Belokon²⁾

¹⁾ Donetsk National University, DPR, Donetsk, o.mazniev@donnu.ru

²⁾ Donetsk National University of Economics and Trade Mikhail Tugan-Baranovsky, DPR,
Donetsk, B.Tatyana13@mail.ru

The paper considers conditions for the existence of semi-regular precessions of the first type in the problem of the motion of a gyrost at under the action of potential and gyroscopic forces. Using invariant relations describing these precessions and equations of motion of a gyrost at with a variable gyrostatic moment, new case of integrability Kirchhoff-Poisson class equations are found.

Keywords: gyrost at; potential and gyroscopic forces; precessions.

Введение

Доклад посвящен изучению прецессионных движений гиростата, то есть движениям, при которых постоянен угол между двумя осями l_1 и l_2 (ось l_1 связана с телом-носителем, ось l_2 неподвижна в пространстве). В работе [1] дана классификация прецессионных движений гиростата с постоянным гиростатическим моментом. В монографии [2] прецессионные

движения изучались в предположении, что гиростатический момент зависит от времени.

В докладе рассматриваются полурегулярные прецессии первого типа гиростата с переменным гиростатическим моментом в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получено новое решение уравнений класса Кирхгофа-Пуассона, описывающие данные прецессии.

Постановка задачи

Уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом запишем в виде [2]:

$$A\dot{\omega} + \dot{\lambda}(t) = (A\omega + \lambda(t)) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s) = 0, \quad (1)$$

$$\dot{v} = v \times \omega \quad (2)$$

Здесь обозначено: тензор инерции $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $v = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ – матрица, характеризующая гироскопические силы; $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ – матрица, характеризующая потенциальные силы, которые являются однородными многочленами по $v_i (i = \overline{1,3})$; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс гиростата. Полагаем, что S_0 – тело-носитель, S_1 – симметричный ротор, который вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\alpha}(t)$, то есть для компонент гиростатического момента имеем равенства: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_3(t)$. Момент инерции ротора S_1 относительно оси Oz полагаем равным D_3^* . Производную по времени от функций $\omega_i(t), v_i(t) (i = \overline{1,3}), \lambda_3(t)$ будем обозначать точкой над этими переменными. Уравнения (1),(2) имеют два первых интеграла

$$v \cdot v = 1, \quad (A\omega + \lambda(t)) \cdot v - \frac{1}{2}(Bv \cdot v) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Поскольку система дифференциальных уравнений (1)-(3) неавтономна, то для полного решения задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом необходимо данные уравнения рассматривать совместно с уравнениями [3]

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t), \quad \lambda_3(t) = D_3^*[\dot{\alpha}(t) + (\omega(t) \cdot i_3)], \quad (4)$$

где D_3^* – момент инерции относительно оси Oz .

Следуя [4], для уравнений (1)-(3) зададим три инвариантных соотношения (ИС)

$$\omega_i = \varepsilon_0 v_i + g(v_3) \beta_i, \quad (i = \overline{1,3}). \quad (5)$$

где $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$. Запишем равенства (5) в векторной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon_0 \mathbf{v} + g(v_3) \boldsymbol{\beta}, \quad (6)$$

При подстановке значений (5) в уравнения Пуассона (2) получим

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= g(v_3)(\beta_3 v_2 - \beta_2 v_3), & \dot{v}_2 &= g(v_3)(\beta_1 v_3 - \beta_3 v_1) \\ \dot{v}_3 &= g(v_3)(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (7) следует дополнительное ИС:

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = c_0 \quad (8)$$

где c_0 – постоянная. В векторном виде ИС (8) можно записать в виде $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} = c_0$, то есть в процессе движения гиростата постоянен угол между векторами $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{v}$. Такие движения называются прецессией гиростата относительно вертикали [5].

Из соотношений (3),(8) найдем функции [6]

$$\begin{aligned} v_1(v_3) &= \frac{1}{\varkappa_0^2} [\beta_1(c_0 - \beta_3 v_3) + \beta_2 \sqrt{F(v_3)}], \\ v_2(v_3) &= \frac{1}{\varkappa_0^2} [\beta_2(c_0 - \beta_3 v_3) - \beta_1 \sqrt{F(v_3)}] \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varkappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$, а $F(v_3)$ имеет вид

$$F(v_3) = -v_3^2 + 2c_0\beta_3 v_3 + (\varkappa_0^2 - c_0^2). \quad (10)$$

Зависимость $v_3(t)$ установим из третьего уравнения системы (7) путем обращения интеграла

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{g(v_3)\sqrt{F(v_3)}} = t - t_0, \quad (11)$$

Случай линейной функции $g(v_3)$.

Определенный интерес представляет случай когда функция $g(v_3)$ имеет вид ($g_1 \neq 0$)

$$g(v_3) = g_0 + g_1 v_3, \quad (12)$$

а вторая компонента вектора обобщенного центра масс равна нулю: $s_2 = 0$. Подставив $g(v_3)$ из (12) в уравнения (1) и требуя, чтобы полученные равенства были тождествами по v_3 , получим систему равенств

$$\begin{aligned} A_1 \beta_1^3 g_1^2 - \beta_1 g_1 D_6 - D_8 &= 0, \quad P_0 = \beta_1 \varepsilon_0 c_0 A_1 g_0, \\ A_1 \beta_1^3 g_0 g_1 - \beta_1 g_0 D_6 + \beta_1 \varepsilon_0 c_0 A_1 g_1 - D_7 &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta_1 \beta_3 A_1 g_1^2 - g_1 D_9 + D_{11} = 0, \quad \beta_1 \beta_3 g_0 g_1 A_1 - g_0 D_9 + D_{10} = 0,$$

где величины D_i известны и выражены через параметры задачи.

Рассмотрим особый случай: $g_0 = 0$. Из третьего уравнения системы (13) следует вариант:

$$c_0 = 0, \quad D_7 = 0, \quad P_0 = 0. \quad (14)$$

Из второго и пятого равенств системы (13) установим, что при $g_0 = 0$ должны выполняться условия

$$P_0 = 0, \quad D_{10} = 0. \quad (15)$$

из которых вытекает, что $s_1 = 0$, $s_3 = 0$. В силу данных равенств и условия $s_2 = 0$ приходим к выводу, что центр масс гиростата неподвижен. Из первого и четвертого уравнений системы (13) при $c_0 = 0$ в результате очевидной их линейной комбинации находим

$$g_1^{(0)} = \frac{\beta_3 D_8 + D_{11} \beta_1^2}{\beta_1 (\beta_1 D_9 - \beta_3 D_6)} \quad (16)$$

Полагаем, что знаменатель в формуле (16) отличен от нуля, то есть выполняется условие

$$\beta_1^2 (B_2 + B_3 - 2\varepsilon_0 A_1) + \beta_3^2 (B_1 + B_2 + 2\varepsilon_0 A_1) \neq 0. \quad (17)$$

Подставив значение (16) в первое уравнение из (13), получим

$$A_1 \beta_1^3 \left(g_1^{(0)} \right)^2 - \beta_1 g_1^{(0)} D_6 - D_8 = 0 \quad (18)$$

Таким образом, система (13) в случае $g_0 = 0, c_0 = 0$ разрешима (имеет место решение (16)). Условиями существования решения являются равенства $s = 0, P_0 = 0$.

Заключение

В работе рассмотрены условия существования полурегулярных прецессий первого типа в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Построено новое решение уравнений движения гиростата (линейное по v_3 для функции $g(v_3)$).

Библиографические ссылки

1. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр // Прикл. матем. и механика. 2003. Т. 67, вып. 4. С. 573–587.
2. Горр Г. В. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Г.А. Котов – Донецк: Изд-е ГУ «Институт прикладной математики и механики», 2017. 250 с.
3. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П.В. Харламов // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
4. Горр Г. В. О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / Г.В. Горр, Т.В. Белоконь // Прикл. матем. и механика. Москва. 2003. Т. 85, № 4. С. 139–151.
5. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел / Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
6. Горр Г. В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил / Г.В. Горр // Прикл. математика и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.