УДК 51 (9.64)

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ГАУССА В СЛУЧАЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. В. Игнатенко

Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, ignatenkomv@bsu.by

Рассмотрено решение проблемы построения квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций в случае постоянной весовой функции, полученное на основе аналогичной схемы, известной для скалярных функций.

Ключевые слова: интерполяционная квадратурная формула; алгебраическая степень точности; квадратуры Гаусса; матричнозначная функция; алгебраический матричный многочлен.

ON THE GAUSSIAN QUADRATURE FORMULAS IN THE CASE OF INTEGRATION OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS

M. V. Ignatenko

Belarussian state university, Belarus, Minsk, ignatenkomv@bsu.by

The solution to the problem of constructing quadrature formulas of the highest algebraic degree of accuracy for matrix-valued functions in the case of a constant weight function, obtained on the basis of a similar scheme known for scalar functions, is considered.

Keywords: interpolation quadrature formula; algebraic degree of accuracy; the Gaussian quadrature; matrix-valued function; algebraic matrix polynomial.

Введение

Пусть $F(x)$ – функциональная матрица с элементами $f_{ij}(x)$, тогда матричнозначный интеграл

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[f_{ij}(x) \right] dx = \left[\int_a^b f_{ij}(x)dx \right]. \quad (1)$$

С целью приближенного вычисления интеграла (1) рассмотрим квадратурную формулу с постоянной весовой функцией

$$\int_a^b F(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k F(x_k), \qquad (2)$$

где

$$\sum_{k=0}^{n} A_k F(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k \left[f_{ij}(x_k) \right] = \left[\sum_{k=0}^{n} A_k f_{ij}(x_k) \right],$$

которая содержит в качестве параметров коэффициенты A_k, узлы x_k (чаще $x_k \in [a, b]$, что необязательно), $k = 0,1,...,n$, и целое неотрицательное число n. Выбор этих параметров, вообще говоря, не всегда произвольный и обычно подчинен одной или нескольким целям: 1) минимизации погрешности квадратурной формулы; 2) упрощению вычислений (для этого следует, например, выбрать узлы равноотстоящими или потребовать равенства коэффициентов $A_k \equiv C$ и рассмотреть формулу $\int_a^b F(x)dx \approx \left[C\sum_{k=0}^{n} f_{ij}(x_k) \right]$, которая имеет $n+3$ параметра: $C, n, x_0, x_1, ..., x_n$); 3) увеличению степени точности для определенных, например, алгебраических матричных многочленов до наивысшей возможной.

Так как число параметров A_k и x_k равно $2n+2$, то естественно ожидать, что квадратурная формула (2) при заданном числе $n+1$ узлов будет иметь алгебраическую степень точности $2n+1$. Можно предполагать, что такая степень является, как правило, наивысшей возможной. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности с постоянным весом, рассматриваемые для матричнозначных функций, аналогично случаю скалярных функций, будем называть квадратурными формулами Гаусса.

Схема построения квадратурных формул Гаусса для скалярных функций

Известно (см., напр., [1]), что в случае скалярных функций $f_{ij}(x)$ при произвольном выборе попарно различных точек $x_0, x_1, ..., x_n$ интерполяционная квадратурная формула $\int_a^b f_{ij}(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f_{ij}(x_k)$ с коэффициентами

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} dx, \; k = 0,1,...,n, \qquad (3)$$

где $\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, является точной для алгебраических многочленов степени не выше n. Иными словами, если $f_{ij}(x)$ – алгебраические многочлены степени меньшей или равной n, то $\int_a^b f_{ij}(x)dx=\sum_{k=0}^n A_k f_{ij}(x_k)$, что означает $\int_a^b F(x)dx=\sum_{k=0}^n A_k F(x_k)$. Если же в дополнение к указанному правилу (3) для коэффициентов A_k в качестве узлов x_k, $k=0,1,...,n$, выбрать корни многочлена $\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, ортогонального на отрезке $[a,\ b]$ к любому алгебраическому многочлену степени не выше n, то алгебраическая степень точности квадратурной формулы (2) увеличится и станет максимально возможной, равной $2n+1$.

Аналогии в случае матричнозначных функций

Рассмотрим аналогичные результаты по решению проблемы построения квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций $F(x)=\lfloor f_{ij}(x)\rfloor$ в случае постоянного веса.

Теорема 1. *Если узлы* x_k, $k=0,1,...,n$, *являются корнями многочлена* $\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, *ортогонального на отрезке* $[a,\ b]$ *к любому алгебраическому многочлену степени не выше* n, *то квадратурная формула* (2) *с коэффициентами* A_k, $k=0,1,...,n$, *вида* (3), *точна для любых матричных алгебраических многочленов степени не выше* $2n+1$.

Доказательство. Пусть $f_{ij}(x)$ – алгебраические многочлены степени меньшей или равной $2n+1$. Через $\omega_n(x)$ обозначим алгебраический многочлен степени $n+1$, ортогональный на отрезке $[a,\ b]$ к многочленам низшей степени: $\int_a^b \omega_n(x)x^\nu dx=0\ \ (\nu=0,1,...,n)$.

Выполним деление $f_{ij}(x)$ на $\omega_n(x)$. Имеем

$$f_{ij}(x)=\omega_n(x)q_{ij}(x)+r_{ij}(x),, \tag{4}$$

где $q_{ij}(x)$ и $r_{ij}(x)$ – частное и остаток, алгебраические многочлены степени не выше n. Проинтегрируем обе части равенства (4) от a до b и получим

$$\int_a^b f_{ij}(x)dx = \int_a^b \omega_n(x)q_{ij}(x)dx + \int_a^b r_{ij}(x)dx = \int_a^b r_{ij}(x)dx\,. \qquad (5)$$

Интеграл $\int_a^b \omega_n(x)q_{ij}(x)dx$ в формуле (5) равен нулю в силу условия ортогональности $\omega_n(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ к многочленам низшей степени.

Через $R(x)$ обозначим функциональную матрицу с элементами $r_{ij}(x)$. Из равенств (1) и (5) имеем

$$\int_a^b F(x)dx = \left\lfloor \int_a^b f_{ij}(x)dx \right\rfloor = \left\lfloor \int_a^b r_{ij}(x)dx \right\rfloor = \int_a^b R(x)dx.$$

В качестве интерполяционных узлов x_k, $k = 0,1,...,n,$ выберем корни многочлена $\omega_n(x)$. Интеграл $\int_a^b r_{ij}(x)dx$ точно равен квадратурной сумме $\sum_{k=0}^{n} A_k r_{ij}(x_k),$ так как степень многочлена $r_{ij}(x)$ не выше n, а квадратурные коэффициенты по условию заданы по правилу (3), т.е. квадратурная формула – интерполяционная и, следовательно, является точной для всех алгебраических многочленов степени не выше n.

В силу представления (4) имеем $r_{ij}(x_k) = f_{ij}(x_k)$. С учетом равенства (5) получим $\int_a^b f_{ij}(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f_{ij}(x_k)$ и, следовательно, придем к точному равенству $\int_a^b F(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k F(x_k)$, если $F(x)$ – матричный алгебраический многочлен степени не выше $2n+1$.

Покажем, что квадратурная формула (2), в которой выбор узлов и коэффициентов определен теоремой 1, не может быть точна для всех матричных алгебраических многочленов степени $2n+2$, т. е. число $2n+1$ является наивысшей алгебраической степенью точности этой формулы, и, следовательно, приближенное равенство (2) – квадратура Гаусса.

Теорема 2. *Ни при каких коэффициентах* A_k *и узлах* x_k, $k = 0,1,...,n$, *приближенное равенство* (2) *не может быть точным для всех матричных алгебраических многочленов степени* $2n+2$.

Доказательство. По квадратурным узлам x_k, $k = 0,1,...,n$, образуем функцию $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ и рассмотрим случай функциональной матрицы $F(x)$ с одинаковыми элементами $f_{ij}(x) = \omega_n^2(x)$ – алгебраическими многочленами степени $2n+2$. Очевидно, что $f_{ij}(x_k) = \omega_n^2(x_k) = 0$

для $k=0,1,...,n$, т.е. квадратура $\sum_{k=0}^{n} A_k F(x_k) = \left[\sum_{k=0}^{n} A_k f_{ij}(x_k) \right]$ будет нулевой матрицей, в то время как интеграл $\int_a^b F(x)dx = \left[\int_a^b \omega_n^2(x)dx \right] \neq [0]$. Таким образом, существует матричный алгебраический многочлен степени $2n+2$, для которого равенство (2) не является точным.

Заключение

В заключение отметим, что при любом целом неотрицательном значении n квадратурная формула (2), в которой выбор узлов и коэффициентов определен теоремой 1, существует и является единственной.

В общем случае проблема построения квадратур наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций с весовой функцией, отличной от постоянной (квадратур типа Гаусса), исследована в работе [2].

Библиографические ссылки

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В.И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.

2. *Sinap A.* Polynomial interpolation and gaussian quadrature for matrix-valued functions / A. Sinap, Walter Van Assche // Linear algebra and its applications. – 1994. – Vol. 207. – P. 71-114.