УДК 531.38

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КЛАССА КИРХГОФА НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ

А. В. Зыза[1), Е. С. Платонова[2)

[1), 2)] *ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», РФ, ДНР, Донецк,*
[1)] *z9125494@mail.ru,* [2)]*elenasergeevna9@mail.ru*

Исследованы условия существования нового класса полиномиальных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона задачи о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Особенность структуры этого класс заключается в том, что функция, задающая инвариантное соотношение для третьей компоненты орта оси симметрии действующих силовых полей, является рациональной функцией от вспомогательной переменной. Построено одно новое частное решение рассматриваемого полиномиального класса, которое описывается функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: гиростат; уравнения Кирхгофа-Пуассона; полиномиальные решения; инвариантное соотношение; интегралы Лежандра.

INTEGRATION OF KIRCHHOFF CLASS EQUATIONS ON ALGEBRAIC INVARIANT RELATIONS

A. V. Zyza[1), E. S. Platonova[2)

[1), 2)] *Donetsk National University, Russia, DPR, Donetsk,*
[1)] *z9125494@mail.ru,* [2)]*elenasergeevna9@mail.ru*

In this paper we study the existence conditions of a new class of polynomial solutions of the Kirchhoff-Poisson equations of the gyrostat motion problem (having a fixed point) under the action of potential and gyroscopic forces. The peculiarity of the structure of this class lies in the fact that the function that determines the invariant relation for the third component of the axis of symmetry of the acting force fields is a rational function of the auxiliary variable. One new particular solution of the polynomial class under consideration is constructed. This solution is described by the functions obtained by inversion of the Legendre elliptic integrals of the third kind.

Keywords: gyrostat; Kirchhoff-Poisson equations; polynomial solutions; invariant relation; Legendre integrals.

Введение

Актуальность исследования задач о движении гиростата заключается в том, что динамика гиростата является составной частью аналитической механики и служит базовой научной дисциплиной, результаты которой не только находят применение в объяснении механических явлений в природе и технике, но могут служить определенными рекомендациями в практической работе человека с современными техническими конструкциями. Система связанных твердых тел, моделируемая гиростатом, является одной из важных в аналитической механике, поскольку она используется во многих задачах динамики сложных механических объектов (роботов, манипуляторов, спутников).

Моделирование движений гиростата с неподвижной точкой под действием достаточно широкого класса сил приводит к исследованию решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. К таким системам относятся уравнения Кирхгофа-Пуассона (класса Кирхгофа) задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [1, 2].

Задача Коши для указанных дифференциальных уравнений движения гиростата имеет решение, но получить конструктивное решение для всего множества параметров невозможно. Это связано с тем, что при произвольных значениях параметров задачи уравнения динамики твердого тела и гиростата не интегрируемы в квадратурах. Указанное обстоятельство затрудняет решение рассматриваемой задачи динамики гиростата и объясняет актуальность построения частных решений в замкнутом виде.

Среди частных решений уравнений задач о движении гиростата выделяют решения различной полиномиальной структуры [3, 4], многие из которых являются обобщением полиномиальных решений классической задачи динамики твердого тела и задачи динамики тяжелого гиростата.

В данной статье начато изучение условий существования нового полиномиального класса частных решений дифференциальных уравнений указанной выше задачи динамики гиростата. Получен новый случай интегрируемости уравнений движения гиростата.

Постановка задачи. Структура нового класса полиномиальных решений

Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при ньютоновском притяжении масс и взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящие через неподвижную точку параллельно вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле – носителе.

Уравнение движения такого гиростата относятся к уравнениям класса Кирхгофа и в векторной форме таковы [2]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \qquad (1)$$

Уравнения (1) допускают три первых интеграла

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2E_0, \ 2(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - (B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\kappa_0, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1 \qquad (2)$$

В (1), (2) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – орт оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; $A = diag(A_1, A_2, A_3)$– тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $C = diag(C_1, C_2, C_3)$ и $B = diag(B_1, B_2, B_3)$ – матрицы третьего порядка (матрица C характеризует потенциальные силы, B – гироскопические силы); точка над переменными обозначает относительную производную; E_0 и κ_0 – постоянные интегралов.

В статье рассмотрена задача об исследовании условий существования у уравнений (1) частных решений нового класса полиномиальной структуры:

$$\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} b_i \sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} c_j \sigma^j,$$

$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{\kappa=0}^{l} a_\kappa \sigma^\kappa, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i \sigma^i, \quad \nu_3 = \frac{\theta(\sigma)}{\sigma}\sqrt{R(\sigma)}, \ \theta(\sigma) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j \sigma^j, \qquad (3)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – целые неотрицательные числа; $b_i, c_j, a_\kappa, g_i, f_j$ – параметры, подлежащие определению.

Указанный класс решений характеризуется квадратичным инвариантным соотношением по вспомогательной переменной и рациональной функцией от указанной переменной, задающей инвариантное соотношение для третьей компоненты орта оси симметрии силовых полей. В этом заключается отличие класса решений (3) от класса полиномиальных решений А.И. Докшевича [1].

Новое частное решение

В статье изучен случай, когда максимальные степени полиномов решения из (3) имеют значения: $n=2, m=4, l=2, n_1=3, m_1=2$. В результате исследования построен новый случай интегрируемости уравнений (1) на алгебраических инвариантных соотношениях (3).
Укажем только действительный числовой пример нового решения.
Параметры задачи:

$$A_1=\frac{a}{10},\ A_2=A_3=a,\ B_1=\frac{37}{3}b,\ B_2=B_3=b,\ C_3-C_1=10\frac{b^2}{a},\ C_2=C_3, \tag{4}$$

$$C_2=C_3,\ \left(a>0, b>0\right),$$

$$\mathbf{s}=-\frac{a^2}{15bf^2}\left(\frac{864119-13233\varepsilon}{960};1;0\right),\ \boldsymbol{\lambda}=\frac{3a^3}{100b^2f^2}\left(\frac{7\left(55129-843\varepsilon\right)}{160};3;0\right).$$

Частное решение:

$$\begin{gathered}
\omega_1=\sigma^2,\ \omega_2=\frac{1}{2}\left(\sigma^2+\frac{\left(3\varepsilon-28\right)}{120}\frac{a}{bf}\sigma+\frac{\left(141\varepsilon-8807\right)}{4800}\frac{a^2}{b^2f^2}\right),\\
\omega_3^2=R\left(\sigma\right)=\frac{1}{4}\left(-\sigma^4+\frac{\left(20-\varepsilon\right)}{20}\frac{a}{bf}\sigma^3+\frac{\left(653-54\varepsilon\right)}{1600}\frac{a^2}{b^2f^2}\sigma^2+\right.\\
\left.+\frac{\left(2873\varepsilon-186423\right)}{32000}\frac{a^3}{b^3f^3}\sigma+\frac{23\left(9301\varepsilon-588917\right)}{128\cdot10^4}\frac{a^4}{b^4f^4}\right),\\
\nu_1=-\frac{a}{10b}\left(\sigma^2+\frac{a}{bf}\sigma+\frac{\left(1497\varepsilon-97031\right)}{1600}\frac{a^2}{b^2f^2}\right),\\
\nu_2=\frac{1}{2}\left(f\sigma^3+\frac{87}{40}\frac{a}{b}\sigma^2+\frac{3\left(29\varepsilon-1457\right)}{800}\frac{a^2}{b^2f}\sigma+\frac{\left(4089\varepsilon-257393\right)}{32000}\frac{a^3}{b^3f^2}\right),\\
\nu_3=\left(f\sigma+\frac{\left(107-\varepsilon\right)a}{40b}\sqrt{R\left(\sigma\right)}\right).
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\dot{\sigma}=\frac{1}{3}\left(2\sigma+\frac{\left(53-\varepsilon\right)a}{20bf}\right)\sqrt{R\left(\sigma\right)}. \tag{6}$$

В (4) −(6) обозначено

$$\varepsilon=\sqrt{4029},\ f=\left(\frac{9405436485663}{64\cdot 10^5\left(29793217+469169\varepsilon\right)}\right)^{1/4}\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}.$$

Так как функция $R(\sigma)$ из (6) при $\sigma = 0$ принимает положительное значение, то решение (4) − (6) действительно. Функцию времени $\sigma = \sigma(t)$ получим обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, вытекающего из дифференциального уравнения (6). Это позволяет установить зависимость от времени всех переменных задачи в (5) в виде квадратур.

Заключение

Построенное новое частное решение (4)-(6) дифференциальных уравнений (1) не имеет аналогов в классической задаче динамики твердого тела и в задаче о движении тяжелого гиростата, то есть оно не является тривиальным обобщением известных решений.

Библиографические ссылки

1. *Горр Г. В., Ковалев А. М.* Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.

2. *Горр Г. В., Мазнев А. В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

3. *Зыза А. В.* Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата / А.В. Зыза // Компьютерное исследование и моделирование. – 2018. – №1 (10). – С. 7-25.

4. *Зыза А. В.* Новые классы частных решений одной задачи о движении гиростата / А.В. Зыза, Т.В. Хомяк, А.С. Платонова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2022. – Т. 32. Вып. 2. – С. 298-318.