УДК 519.4

D- И *A*-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В. П. КИРЛИЦА[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Для регрессионной функции

$$y(x) = \theta_1 + \sum_{s=1}^{k} \left(\theta_{2s} \cos sx + \theta_{2s+1} \sin sx\right),$$

представляющей тригонометрическую сумму порядка k, построены непрерывные D- и A-оптимальные планы экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0, \ldots, x_n^0 \\ \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

с точками спектров

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi,\ i = \overline{1, n},\ n \geq 2k+1,$$

Образец цитирования:
Кирлица ВП. *D*- и *A*-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2023;2:35–44.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-35-44
EDN: KDGPZW

For citation:
Kirlitsa VP. *D*- and *A*-optimal designs of experiments for trigonometric regression with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2023;2:35–44. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2023-2-35-44
EDN: KDGPZW

Автор:
Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Valery P. Kirlitsa, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kirlitsa@bsu.by

где φ – произвольный угол (φ ≥ 0) такой, что информационная матрица плана эксперимента является невырожденной. Данные планы экспериментов сконструированы для неравноточных наблюдений с дисперсиями

$$d(x) \geq \sigma^2,\ d\left(x_i^0\right) = \sigma^2,\ \sigma \neq 0,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Для частного случая рассматриваемой регрессионной функции ($k = 1$) построены насыщенные планы экспериментов для неравноточных наблюдений с дисперсиями, принимающими различные значения в точках спектров этих планов.

Ключевые слова: непрерывные D- и A-оптимальные планы экспериментов; тригонометрическая регрессия; равноточные наблюдения; неравноточные наблюдения.

D- AND *A*-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR TRIGONOMETRIC REGRESSION WITH HETEROSCEDASTIC OBSERVATIONS

V. P. KIRLITSA[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Herein for the regression function

$$y(x) = \theta_1 + \sum_{s=1}^{k}\left(\theta_{2s}\cos sx + \theta_{2s+1}\sin sx\right)$$

representing a trigonometrical sum of an k order, we constructed continuous D- and A-optimal designs of experiments

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0, \ldots, x_n^0 \\ \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$$

with points of a spectrum

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi,\ i = \overline{1,\ n},\ n \geq 2k + 1,$$

where φ is an arbitrary angle (φ ≥ 0), for which the determinant of the information matrix of the experiment design is not equal to zero. These designs of experiments are constructed for heteroscedastic observations with variances

$$d(x) \geq \sigma^2,\ d\left(x_i^0\right) = \sigma^2,\ \sigma \neq 0,\ i = \overline{1,\ n}.$$

For a special case of the considered regression function ($k = 1$), we constructed the saturated designs of experiments for observations with unequal accuracy and dispersions accepting various values in the points of a spectrum of such plans.

Keywords**:** continuous D- and A-optimal designs of experiments; trigonometric regression; homoscedastic observations; heteroscedastic observations.

Рассмотрим модель наблюдений

$$y_j = \theta_1 + \sum_{s=1}^{k}\left(\theta_{2s}\cos sx_j + \theta_{2s+1}\sin sx_j\right) + \varepsilon\left(x_j\right),\ j = \overline{1,\ n},\ n \geq 2k+1, \tag{1}$$

где y_j – наблюдаемые переменные; x_j – контролируемые переменные, принадлежащие интервалу $[0,\ 2\pi)$; $\theta_1,\ \theta_{2s},\ \theta_{2s+1}$ – неизвестные параметры, подлежащие оцениванию; $\varepsilon\left(x_j\right)$ – некоррелированные ошибки наблюдений со средним значением, равным нулю, и дисперсией, зависящей от точки наблюдения:

$$D\left(\varepsilon\left(x_j\right)\right) = d\left(x_j\right) > 0,\ j = \overline{1,\ n},\ n \geq 2k+1. \tag{2}$$

Здесь функция $d(x)$ – некоторая положительная функция.

В монографиях [1; 2] для модели равноточных наблюдений ($d(x) = \sigma^2,\ \sigma^2 > 0$) доказано, что план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0, \ \dots, \ x_n^0 \\ \dfrac{1}{n}, \ \dots, \ \dfrac{1}{n} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

является непрерывным D-оптимальным. Точки спектра плана (3) имеют вид

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n}, \ \ i = \overline{1, n}, \ n \ge 2k+1. \tag{4}$$

Для частного случая $n = 2k + 2$ оптимальный план (3) впервые был построен в публикации [3]. В статье [4] обосновано, что план (3) остается D-оптимальным для определенного класса неравноточных наблюдений. Такие планы удалось построить, опираясь на теорему эквивалентности Кифера – Вольфовица. В работе [5] предлагаются другие методы построения планов экспериментов с неравноточными наблюдениями.

В данной публикации будет показано, что план (3) с точками спектра

$$x_i^0 = \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ n \ge 2k+1, \tag{5}$$

где φ – произвольный угол (φ ≥ 0) такой, что информационная матрица плана эксперимента является невырожденной, не только D-оптимальный, но и A-оптимальный для определенного класса неравноточных наблюдений. Также будут построены так называемые насыщенные D-оптимальные планы экспериментов для некоторых частных случаев модели наблюдений (1), (2).

Теорема 1. *Для модели наблюдений (1), (2) план (3) с точками спектра (5) является одновременно непрерывным D- и A-оптимальным для неравноточных наблюдений с дисперсиями* $d(x)$*, удовлетворяющими неравенству*

$$d(x) \ge \sigma^2, \ \ \sigma \ne 0, \tag{6}$$

в котором равенство выполняется в точках спектра (5) плана (3).

Доказательство. Вначале докажем D-оптимальность плана (3) с точками спектра (5). Для этого нужно показать, что будут выполняться условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] для D-оптимальных планов:

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}\left(\varepsilon_n^0\right) f(x) \le 2k+1, \ \ x \in [0, \ 2\pi), \tag{7}$$

где $f(x) = (1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx)$ – вектор базисных функций; $M\left(\varepsilon_n^0\right)$ − информационная матрица плана (3). В неравенстве (7) равенство должно выполняться в точках спектра (5) плана (3).

Докажем, что информационная матрица плана (3), (4) с неравноточными наблюдениями (6) имеет диагональный вид:

$$M\left(\varepsilon_n^0\right) = \sigma^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В монографиях [1; 2] приводится доказательство утверждения (8) для равноточных наблюдений с углом φ = 0. Однако оно фрагментарно и в работе [1, с. 123] представлено для четных значений n. Приведем полное доказательство утверждения (8) для любых n и φ.

Сначала докажем выполнение утверждения (8) для угла φ = 0. Будем использовать формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

и формулу для суммы геометрической прогрессии. Пусть m и l − натуральные числа, принимающие значения от 1 до k, причем $m \neq l$. Применяя формулы Эйлера, вычислим диагональные элементы информационной матрицы, начиная со второго:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\frac{2\pi m(j-1)}{n}=\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\cos\frac{4\pi m(j-1)}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\sum_{j=1}^{n}\left(e^{i\frac{4\pi m(j-1)}{n}}+e^{-i\frac{4\pi m(j-1)}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\left(\frac{1-e^{i4\pi m}}{1-e^{i\frac{4\pi m}{n}}}+\frac{1-e^{-i4\pi m}}{1-e^{-i\frac{4\pi m}{n}}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\left(\frac{\left(1-e^{i4\pi m}\right)\left(1-e^{-i\frac{4\pi m}{n}}\right)+\left(1-e^{-i4\pi m}\right)\left(1-e^{i\frac{4\pi m}{n}}\right)}{2-2\cos\frac{4\pi m}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\frac{2-2\cos 4\pi m-2\cos\frac{4\pi m}{n}+2\cos 4\pi m\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2-2\cos\frac{4\pi m}{n}}=\frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sin^2\frac{2\pi m(j-1)}{n}=\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(1-\cos\frac{4\pi m(j-1)}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{4\pi m(j-1)}{n}=\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Недиагональные элементы равны нулю. Используя формулы Эйлера, получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\frac{2\pi m(j-1)}{n}=\frac{1}{2n}\left(\frac{1-e^{i2\pi m}}{1-e^{i\frac{2\pi m}{n}}}+\frac{1-e^{-i2\pi m}}{1-e^{-i\frac{2\pi m}{n}}}\right)=\frac{1}{2n}\frac{-2\cos\frac{2\pi m}{n}+2\cos\frac{2\pi m}{n}}{2-2\cos\frac{2\pi m}{n}}=0, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi m(j-1)}{n}=\frac{1}{2ni}\left(\frac{1-e^{i2\pi m}}{1-e^{i\frac{2\pi m}{n}}}-\frac{1-e^{-i2\pi m}}{1-e^{-i\frac{2\pi m}{n}}}\right)=\frac{1}{2n}\frac{2\sin\frac{2\pi m}{n}+2\sin 2\pi m\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2-2\cos\frac{2\pi m}{n}}=0, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi m(j-1)}{n}\cos\frac{2\pi l(j-1)}{n}=$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{2\pi(m+l)(j-1)}{n}+\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{2\pi(m-l)(j-1)}{n}\right)=0. \tag{13}$$

Формулы (9)−(13) обосновывают, что для точек спектра (4) плана (3) будет иметь место формула (8).

Теперь покажем, что и в общем случае для точек спектра (5) формулы (9)−(13) останутся справедливыми. Но доказательство этих формул претерпит некоторые изменения. Выполним расчеты только для формулы (9) (доказательство формул (10)−(13) может быть проведено по аналогичной схеме). Чтобы доказать выполнимость формулы (9), нам понадобятся уже обоснованные формулы (9), (10) и (12). Итак, имеем

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2 m\left(\frac{2\pi(j-1)}{n}+\varphi\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{2\pi m(j-1)}{n}\cos m\varphi-\sin\frac{2\pi m(j-1)}{n}\sin m\varphi\right)^2=$$

$$=\cos^2 m\varphi\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\frac{2\pi m(j-1)}{n}+\sin^2 m\varphi\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sin^2\frac{2\pi m(j-1)}{n}-\frac{\sin 2m\varphi}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{4\pi m(j-1)}{n}=$$

$$=\frac{\cos^2 m\varphi}{2}+\frac{\sin^2 m\varphi}{2}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, для плана экспериментов (3) с точками спектра (5) выполняется формула (8). Опираясь на формулу (8), легко проверить выполнимость критерия D-оптимальности (7):

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M^{-1}\left(\varepsilon_n^0\right) f(x) = \frac{\sigma^2}{d(x)}\left(1 + 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x + \ldots + \cos^2 kx + \sin^2 kx\right)\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{d(x)}(2k+1) \le 2k+1. \qquad (14)$$

В неравенстве (14) равенство достигается в точках спектра (5) плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. D-оптимальность плана (3) с точками спектра (5) доказана.

Множество функций, удовлетворяющих неравенству (6), обширно. Ему удовлетворяют равноточные наблюдения с дисперсиями $d(x) = \sigma^2$, а также, например, функции ($\varphi = 0$)

$$d(x) = \sigma^2 + \beta\left|\sin 2nx\right|,\ \beta > 0,$$

$$d(x) = \sigma^2 + \beta(x \bmod \Delta),\ \beta > 0,\ \Delta = \frac{2\pi}{n},$$

$$d(x) = \sigma^2\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \left(x - s\Delta + \frac{\Delta}{2}\right)^2},\ x \in \left[(s-1)\Delta,\ s\Delta\right],\ s = \overline{1,\ n},\ \Delta = \frac{2\pi}{n}.$$

Можно предложить и ряд других функций.

Перейдем к доказательству того, что план (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) будет также и A-оптимальным.

Наряду с регрессионной функцией

$$y = \theta_1 + \sum_{s=1}^{k}\left(\theta_{2s}\cos sx + \theta_{2s+1}\sin sx\right) \qquad (15)$$

рассмотрим регрессионную функцию

$$y_1 = \sum_{s=1}^{k}\left(\theta_{2s}\cos sx + \theta_{2s+1}\sin sx\right). \qquad (16)$$

В теореме 1 было доказано, что для регрессионной функции (15) план экспериментов (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) является D-оптимальным. Информационная матрица этого плана определяется формулой (8). Тот же план экспериментов с точками спектра (5) будет D-оптимальным и для регрессионной функции (16) в силу выполнимости критерия D-оптимальности Кифера – Вольфовица. Действительно, информационная матрица этого плана для регрессионной функции (16) имеет вид

$$M_1\left(\varepsilon_n^0\right) = \sigma^{-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Матрица (17) имеет размерность $2k \times 2k$. Дисперсионная матрица в соответствии с формулой (17) равна

$$D_1\left(\varepsilon_n^0\right) = M_1^{-1}\left(\varepsilon_n^0\right) = \sigma^2\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

В силу формулы (18) имеем

$$\frac{1}{d(x)} f'(x) M_1^{-1}\left(\varepsilon_n^0\right) f(x) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{d(x)} 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x + \ldots + \cos^2 kx + \sin^2 kx\right) = \frac{\sigma^2}{d(x)} 2k \le 2k. \qquad (19)$$

В неравенстве (19) равенство достигается в точках спектра (5) плана (3). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. План (3) с точками спектра (5) является D-оптимальным для регрессионной функции (16).

Итак, для плана экспериментов (3) с точками спектра (5) регрессионные функции (15) и (16) являются эквивалентными. Более того, этот план не только D-оптимален, но и A-оптимален для регрессионной функции (16). Чтобы обосновать это, обратимся к следующей теореме.

Теорема 2 [2, с. 150, теорема 2.11.1]. *План ε^0 является одновременно D- и A-оптимальным, если*

$$kD\left(\varepsilon^0\right) = D^2\left(\varepsilon^0\right),\ D\left(\varepsilon^0\right) = M^{-1}\left(\varepsilon^0\right),$$

при этом

$$\mathrm{Sp}D\left(\varepsilon^0\right) = km,$$

где k – некоторая константа и m – число неизвестных параметров.

Первое равенство в нашем случае принимает вид

$$k\sigma^2\begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} = \sigma^4\begin{pmatrix} 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Из формулы (20) вытекает, что $k = 2\sigma^2$. Так как $m = 2k$, имеем

$$\mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon_n^0\right) = km = 2\sigma^2 \cdot 2k = 4k\sigma^2.$$

Регрессионные функции (15) и (16) также эквивалентны в смысле их A-оптимальности для плана экспериментов (3) с точками спектра (5), причем

$$\mathrm{Sp}D\left(\varepsilon_n^0\right) = \mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon_n^0\right) + \sigma^2 = \left(4k+1\right)\sigma^2.$$

Действительно, пусть ε – произвольный невырожденный план экспериментов

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{1}{n} \end{Bmatrix},$$

где точки спектра $x_1, \dots, x_n$ принадлежат интервалу $\left[0, 2\pi\right)$. Наблюдения являются неравноточными и имеют дисперсии, удовлетворяющие неравенству (6), в котором равенство выполняется в точках спектра плана ε. Обозначим через $D_1\left(\varepsilon\right) = M_1^{-1}\left(\varepsilon\right)$ дисперсионную матрицу для регрессионной функции (16). Тогда дисперсионная матрица для регрессионной функции (15) для плана экспериментов ε имеет следующий блочный вид:

$$D\left(\varepsilon\right) = \sigma^2\begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & \dots & b_{1,2k+1} \\ b_{1,2} & & & \\ \vdots & & D_1\left(\varepsilon\right) & \\ b_{1,2k+1} & & & \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon\right) \geq \mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon_n^0\right)$, так как ε_n^0 – A-оптимальный план для регрессионной функции (16). Очевидно, что

$$\mathrm{Sp}D\left(\varepsilon\right) = \sigma^2\left(1 + \mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon\right)\right) \geq \sigma^2\left(1 + \mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon_n^0\right)\right).$$

Из последнего неравенства следует, что $\mathrm{Sp}D\left(\varepsilon\right)$ принимает минимальное значение тогда, когда $\varepsilon = \varepsilon_n^0$, т. е. план ε_n^0 является A-оптимальным планом для регрессионной функции (15),

$$\mathrm{Sp}D\left(\varepsilon_n^0\right) = \mathrm{Sp}D_1\left(\varepsilon_n^0\right) + \sigma^2 = \left(4k+1\right)\sigma^2.$$

Теорема 1 доказана.

Для регрессионной функции

$$y = \theta_1 + \theta_2\cos x + \theta_3\sin x \tag{21}$$

были проведены компьютерные расчеты для планов экспериментов

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} x, & y, & z \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}. \tag{22}$$

Чтобы планы (22) были невырожденными, должны выполняться неравенства $x < y < z$. Компьютерные расчеты подтвердили правильность утверждений теоремы 1.

Следствие теоремы 1. *Для регрессионной функции (16) план экспериментов (3) с точками спектра (5) и неравноточными наблюдениями (6) является одновременно D- и A-оптимальным.*

Особенность построенных планов экспериментов (3) с неравноточными наблюдениями состоит в том, что в точках спектров (5) этих планов дисперсии наблюдений принимают одни и те же значения, равные σ^2. Оказывается, что для регрессионной функции (21) и ее частного случая, когда свободный член отсутствует, можно построить насыщенные D-оптимальные планы, у которых дисперсии наблюдений в точках спектров этих планов могут быть различными. Насыщенные планы экспериментов – это планы, у которых число точек спектра совпадает с числом неизвестных параметров.

Теорема 3. *Для регрессионной функции*

$$y = \theta_1 \cos x + \theta_2 \sin x \tag{23}$$

план экспериментов

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{4} + \varphi, & \frac{3\pi}{4} + \varphi \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \tag{24}$$

является D-оптимальным для дисперсий наблюдений $d(x)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$d(x) \geq \frac{1}{2}\Big(\big(d_2(1+\sin 2\varphi) + d_1(1-\sin 2\varphi)\big)\cos^2 x + \\ + \big(d_2(1-\sin 2\varphi) + d_1(1+\sin 2\varphi)\big)\sin^2 x + (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \sin 2x\Big), \tag{25}$$

где $d_1(x) = d\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$; $d_2(x) = d\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right)$; φ *– произвольный угол* $(\varphi \geq 0)$ *такой, для которого план экспериментов (24) является невырожденным.*

Доказательство. Информационная матрица плана (24) равна

$$M(\varepsilon^0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) \end{pmatrix}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{d_2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right) \end{pmatrix}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right), \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_1}\begin{pmatrix} (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 & \cos 2\varphi \\ \cos 2\varphi & (\cos\varphi + \sin\varphi)^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{d_2}\begin{pmatrix} (\cos\varphi + \sin\varphi)^2 & -\cos 2\varphi \\ -\cos 2\varphi & (\cos\varphi - \sin\varphi)^2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1}(1-\sin 2\varphi) + \frac{1}{d_2}(1+\sin 2\varphi) & \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)\cos 2\varphi \\ \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)\cos 2\varphi & \frac{1}{d_1}(1+\sin 2\varphi) + \frac{1}{d_2}(1-\sin 2\varphi) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Матрица, обратная к матрице (26), если пропустить промежуточные вычисления, имеет вид

$$M^{-1}(\varepsilon^0) = \begin{pmatrix} d_2(1+\sin 2\varphi) + d_1(1-\sin 2\varphi) & (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \\ (d_1 - d_2)\cos 2\varphi & d_2(1+\sin 2\varphi) + d_1(1-\sin 2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Для D-оптимального плана экспериментов (24) должны выполняться условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица:

$$\frac{1}{d(x)}(\cos x, \sin x) M^{-1}(\varepsilon^0)\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \frac{1}{d(x)}\Big(\big(d_2(1+\sin 2\varphi) + d_1(1-\sin 2\varphi)\big)\cos^2 x +$$
$$+ \big(d_2(1-\sin 2\varphi) + d_1(1+\sin 2\varphi)\big)\sin^2 x + (d_1 - d_2)\cos 2\varphi \sin 2x\Big) \le 2. \quad (27)$$

Разрешая неравенство (27) относительно функции $d(x)$, получаем требуемое неравенство (25). Нетрудно проверить, что в точках спектра плана (24) неравенство (25) обращается в равенство. Теорема 3 доказана.

Замечание. Для регрессионной функции (23) невырожденный план экспериментов

$$\varepsilon_n^0 = \left\{ \frac{2\pi(i-1)}{n} + \varphi,\ \varphi \ge 0,\ p_i = \frac{1}{n},\ i = \overline{1, n},\ n \ge 3 \right\} \quad (28)$$

с дисперсиями наблюдений $d(x)$, удовлетворяющими неравенству $d(x) \ge \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$, в котором равенство выполняется в точках спектра плана (28), является одновременно D- и A-оптимальным в силу доказанной теоремы 1. Таким образом, для регрессионной функции (23) существуют два различных типа D-оптимальных планов экспериментов. Это планы (24) и (28).

Для регрессионной функции (21) можно построить насыщенные D-оптимальные планы экспериментов с дисперсиями наблюдений $d(x)$, принимающими различные значения в точках спектров этих планов. Введем следующие обозначения: $d_1 = d(0) > 0,\ d_2 = d\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0,\ d_3 = d\left(\frac{4\pi}{3}\right) > 0.$

Теорема 4. *Для регрессионной функции (21) насыщенный D-оптимальный план экспериментов имеет вид*

$$\varepsilon_3^0 = \begin{Bmatrix} 0, & \frac{2\pi}{3}, & \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

с дисперсиями наблюдений $d(x)$, удовлетворяющими неравенству

$$d(x) \ge \frac{1}{9}\Big((4d_1 + d_2 + d_3)\cos^2 x + 3(d_2 + d_3)\sin^2 x +$$
$$+ \sqrt{3}(d_3 - d_2)\sin 2x + 2(2d_1 - d_2 - d_3)\cos x + 2\sqrt{3}(d_2 - d_3)\sin x + d_1 + d_2 + d_3\Big), \quad (30)$$

в котором равенство выполняется в точках спектра плана (29).

Доказательство. Для D-оптимального плана ε_3^0 по теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица [1] должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{d(x)}(1, \cos x, \sin x) M^{-1}(\varepsilon_3^0)\begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \le 3,\ x \in [0, 2\pi), \quad (31)$$

причем в неравенстве (31) равенство должно достигаться в точках спектра плана (29). Проверим справедливость этого утверждения.

Информационная матрица плана равна

$$M(\varepsilon_3^0) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1, 1, 0) + \frac{1}{d_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{d_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & k & e \\ c & e & m \end{pmatrix},$$

где

$$a = d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1},\ b = d_1^{-1} - \frac{1}{2}d_2^{-1} - \frac{1}{2}d_3^{-1},\ c = \frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}d_3^{-1},\ e = -\frac{\sqrt{3}}{4}d_2^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4}d_3^{-1},$$
$$k = d_1^{-1} + \frac{1}{4}d_2^{-1} + \frac{1}{4}d_3^{-1},\ m = \frac{3}{4}d_2^{-1} + \frac{3}{4}d_3^{-1}. \tag{32}$$

Матрица, обратная к матрице $M\left(\varepsilon_3^0\right)$, имеет вид

$$M^{-1}\left(\varepsilon_3^0\right) = \frac{3}{akm + 2bce - c^2k - e^2a - b^2m}\begin{pmatrix} km - e^2 & ce - bm & be - kc \\ ce - bm & am - c^2 & bc - ae \\ be - kc & bc - ae & ak - b^2 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Используя формулу (32), преобразуем элементы матрицы (33):

$$km - e^2 = \frac{3\left(d_1 + d_2 + d_3\right)}{4d_1d_2d_3},\ ce - bm = \frac{3\left(2d_1 - d_2 - d_3\right)}{4d_1d_2d_3},\ be - kc = \frac{3\sqrt{3}\left(d_2 - d_3\right)}{4d_1d_2d_3},$$

$$am - c^2 = \frac{3\left(d_2 + 4d_1 + d_3\right)}{4d_1d_2d_3},\ bc - ae = \frac{3\sqrt{3}\left(d_3 - d_2\right)}{4d_1d_2d_3},\ ak - b^2 = \frac{9\left(d_3 + d_2\right)}{4d_1d_2d_3}, \tag{34}$$

$$akm + 2bec - c^2k - e^2a - b^2m = \frac{27}{4d_1d_2d_3}.$$

Разрешая неравенство (31) относительно функции $d\left(x\right)$ и учитывая соотношения (33) и (34), получаем требуемое неравенство (30). Легко проверить, что неравенство (30) обращается в равенство в точках спектра плана (29). Условия теоремы эквивалентности Кифера – Вольфовица выполнены. Теорема 4 доказана.

Точки спектра плана (29) можно сдвинуть на угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда

$$x_1^0 = \varphi,\ x_2^0 = \frac{2\pi}{3} + \varphi,\ x_3^0 = \frac{4\pi}{3} + \varphi \tag{35}$$

есть точки спектра такого плана экспериментов, при этом изменится вид функций $d\left(x\right)$ в неравенстве (30). Расчеты, проведенные для угла $\varphi = \frac{\pi}{6}$, подтверждают это. Пусть $d_1 = d\left(x_1^0\right),\ d_2 = d\left(x_2^0\right),\ d_3 = d\left(x_3^0\right)$. Следуя теореме эквивалентности Кифера – Вольфовица, получим выражение для дисперсий наблюдений $d\left(x\right)$, соответствующих оптимальному плану экспериментов с точками спектра (35):

$$d\left(x\right) \geq \frac{1}{9}\Big(3\left(d_1 + d_2\right)\cos^2 x + \left(d_1 + d_2 + 4d_3\right)\sin^2 x + \sqrt{3}\left(d_1 - d_2\right)\sin 2x +$$
$$+ 2\sqrt{3}\left(d_1 - d_2\right)\cos x + 2\left(d_1 + d_2 - 2d_3\right)\sin x + d_1 + d_2 + d_3\Big). \tag{36}$$

В точках спектра (35) плана с углом $\varphi = \frac{\pi}{6}$ неравенство (36) обращается в равенство.

Можно было бы получить и обобщение неравенства (36) для произвольных углов φ так, как это было сделано в теореме 3. Однако расчеты в данном случае становятся намного более сложными и громоздкими.

Итак, для регрессионной функции (21) и ее частного случая без свободного члена существуют два различных типа D-оптимальных планов. Это планы (24), (29) и планы, которые строятся на основе теоремы 1.

Возникает вопрос: можно ли для регрессионной функции (21) с четырьмя наблюдениями построить оптимальный план

$$\varepsilon_4^0 = \begin{Bmatrix} 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}, \end{Bmatrix} \tag{37}$$

с неравноточными наблюдениями, для которого дисперсии наблюдений в точках спектра плана (37) будут различными? В публикации [4] доказано, что сделать это нельзя.

Библиографические ссылки

1. Ермаков СМ, Жиглявский АА. *Математическая теория оптимального эксперимента.* Москва: Наука; 1987. 320 с.
2. Федоров ВВ. *Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов).* Москва: Наука; 1971. 312 с. (Физико-математическая библиотека инженера).
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimension regression. *The Annals of Mathematical Statistics.* 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Кирлица ВП. *D*-оптимальные планы экспериментов для тригонометрической регрессии на отрезке с неравноточными наблюдениями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;3:80–85. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-80-85.
5. Ермаков СМ, Бродский ВЗ, Жиглявский АА, Козлов ВП, Малютов МБ, Мелас ВБ и др. *Математическая теория планирования эксперимента.* Ермаков СМ, редактор. Москва: Наука; 1983. 392 с. (Справочная математическая библиотека).

References

1. Ermakov SM, Zhiglyavskii AA. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo eksperimenta* [The mathematical theory of optimal design]. Moscow: Nauka; 1987. 320 p. Russian.
2. Fedorov VV. *Teoriya optimal'nogo eksperimenta (planirovanie regressionnykh eksperimentov)* [The theory of optimal design (planning regression experiments)]. Moscow: Nauka; 1971. 312 p. (Fiziko-matematicheskaya biblioteka inzhenera). Russian.
3. Hoel PG. Minimax designs in two dimension regression. *The Annals of Mathematical Statistics.* 1965;36(4):1097–1106. DOI: 10.1214/aoms/1177699984.
4. Kirlitsa VP. *D*-optimal designs of experiments for trigonometric regression on interval with heteroscedastic observations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:80–85. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-80-85.
5. Ermakov SM, Brodskii VZ, Zhiglyavskii AA, Kozlov VP, Malyutov MB, Melas VB, et al. *Matematicheskaya teoriya planirovaniya eksperimenta* [The mathematical theory of experiment design]. Ermakov SM, editor. Moscow: Nauka; 1983. 392 p. (Spravochnaya matematicheskaya biblioteka). Russian.

Получена 22.05.2023 / исправлена 02.06.2023 / принята 05.06.2023.
Received 22.05.2023 / revised 02.06.2023 / accepted 05.06.2023.