

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«30» июня 2023 г.

Регистрационный № УД – 12036/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направления специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, ОСВО 1-31 03 09-2021, типовых учебных планов № G31-1-021/пр.-тип. от 21.04.2021, № G31-1-011/пр.-тип. от 31.03.2021 и учебных планов:

для специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность) № G31-1-003/уч. от 25.05.2021; № G31-1-061/уч. ин. от 31.05.2021, № G31-1-207/уч. от 22.03.2022; № G31-1-243/уч.ин. от 27.05.2022;

для специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность) № G31-1-004/уч. от 25.05.2021;

для специальности 1-31 03 01-09 Компьютерная математика и системный анализ № G31-1-019/уч. от 25.05.2021; № G31-1-004/уч.ин. от 31.05.2021; № G31-1-222/уч. от 22.03.2022; № G31-1-226/уч.ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

Татьяна Семеновна Якименко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Алексей Иванович Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Марина Викторовна Игнатенко, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Василий Михайлович Волков, профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

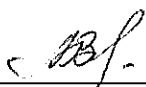
РЕЦЕНЗЕНТ

Алмас Ибрагимовна Шербаф, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики учреждения образования "Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка", кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ
(протокол № 11 от 24.05.2023 г.)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Заведующий кафедрой _____  М.В. Игнатенко

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «Численные методы» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в ее содержание.

Учебная программа учебной дисциплины «Численные методы» разработана для студентов III–IV курса очной (дневной) формы обучения по специальностям 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ; 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направления специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность) и 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность) механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Цели и задачи учебной дисциплины

Дисциплина «Численные методы» имеет прикладную направленность. *Основная цель учебной дисциплины* заключается в освоении учащимися современной технологией математического моделирования, основанной на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Опыт преподавания дисциплины «Численные методы» на механико-математическом факультете БГУ показывает, что обучение на практических занятиях должно проводиться в двух направлениях: изучения основ численных методов на примере решения теоретических задач и выполнения расчетных работ с использованием компьютеров. При этом только непосредственное общение исследователя с конкретными задачами кроме возможности закрепить лекционный материал, помогает дать общее представление и выработать необходимую интуицию для нахождения эффективных путей решения задач вычислительной математики.

В последние годы высокая техническая оснащенность и рост возможностей вычислительной техники позволяют существенно обогатить практиче-

скую сторону вычислительного практикума. Использование современных компьютерных математических систем (Maple, MathCAD, MatLAB, Mathematica и др.), а, также стандартных библиотек численного анализа позволяют, не углубляясь в знание частных вопросов, сосредоточиться непосредственно на объекте (цели) исследования, ускорить процесс получения решения типовых задач. Как следствие, решение большего числа разнообразных задач способствует приобретению студентами некоторого опыта практических расчетов. При этом спектр рассматриваемых проблем расширяется от типичных до достаточно сложных в вычислительном отношении задач, требующих для численной реализации использования мощных компьютеров. Появляется возможность уделять больше внимания анализу характеристик вычислительных алгоритмов и связи практических результатов с полученными теоретическими оценками.

Более того, часть времени, освобождающегося за счет использования современной вычислительной техники, позволяет уделять больше внимания детальному рассмотрению теоретических задач вычислительной математики. Это несомненно является важным моментом вычислительного практикума, поскольку как правило именно такого рода задачи помогают усваиванию, закреплению и более полному пониманию основных определений, понятий, результатов и алгоритмов вычислительной математики. Кроме того, решение теоретических задач позволяет установить связь между различными разделами математики, в частности, численного анализа, и, как следствие, способствует полноте восприятия курса по численным методам. При этом значительно возрастает роль самостоятельной работы студентов над предметом, без чего его успешное освоение представляется маловероятным. Общая оценка качества усвоения студентами учебного материала осуществляется в ходе выполнения индивидуальных заданий.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Численные методы» относится:

- к модулю «Численные методы» компонента учреждения высшего образования для специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ;
- к модулю «Прикладные методы анализа» компонента учреждения высшего образования для специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направления специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность) и 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность).

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Численные методы» базируется на знаниях, полученные при изучении дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения» и

«Уравнения математической физики» связана с дисциплиной «Исследование операций».

Требование к компетенции

Освоение учебной дисциплины должно обеспечить формирование у студентов следующей *специализированной* компетенции:

– СК-6. Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых математических задач, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- источники погрешности численных результатов;
- понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;
- требования корректности постановки задачи;
- основные приемы оценки погрешности численных методов;
- назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, формулы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU-факторизация, итерационные методы Рунге-Кутты, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге-Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье);
- достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений;
- современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

уметь:

- оценить корректность постановки задачи;
- выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи;
- использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;
- анализировать достоверность и трактовать численные результаты;

владеть:

- навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;
- навыками программирования численных алгоритмов;
- основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5-7 семестрах. Всего на изучение учебной дисциплины «Численные методы» отведено:

- для очной (дневной) формы обучения 270 часов, в том числе 140 аудиторных часов, из них: 52 часа лекций, 78 часов лабораторных занятий и 10 часов управляемой самостоятельной работы. Рекомендуется следующее *распределение часов* по семестрам и видам учебной работы:

Дневная форма обучения	Трудоемкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Всего часов	В том числе аудиторных	Из них		
						Лекций	Лабораторных занятий	УСР
5 сем.	3		5	90	54	18	32	4
6 сем.	3		6	90	50	10 6 (ДО)	30	4
7 сем.	3	7		90	36	16 2 (ДО)	12 4 (ДО)	2
Всего	9			270	140	52	78	10

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

Тема 1.1 Об основных задачах и содержании вычислительной математики.

Тема 1.2 Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского.

Раздел 2. Элементы теории погрешностей

Тема 2.1 Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций.

Тема 2.2 Прямая и обратная задачи теории погрешностей.

Тема 2.3 Примеры неустойчивых алгоритмов.

Тема 2.4 Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

Раздел 3. Интерполирование и приближение функций

Тема 3.1 Системы функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами.

Тема 3.2 Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

Тема 3.3 Конечные разности.

Тема 3.4 Разделенные и разности, их свойства.

Тема 3.5 Интерполяционный многочлен Ньютона.

Тема 3.6. Представление погрешности интерполирования.

Тема 3.7. Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций.

Тема 3.8 Многочлены Чебышева.

Тема 3.9 Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке.

Тема 3.10 Интерполирование по равноотстоящим узлам.

Тема 3.11 Интерполирование сплайнами.

Тема 3.12 Интерполяционная задача Эрмита.

Тема 3.13 Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье.

Тема 3.14 Численное дифференцирование и оценка его погрешности.

Тема 3.15 Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов.

Раздел 4. Приближенное вычисление интегралов

Тема 4.1 Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании.

Тема 4.2 Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

Тема 4.3 Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

Тема 4.4 Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул.

Тема 4.5 Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы.

Тема 4.6 Частные случаи квадратур Гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида.

Раздел 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных

Тема 5.1. Интерполирование многочленами многих переменных.

Тема 5.2. Численное дифференцирование функций многих переменных.

Тема 5.3 Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло.

Раздел 6. Численные методы решения систем ЛАУ

Тема 6.1 Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности.

Тема 6.2 Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента.

Тема 6.3 LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации.

Тема 6.4 Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.

Тема 6.5 Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра.

Тема 6.6 Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации.

Тема 6.7 Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Раздел 7. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

Тема 7.1 Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия.

Тема 7.2 Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.

Тема 7.3 Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.

Тема 7.4 Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Раздел 8. Решение нелинейных уравнений и систем

Тема 8.1 Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов.

Тема 8.2 Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости.

Тема 8.3 Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона.

Тема 8.4 Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

Тема 8.5 Обзорное занятие по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»

Раздел 9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 9.1 Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости.

Тема 9.2 Методы Рунге-Кутты.

Тема 9.3 Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса.

Тема 9.4 Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира.

Раздел 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 10.1 Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка.

Тема 10.2 Методы построения разностных схем. Интегроинтерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина.

Тема 10.3 Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем.

Тема 10.4 Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ.

Тема 10.5 Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Раздел 11. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма

Тема 11.1 Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

Раздел 12. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики

Тема 12.1 Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.

Тема 12.2 Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости.

Тема 12.3 Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума

Тема 12.4 Обзорное занятие по теме «Методы численного решения дифференциальных уравнений»

Тема 12.5 Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	9	
1	Введение	1						
1.1	Об основных задачах и содержании вычислительной математики	1						Опрос
1.2	Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского							
2	Элементы теории погрешностей				2			
2.1	Значение и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций				2			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию
2.2	Прямая и обратная задачи теории погрешностей							
2.3	Примеры неустойчивых алгоритмов							
2.4	Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел							
3	Интерполирование и приближение функций	11			14		2	
3.1	Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами	0,5			2			Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию

3.2	Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа	0,5			1		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.3	Конечные разности	0,5					Опрос
3.4	Разделенные и разности, их свойства	0,5					Опрос
3.5	Интерполяционный многочлен Ньютона	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.6	Представление погрешности интерполирования	1					Опрос
3.7	Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций	1					Опрос
3.8	Многочлены Чебышева	1					Опрос
3.9	Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.10	Интерполирование по равноотстоящим узлам	0,5					Опрос
3.11	Интерполирование сплайнами	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.12	Интерполяционная задача Эрмита	1					Опрос
3.13	Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.14	Численное дифференцирование и оценка его погрешности	0,5			1		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.15	Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, коллоквиум по темам 3.5 и 3.11, контрольная работа по разделу 3
4	Приближенное вычисление интегралов	4			10		2
4.1	Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании	1					Опрос

4.2	Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
4.3	Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
4.4	Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
4.5	Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация расчленения узлов квадратурной формулы	1			2	2	Опрос, отчет по лабораторной работе, контрольная работа по разделу 4
4.6	Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
5	Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных	2			6		
5.1	Интерполирование многочленами многих переменных	1			4		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
5.2	Численное дифференцирование функций многих переменных						
5.3	Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, математический диктант по разделам 4 и 5
	ВСЕГО 5 семестр	18			32	4	Зачет
6	Численные методы решения систем ЛАУ	4 6 (ДО)			10	2	
6.1	Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности	1			1		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.2	Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента	1			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.3	LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации	2			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.4	Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации	1 (ДО)					Опрос
6.5	Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра	1 (ДО)			1		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию

6.6	Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации	2 (ДО)			2	2	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.7	Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов	2 (ДО)			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию, контрольная работа по разделу 6
7	Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц	2			8		
7.1	Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7.2	Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7.3	Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию, контрольная работа по разделу 7
7.4	Метод вращений. Понятие о QR алгоритме	0,5			2		Опрос
8	Решение нелинейных уравнений и систем	4			12	2	
8.1	Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов	1			2		Опрос, отчет по домашнему заданию
8.2	Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости	1			4		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
8.3	Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона	1			4	2	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию, математический диктант по разделам 7 и 8
8.4	Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы	0,5			2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
8.5	Обзорные занятия по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»	0,5					Коллоквиум по разделам 6-8

	Всего 6 семестр	10 6 (ДО)		30	4	Зачет
9	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	4		4		
9.1	Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости	1		2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
9.2	Методы Рунге-Кутты	1		2 (ДО)		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
9.3	Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса	1		2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию, контрольная работа по темам 9.1 и 9.3
9.4	Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира	1				Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6		4	2	
10.1	Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка	1		2 (ДО)		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.2	Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина	2		2		Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.3	Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем	1		2 (ДО)	2	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.4	Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ	1				Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.5	Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы	1		2		Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, контрольная работа по темам 10.3-10.5
11	Численное решение интегральных уравнений Фредгольма	2				
11.1	Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных	2				Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию

	уравнений типа свертки												
12	Построение и исследование разностных схем для задач математической физики	4 2 (ДО)					4						
12.1	Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем	2 (ДО)					2						Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
12.2	Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости	1					2						Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
12.3	Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума	1											Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
12.4	Обзорные занятия по теме «Методы численного решения дифференциальных уравнений»	1											Математический диктант
12.5	Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов	1											Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию, коллоквиум по разделам 9, 10, 12
	Всего 7 семестр	16 2 (ДО)					12 4 (ДО)					2	Экзамен
	ИТОГО	52					78					10	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Волков В.М. Численные методы: учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч.1. – Минск: БГУ, 2016. – 87 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/161943>.
2. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учеб. пособие / Г. И. Марчук. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. - 608 с. - По ссылке доступна электронная версия издания 2022 г. - <https://e.lanbook.com/book/210302>.
3. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. – 734 с. – По ссылке доступна электронная версия издания 2022 г. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210368>.
4. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — 8-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 672 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210674>.
5. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 512 с. — Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/2002583>.
6. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова. — Москва: ИНФРА-М, 2022. — 368 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1852192>.

Перечень дополнительной литературы

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы. Решения задач и упражнения: Учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А. А Корнев, Е. В. Чижонков. – М.: Бином, 2016. – 352 с.
2. Волков, В. М. Численные методы. В 2 ч. / В. М. Волков. – Минск: БГУ, 2016. – Ч. 1. – 88 с.
3. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. – 640 с.
4. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
5. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Academia, 2018. – 96 с.
6. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
7. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.
8. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.

9. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 286 с.
10. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.
11. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
12. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1998. – 470 с.
13. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Альянс, 2016. – 432 с.
14. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
15. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
16. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. П. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 386 с.
17. Волков, В. М. Численный анализ и оптимизация/ В.М.Волков, О. Л.Зубко, И. Н. Катковская, И. Л. Ковалева, В. Г. Кротов, П. Лима. – Минск: Белгослес, 2017. – 207 с.
18. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. 632 с.
19. Игнатенко, М. В. Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск: БГУ, 2006. 116 с.
20. Монастырный, П. И. Сборник задач по методам вычислений: учебное пособие / А.И. Азаров, В.А. Басик, М.В. Игнатенко и др./ под ред. П.И. Монастырного. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 376 с.
21. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Рекомендуются следующие формы диагностики результатов учебной деятельности: опрос, отчет по лабораторным работам, отчет по домашнему заданию, контрольные работы, математические диктанты и коллоквиумы.

Оценка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, примеров из практики и т. д.

Оценка отчетов по лабораторным может включать в себя корректность используемых методов исследования, привлечение знаний из сопредельных областей, организация работы группы.

Контроль УСР проводится преподавателем с использованием ИКТ в форме опроса и проверки результатов выполнения работы.

Полученные студентом количественные результаты учитываются как составная часть итоговой отметки по дисциплине в рамках рейтинговой системы оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ (приказ ректора № 189-ОД от 31.03.2020 г.).

Формой текущей аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен в 5 и 6 семестрах – **зачет**, в 7 семестре – **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Рекомендуются следующие примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

- ответы на аудиторных занятиях – 5%;
- отчеты по лабораторным работам – 20%;
- отчеты по домашним заданиям – 20%;
- контрольные работы – 25%;
- математический диктант – 10%;
- коллоквиум – 20%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов Вес отметки текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационной отметки – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3.9. Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

Тема 4.5. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 8, задачи и упражнения 118-164.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Тема 6.6. Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации (2 ч.)

Исследовать зависимость количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов с переобуславливателем iLU в зависимости от размерности матрицы (матрица Пуассона, функции МАТЛАБ `pcg`, `gallery`, `ilu`).

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

Тема 8.3. Метод Ньютона. Квадратичная сходимость (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 5.2, задачи и упражнения 55-62.

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

Тема 10.3. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 10.5, задачи и упражнения 63-72.

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются

1) эвристический подход:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;

- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;

- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

2) практико-ориентированный подход:

- освоение содержания образования через решения практических задач;

- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

3) **методы и приемы развития критического мышления**, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

4) **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий;

– выполнение домашнего задания;

– подготовка к лабораторным занятиям;

– курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины;

– подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале <https://edummf.bsu.by> смешанного и дистанционного обучения БГУ и содержащие учебные материалы для электронного сопровождения изучаемой дисциплины.

Примерный перечень вопросов к зачету

5 семестр

1. Системы функций Чебышева. Определение и примеры. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы система функций была чебышевской
2. Интерполирование обобщенными многочленами
3. Постановка задачи. Достаточное условие существования и единственности интерполяционного обобщенного многочлена
4. Алгебраическое интерполирование
5. Алгебраическое интерполирование как частный случай интерполирования обобщенными многочленами.
6. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Инвариантность относительно алгебраических многочленов соответствующей степени
7. Конечные разности
8. Определение, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
9. Представление конечной разности произвольного порядка через значения функции
10. Представление значения функции через значения последовательных конечных разностей
11. Разделенные разности
12. Определения, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
13. Представление разделенных разностей произвольного порядка через значения функции. Свойство симметрии
14. Представление значения функции через значения последовательных разделенных разностей
15. Представление разделенной разности через производную функции соответствующего порядка
16. Связь между разделенными и конечными разностями для равноотстоящих аргументов. Выражение конечной разности через производную функции

17. Интерполяционная формула Ньютона. Определение, построение, свойство инвариантности относительно многочленов соответствующей степени
18. Многочлены Чебышева. Определение, корни, точки экстремума
19. Приведенный многочлен Чебышева, его норма в пространстве непрерывных функций
20. Оценка остаточного члена интерполяционного полинома и ее минимизация
21. Представление погрешности интерполирования в форме Лагранжа
22. Минимизация погрешности интерполяционного полинома дискретных функций в фиксированной точке
23. Минимизация погрешности интерполяционного полинома по норме в пространстве непрерывных функций на заданном отрезке
24. Интерполирование по равноотстоящим узлам
25. Формула Ньютона для интерполирования в начале таблицы. Погрешность интерполирования
26. Формула Ньютона для интерполирования в конце таблицы. Погрешность интерполирования
27. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное преобразование Фурье
28. Существование и единственность тригонометрического интерполяционного многочлена
29. Случай равноотстоящих узлов
30. Дискретное (прямое) преобразование Фурье
31. Дискретное (обратное) преобразование Фурье
32. Определение интерполяционного сплайна. Схема построения
33. Постановка задачи аппроксимации. Метод наименьших квадратов
34. Квадратурные формулы общего вида. Определение.
35. Квадратуры, основанные на алгебраическом интерполировании
36. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратурная формула была интерполяционной
37. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы. Ее максимальное значение, выраженное через число узлов квадратурной формулы. Связь между точностью и числом узлов квадратурной формулы
38. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса
39. Определение. Степень точности
40. Частные случаи формулы Ньютона-Котеса. Представление погрешности
41. Составные квадратурные формулы
42. Составные квадратурные формулы общего вида

43. Примеры построения составных квадратурных формул
44. Алгебраическая степень точности составной квадратурной формулы
45. Представление погрешности составной квадратурной формулы
46. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул
47. Квадратурные формулы типа Гаусса. Определение.
48. Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратурная формула была точна для многочленов максимально возможной степени
49. Существование и единственность квадратурной формулы гауссова типа
50. Свойство положительности квадратурных коэффициентов
51. Представление остаточного члена формулы типа Гаусса
52. Частные случаи квадратурных формул гауссова типа
53. Квадратурная формула гауссова типа с весом Якоби
54. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Эрмита
55. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Лагерра
56. Вычисление кратных интегралов
57. Кубатурные формулы, основанные на интерполировании. Существование и единственность
58. Свойство инвариантности интерполяционной кубатурной формулы относительно многочленов соответствующей степени
59. Методы построения кубатурных формул
60. Метод Монте-Карло

6 семестр

1. Представление чисел с плавающей запятой и особенности арифметических операций с ними. Машинные ϵ , ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ. Невязка. Оценки погрешности при решении систем ЛАУ с возмущенной правой частью.
4. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Метод простой итерации для решения систем ЛАУ.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).

12. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
13. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
14. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
15. Преобразования Гивенса. Метод вращений.
16. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR – разложение.
17. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
18. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
19. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
20. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
21. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
22. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.
23. Численные методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.

Примерный перечень вопросов к экзамену 7 семестр

1. Прямая и обратная задачи теории погрешностей.
2. Примеры неустойчивых алгоритмов.
3. Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.
4. Оценка погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Невязка. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ.
5. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
6. LU-декомпозиция.
7. Разложение Холецкого.
8. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
9. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий останова итераций.
10. Итерационный метод наименьших невязок.
11. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
12. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
13. Проблема собственных значений.
14. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
15. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.
16. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.

17. Метод вращений.
18. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR- разложение.
19. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
20. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
21. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
22. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
23. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
24. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.
25. Численные. Методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.
26. Метод Эйлера для решения задачи Коши.
27. Сходимость и оценка погрешности метода Эйлера.
28. Метод Рунге-Кутты.
29. Правило Рунге для апостериорной оценки погрешности методов решения задачи Коши.
30. Одношаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты.
31. Многошаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса.
32. Устойчивость численных методов решения задачи Коши. Правило корней.
33. Численные методы решения жестких систем. A-устойчивость. Метод Гирра.
34. Численные методы решения краевых задач. Метод Стрельбы.
35. Разностный метод решения краевых задач.
36. Основные понятия теории разностных схем для уравнений математической физики. Аппроксимация (согласованность), устойчивость, сходимость, сеточный шаблон.
37. Разностные схемы для нестационарного уравнения теплопроводности.
38. Разностные схемы для уравнения переноса.
39. Разностные схемы для эллиптических уравнений.
40. Теорема Лакса об эквивалентности.
41. Метод гармоник для исследования устойчивости разностных схем.
42. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Исследование операций	Функционального анализа и аналитической экономики	Отсутствуют	Утвердить согласование (протокол № 11 от 24.05.2023 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на _____ / _____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры Веб-технологий и компьютерного моделирования (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
канд. физ.-мат. наук, доцент

М.В. Игнатенко

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков