*УДК 519.24*

*Н.Н. ТРУШ*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

In this paper the estimation methods of parameters of processes GARCH(1,1) with the regularly varying remainders having an index $\kappa > 0$ and with the stable remainders are received.

Для исследования экономических и финансовых временных рядов было предложено много моделей различной сложности, однако большая их часть недостаточно полно отражала действительное поведение рынка. Классические модели, такие как, например, ARMA (Autoregressive Moving Average – модель авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего), основаны на предположении, что дисперсия является постоянной. Но не вызывает сомнения, что присущая рынку неопределенность, мерой которой как раз и будет дисперсия, изменяется во времени. Предложенная в [1] модель ARCH($q$) (Autoregressive Conditionally Heteroskedastic – авторегрессионной условной гетероскедастичности) представляет собой большой практический интерес. Несмотря на свои преимущества, модель ARCH в первоначальном варианте на практике используется редко. Это связано с большим количеством параметров, необходимых для достаточно точного описания исследуемых временных рядов.

Предложенная в работе [2] обобщенная модель ARCH($q$) – GARCH($p, q$) (Generalized ARCH) дает возможность избежать этих проблем. Как правило, на практике достаточно взять порядок модели (1,1), но иногда используются модели порядков (1,2) и (2,1). Классическая модель GARCH($p, q$) строится в предположении, что остатки имеют стандартное нормальное распределение. Однако реальные данные далеко не всегда соответствуют этой гипотезе. Это и дало толчок к развитию альтернативных моделей, среди которых наиболее распространенными являются $t$-GARCH – модель с использованием $t$-распределения Стьюдента для остатков, IGARCH (Integrated GARCH), а также нелинейные модели – APARCH (Asymmetric Power GARCH [3]) и EGARCH (Exponential GARCH [4]). Еще больше обобщили классическую модель авторы [5, 7], предложив использовать GARCH и APARCH с устойчивым распределением остатков. Модели авторегрессионной условной гетероскедастичности в общем виде рассмотрены в [8] и [9].

В данной работе приводятся некоторые результаты, полученные автором и его учениками Ле Хонг Шоном (Вьетнам), Чэнь Хайлуном (Китай), А. Ярош за последние три года и касающиеся исследования параметрических моделей временных рядов [11–17].

*Определение* (GARCH(*p, q*)-процесс). Процесс $X_t, t \in Z$, называется GARCH(*p, q*), $p, q = 1, 2, \ldots$, процессом, если для него существуют первые два условные момента, удовлетворяющие условиям:

I. $M\left\{X_t \mid X_u, u < t\right\} = 0, t \in Z$,

II. Существуют константы $\omega_0$, $\alpha_i$, $i = \overline{1, q}$, $\beta_j$, $j = \overline{1, p}$, такие, что

$$\sigma_t^2 = D\left\{X_t \mid X_u, u < t\right\} = \omega_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2,\ t \in Z, \tag{1}$$

а

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \tag{2}$$

где $\varepsilon_t, t \in Z$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\varepsilon_t$ являются независимыми от $\sigma_t$ для каждого фиксированного $t, t \in Z$.

Равенство (1) может быть записано в более компактном виде

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha\left(B\right) X_t^2 + \beta\left(B\right) \sigma_t^2, t \in Z,$$

где $B$ есть стандартный оператор сдвига

$$B^i X_t^2 = X_{t-i}^2,$$
$$B^i \sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$$

для любого целого $i$, а $\alpha$ и $\beta$ являются полиномами степени $q$ и $p$ соответственно:

$$\alpha\left(B\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i B^i,$$

$$\beta\left(B\right) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j B^j.$$

Если $\beta\left(z\right) = 0$, из (1) получим

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2,$$

и в этом случае процесс $X_t$, $t \in Z$, называется процессом ARCH(*q*).

Определим

$$\eta_t = X_t^2 - \sigma_t^2, t \in Z.$$

Подставляя в (1) вместо $\sigma_{t-j}^2$ выражение $X_{t-j}^2 - \eta_{t-j}$, получим представление

$$X_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i + \beta_i\right) X_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \eta_{t-j}, t \in Z,$$

где $r = \max\left(p, q\right)$, причем $\alpha_i = 0$, если $i > q$, и $\beta_j = 0$, если $j > p$.

При дополнительных предположениях о стационарности второго порядка для $X_t^2$ можем утверждать, что если $X_t$ является GARCH(*p, q*)-процессом, то $X_t^2$ есть ARMA(*r, p*)-процесс.

Говорят, что случайный процесс $X_t, t \in Z$, удовлетворяет модели с условной гетероскедастичностью первого порядка, если он задается следующим образом:

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t = g_\theta\left(X_{t-1}, \sigma_{t-1}\right), \tag{3}$$

где $\varepsilon_t$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\varepsilon_t = 0, t \in Z$, а $g_\theta\left(X_t, \sigma_t\right)$ – семейство неотрицательных функций на $R \times [0, \infty)$ с вектором параметров $\theta$.

Не все модели удобно представлять в виде (3). Например, модель APARCH(1,1) (Asymmetric Power GARCH) задается следующим образом:

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha\left(\left|X_{t-1}\right| - \gamma X_{t-1}\right)^\delta + \beta \varepsilon_{t-1}^\delta,$$

где $\varepsilon_t, t \in Z$, – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, а постоянные $\omega \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\beta \geq 0$, $0 < \delta \leq 2$.

В общем случае предположим, что модель задана в виде

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad (4)$$
$$p(\sigma_t) = g_\theta(X_{t-1}, p(\sigma_{t-1})),$$

где $p(x), x \geq 0$, – некоторая монотонная функция.

Заметим, что модель (4) можно привести к виду (3), а именно

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t = p^{-1}\left(g_\theta\left(X_{t-1}, p(\sigma_{t-1})\right)\right).$$

**Лемма 1.** *Если* $p = q = 1$, *то при условии* $E\ln(\beta_1 + \alpha_1\varepsilon_0^2) < 0$ *(1) можно переписать в виде*

$$\sigma_t^2 = \omega_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}(\beta_1 + \alpha_1\varepsilon_{t-i}^2)\right], \; t \in Z,$$

*и если* $0 < \beta_1 < 1$, *то*

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega_0}{1-\beta_1} + \alpha_1\sum_{k=0}^{\infty}\beta_1^k X_{t-k-1}^2, \; t \in Z.$$

Рассмотрим модель GARCH(1,1)

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \; t \in Z, \qquad (5)$$

где $\{\varepsilon_t\}$ – независимые, одинаково распределенные к-устойчивые случайные величины, $\kappa \in (0; 2]$,

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1-\beta_0) + \alpha_0 X_{t-1}^2 + \beta_0\sigma_{t-1}^2, \; t \in Z, \qquad (6)$$

и

$$\omega_0 > 0, \; \alpha_0 > 0, \; \beta_0 \geq 0.$$

Известно, что если остатки имеют к-устойчивое распределение, $\kappa \in (0; 2]$, то $E|\varepsilon_t|^k < \infty$ тогда и только тогда, когда $0 < k < \kappa$. В работе [10] показано, что, используя метод квазимаксимального правдоподобия, нельзя получить $n^{-1/2}$-состоятельную оценку, если $E|\varepsilon_0|^k = \infty$ при $0 < k < 4$. Это показывает ограниченность метода квазимаксимального правдоподобия для случая устойчивых остатков модели GARCH.

Используя лемму 1, (6) можно переписать в виде

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0\sum_{k=0}^{\infty}\beta_0^k X_{t-k-1}^2, \; t \in Z.$$

Пусть $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$ – неизвестные параметры модели, тогда рассматриваемая параметрическая модель может быть представлена в виде

$$X_t = \sigma_t(\theta)\varepsilon_t, \; t \in Z,$$

где

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega(1-\beta) + \alpha X_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2(\theta),$$

с параметрическим пространством

$$\Theta = \{\theta = (\omega, \alpha, \beta) : 0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \; 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2,$$
$$0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 1, \; E\ln(\beta + \alpha\varepsilon_0^2) < 0\}$$

в предположении, что

$$\theta_0 \text{ – внутренняя точка пространства } \Theta. \qquad (7)$$

Известно [10], что если существуют $\theta_1 = (\omega, \alpha, \beta) \in \Theta$, $\theta_2 = (\omega', \alpha', \beta') \in \Theta$ такие, что $\sigma_t^2(\theta_1) = \sigma_t^2(\theta_2)$, то $\theta_1 = \theta_2$, т. е. $\omega = \omega', \alpha = \alpha', \beta = \beta'$.

Заметим, что в этом случае

$$\sigma_t^2(\theta_0) = \sigma_t^2.$$

Рассмотрим модифицированную функцию правдоподобия в следующем виде:

$$L_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} l_t(\theta),\;\; l_t(\theta)=-\left[\ln\sigma_t^2(\theta)+\frac{1}{p}\left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}\right)^p\right], \tag{8}$$

$p$ – некоторая константа, $0<p<\kappa/2.$

Предположим, что

$$\lim_{t\to 0} t^{-\mu}P(\varepsilon_0^2\le t)=0 \text{ при некотором } \mu>0. \tag{9}$$

**Лемма 2.** *Если имеет место (9), то для любых* $\lambda,\;\; 0<\lambda<\kappa/2,$ *имеем*

$$E\left\{\sup_{\theta\in\Theta}\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}\right\}^{\lambda}<\infty.$$

**Лемма 3.** *Пусть* $0<p<\kappa/2,$ *функция* $L(\theta)$ *определена в (8), тогда*

$$E\left\{\sup_{u,v\in\Theta}\frac{1}{|u-v|}|L_n(u)-L_n(v)|\right\}<\infty.$$

Пусть $\hat{\theta}_n$ – $M$-оценка параметра $\theta_0$ модели (5), (6) с функцией правдоподобия (8), т. е.

$$\hat{\theta}_n=\arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(\theta).$$

Состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$ доказывает следующая

**Теорема 1.** *Предположим, что* $0<p<\kappa/2,\;\; E|\varepsilon_0^2|^p=1,$ *и имеют место соотношения (7) и (9), тогда*

$$\hat{\theta}_n\xrightarrow{\text{п.н.}}\theta_0 \;\; \textit{при}\;\; n\to\infty.$$

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для* $p<\kappa/4$ *имеем*

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n-\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,B^{-1}\Sigma B^{-1}) \;\; \textit{при}\;\; n\to\infty,$$

*где* $\Sigma=(E(\varepsilon_0^4)^p-1)A,\;\; A=E\left[\left(\frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2}\right)^T\frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2}\right],\;\; B=El_0''(\theta_0),$

*а* $\xrightarrow{d}$ *означает сходимость по распределению.*

Рассмотрим модель GARCH(1,1) вида (5), (6), где $\{\varepsilon_t^2\}$ – независимые, одинаково распределенные регулярно меняющиеся случайные величины с индексом $\kappa,\;\; \kappa>0,\;\; \sigma_t^2(\theta)=\omega(1-\beta)+\alpha X_{t-1}^2+\beta\sigma_{t-1}^2(\theta).$

Пусть $\theta_0=(\omega_0,\alpha_0,\beta_0)$ – неизвестные параметры модели, параметрическое пространство

$$\Theta=\{\theta=(\omega,\alpha,\beta):0<\omega_1\le\omega\le\omega_2,\,0<\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2,$$
$$0<\beta_1\le\beta\le\beta_2<1,\,E\ln(\beta+\alpha\varepsilon_0^2)<0\},$$

$\theta_0$ – внутренняя точка пространства $\Theta.$

Используя лемму 1, $\sigma_t^2(\theta)$ можно переписать в виде

$$\sigma_t^2(\theta)=\omega+\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k X_{t-k-1}^2,\;\; t\in Z.$$

Рассмотрим модифицированную функцию правдоподобия в следующем виде:

$$L_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} l_t(\theta),\;\; l_t(\theta)=-\left[\ln\sigma_t^2(\theta)+\frac{1}{p}\left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}\right)^p\right], \tag{10}$$

$p$ – некоторая константа, $0<p<\kappa.$

Пусть $\hat{\theta}_n$ – $M$-оценка параметра $\theta_0$ модели (5), (6) с функцией правдоподобия (10), т. е.

$$\hat{\theta}_n=\arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(\theta).$$

Состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$ доказывает следующая

**Теорема 3.** *Предположим, что* $0 < p < \kappa$, $E|\varepsilon_0^2|^p = 1$, *тогда*

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta_0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда*

*(1) если* $0 < p < \kappa/2$, то

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1}\Sigma B^{-1}) \quad \text{при } n \to \infty,$$

*где* $\Sigma = \tau A$, $\tau = E(\varepsilon_0^2)^{2p} - 1$, $B = El_0''(\theta_0)$;

*(2) если* $\kappa/2 < p < \kappa$ и $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1]A_t\}$ *удовлетворяет условию сильного перемешивания с геометрической скоростью, то*

$$na_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} S_{\kappa/p} \quad \text{при } n \to \infty,$$

*где* $S_{\kappa/p}$ – *κ/p-устойчивый случайный вектор, а*

$$A_t = \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} = \left(\frac{1}{\sigma_t^2}, \frac{1}{\sigma_t^2}\sum_{j=1}^{\infty}\beta_0^{j-1}\varepsilon_{t-j}^2, \frac{1}{\sigma_t^2}\sum_{j=1}^{\infty}\beta_0^{j-1}\frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2}\right).$$

1. Engle R. // Econometrica. 1982. Vol. 50. № 4. P. 987.
2. Bollerslev T. // J. of econometrics. 1986. Vol. 31. № 3. P. 307.
3. Ding Z., Granger C., Engle R. // J. of Empirical Finance. 1993. Vol. 1. № 1. P. 83.
4. Nelson D. // Econometrica. 1991. Vol. 59. № 2. P. 347.
5. Liu S., Brorsen B. // J. of Applied Econometrics. 1995. Vol. 10. № 3. P. 273.
6. Mittnik S., Paolella M.S. // Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance. Amsterdam, 2003.
7. Panorska A., Mittnik S., Rachev S. // Applied Mathematical Letters. 1995. Vol. 8 (5), P. 33.
8. Straumann D., Mikosch T. // Annals of Statistics. 2006. Vol. 34. № 5. P. 2449.
9. Straumann D. // Lecture notes in statistics 181. Berlin; Heidelberg, 2005.
10. Berkes I., Horváth L. // The Annals of Statistics. 2004. Vol. 32. №. 2. P. 633.
11. Труш Н.Н., Ле Хонг Шон, Чэнь Хайлун, Чан Лок Хунг // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: Сб. науч. ст. Мн., 2009. Вып. 2. С. 225.
12. Труш Н.Н., Чэнь Хайлун // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 1. С. 117.
13. Troush N.N., Chen Hailong, Yaosh A.N. // The Sixth International Workshop «Computer Algebra Systems in Teaching and Research» (CASTR'2011), Siedlce, 2–6 February 2011. Poland, 2011. P. 160.
14. Ле Хонг Шон // Молодежь в науке-2007: Прил. к журн. «Весці НАН Беларусі» (Приложение «Молодежь в науке – 2007»). Мн., 2008. Ч. 3. С. 37.
15. Труш Н.Н., Ле Хонг Шон // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 1. С. 13.
16. Le Hong Son // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: Междунар. науч. конф., Минск, 15–19 сент. 2008 г. Мн., 2008. С. 407.
17. Troush N.N., Le Hong Son // Barcelona Conference on Asymptotic Statistics, Barcelona, 1–5 Sept. 2008. Barcelona, 2008. P. 118.

Поступила в редакцию 16.08.11.

***Николай Николаевич Труш*** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики. Научные интересы связаны со статистическим анализом временных рядов, теорией случайных процессов. Опубликовал более 150 работ, из них 4 монографии (3 в соавторстве). Одна из них издана в Польше.