УДК 517.956

Н.И. ЮРЧУК

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ЛОКАЛЬНЫЕ

Apriori estimations for the differences of solutions of non-local and local problems for heat equations are established. Using them, we prove continuous dependence of solutions of non-local problems as non-local boundary conditions pass into local ones.

1. Постановка задачи

Пусть в сплошную среду с температурой $h(t)$ помещен стержень (рисунок) длиной $l,$ входящий в сплошную среду в точке $\alpha.$ Температура $u_\alpha(x,t)$ в стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u_\alpha(x,0) = \varphi_\alpha(x), \tag{2}$$

одному из краевых условий в точке $x=0$

$$u_\alpha(0,t) = 0 \text{ или } \frac{\partial u_\alpha(0,t)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

и одному из нелокальных условий на отрезке (α, l)

$$\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_\alpha(\xi,t)d\xi = h(t) \text{ или } \frac{u_\alpha(l,t)-u_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha} = h(t). \tag{4}$$

Каждая из задач (1) – (4) при каждом $0 \le \alpha < l$ корректна в смысле Адамара, т. е. при каждом $0 \le \alpha < l$ решение существует, единственно и непрерывно зависит от $f,$ φ_α и $h.$ Такие задачи исследовались в работах Л.И. Камынина, Н.И. Ионкина и Е.И. Моисеева, А.В. Картынника, N.E. Benouar, A. Bouziani, L. Byszewski, Е.А. Гасымова, Н.И. Юрчука и др. (см. [2] и указанную там литературу).

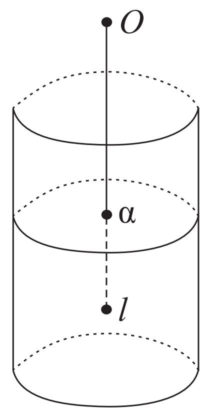

Схема расположения стержня

При удалении стержня из среды, т. е. при $\alpha \to l,$ задачи (1) – (4) примут вид

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{5}$$
$$u_l(x,0) = \varphi_l(x),$$
$$u_l(0,t) = 0 \text{ или } \frac{\partial u_l(0,t)}{\partial x} = 0,$$
$$u_l(l,t) = h(t) \text{ или } \frac{\partial u_l(l,t)}{\partial x} = h(t).$$

Решения $u_l(x,t)$ этих задач также корректны в смысле Адамара. Они описывают температуру в стержне в случае, когда он своим концом l лишь касается сплошной среды с температурой $h(t).$ На важность исследования задач (1) – (4) обращал внимание академик А.А. Самарский, поскольку они встречаются в физике плазмы. Действительно, решения $u_l\left(x,t\right)$ задач (1) – (4) могут описывать температуру в графитовом стержне, находящемся в сплошной среде атомного реактора, при остановке которого происходит удаление графитового стержня. В целях противопожарной безопасности важно знать, как изменяется температура $u_\alpha\left(x,t\right)$ при $\alpha \to l$.

В настоящей работе установим априорные оценки разностей $u_\alpha\left(x,t\right)-u_l\left(x,t\right)$ и, используя их, докажем, что если при $\alpha \to l$ $\varphi_\alpha \to \varphi_l$, то $u_\alpha \to u_l$. Тем самым установим новое важное свойство, что решение смешанных задач (1) – (4) с нелокальными условиями непрерывно изменяется при переходе нелокальных условий в локальные. Как уже отмечалось, это свойство имеет важное прикладное значение.

2. Задачи с интегральным краевым условием

Приведем априорные оценки и покажем, что $u_\alpha \to u_l$ в случае, когда u_α удовлетворяет интегральному условию из (4), а $u_l\left(l,t\right)=h(t)$.

Теорема 1. *Пусть коэффициент* $a(x,t)$ *в* (1) *и* (5) *является непрерывно дифференцируемой функцией на* $G=\left[0,l\right]\times\left[0,T\right]$ $0<a_0\le a\left(x,t\right)\le a_1$, $f\in L_2(G)$, $h\in W_2^1(0,T)$, $\varphi_\alpha,\varphi_l\in W_2^1(0,l)$, $\varphi_\alpha(0)=\varphi_l(0)=0$ *или* $\varphi'_\alpha(0)=\varphi'_l(0)$ *в зависимости от выполнения условия из* (3), $\varphi_l(0)=h(0)$, $\dfrac{1}{l-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^l \varphi_\alpha(x)dx=h(0)$. *Тогда существует постоянная* $c>0$, *независящая от* u_α, u_l *и* l, *такая, что*

$$\int_0^l\int_0^T\left(1-x\right)\left[\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial u_l}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right|^2\right]dxdt+$$
$$+\sup_{0\le t\le T}\int_0^l\left[\left|u_\alpha-u_l\right|^2+(l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|^2\right]dx\le \tag{6}$$
$$\le C\left\{\int_0^l\left|\varphi'_\alpha(x)-\varphi'_l(x)\right|^2dx+\left|h(0)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,0)dx\right|^2+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\left[\left|h'(t)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l\frac{\partial u_l(x,t)}{\partial t}dx\right|^2+\left|h(t)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,t)dx\right|^2dt\right]\right\}.$$

Доказательство неравенства (9) дано в [1] в случае условия $u_\alpha\left(0,t\right)=0$ и в [2] в случае условия $\dfrac{\partial u_\alpha(0,t)}{\partial x}=0$.

Из неравенства (6) следует

Теорема 2. *Пусть выполняется условие теоремы* 1. *Если*

$$\lim_{\alpha\to l}\int_0^l\left|\varphi'_l(x)-\varphi'_\alpha(x)\right|^2dx=0, \tag{7}$$

тогда

$$\lim_{\alpha\to l}\left\{\int_0^l\int_0^T\left(l-x\right)\left[\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial u_l}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right|^2\right]dxdt+\right.$$
$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\int_0^l\left[(l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|^2+\left|u_\alpha-u_l\right|^2\right]dx\right\}=0. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,t)dx-h(t)\right|=\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,t)dx-u_l(l,t)\right|=0,$$

$$\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \frac{\partial u_l(x,t)}{\partial x}dx - h'(t)\right| = \lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \frac{\partial u_l(x,t)}{\partial t})dx - \frac{\partial u_l(l,t)}{\partial t})\right| = 0,$$

$$\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,0)dx - h(0)\right| = \lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,0)dx - u_l(l,0)\right| = 0,$$

то в силу (7) из (6) следует (8).

Для полноты рассмотрений покажем, что для любой функции $\varphi_l \in W_2^1(0,l),$ удовлетворяющей условиям $\varphi_l(0)=0$ или $\varphi_l'(0)=0$ и $\varphi_l(l)=h(0),$ существуют функции $\varphi_\alpha \in W_2^1(0,l)$ такие, что

$$\varphi_\alpha'(0)=0 \text{ или } \varphi_\alpha'(0)=0 \text{ и } \frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_\alpha(x)dx = h(0).$$

При условии $\varphi_\alpha(0)=0$ такими функциями могут быть

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_l(x) + \frac{2x}{l+\alpha}\left(h(0) - \frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_l(x)dx\right),$$

а при условии $\varphi_\alpha'(0)=0$ –

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_l(x) + \frac{3x^2}{l^2+l\alpha+\alpha^2}\left(h(0) - \frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_l(x)dx\right).$$

3. Задачи со вторым нелокальным условием

В прямоугольнике $G=(0,l)\times(0,T)$ рассмотрено семейство смешанных задач с нелокальными условиями:

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0<\alpha<l, \tag{9}$$

$$u_\alpha(x,0)=\varphi_\alpha(x), \quad u_\alpha(0,t)=0, \quad \frac{u_\alpha(l,t)-u_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha} = h(t), \tag{10}$$

и две смешанные задачи с локальными условиями:

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{11}$$

$$u_0(x,0)=\varphi_0(x), \quad u_0(0,t)=0, \quad u_0(l,t)=h(t), \tag{12}$$

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u_l}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{13}$$

$$u_l(x,0)=\varphi_l(x), \quad u_l(0,t)=0, \quad \frac{\partial u_l(l,t)}{\partial x} = h(t). \tag{14}$$

Предполагается, что коэффициент $a(x,t)$ в уравнениях (9), (11), (13) является непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией и

$$a_1 \ge a(x,t) \ge a_0 > 0,$$

$$f\in L_2(G), \quad h\in W_2^1(0,T), \quad \varphi_\alpha,\ \varphi_0,\varphi_l \in W_2^1(0,l), \quad \varphi_\alpha(0)=\varphi_0(0)=\varphi_l(0)=0,$$

$$\varphi_0(l)=h(0), \quad \varphi_l{}'(l)=h(0), \quad \frac{\varphi_\alpha(l)-\varphi_\alpha(\alpha)}{l-\alpha}=h(0).$$

Известно, что если выполняются эти предположения, то существуют и единственны решения локальных задач (11), (12) и (13), (14) и эти решения имеют почти везде в G производные первого порядка по t и до второго порядка по $x.$ С повышением гладкости данных задачи повышается и гладкость решений.

В работах [3, 4] доказывается существование и единственность решений семейства задач (9), (10) при каждом $0<\alpha<l.$ Осуществляется это следующим образом. Сначала в задаче (9), (10) производится замена искомых функций по формуле

$$u_\alpha(x,t) = v_\alpha(x,t) + xh(t).$$

Для новых функций $v_\alpha(x,t)$ получают при каждом $0<\alpha<l$ задачу

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2}=\tilde{f}(x,t)\equiv f(x,t)-\frac{x}{a}h'(t), \tag{15}$$

$$v_\alpha(x,0)=\tilde{\varphi}_\alpha(x)\equiv\varphi_\alpha(x)-xh(0),\quad v_\alpha(0,t)=0,\quad \frac{v_\alpha(l,t)-v_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha}=0 \tag{16}$$

и устанавливают следующую априорную оценку:

$$\begin{gathered}\sup_{0\le t\le T}\int_0^l\psi_\alpha(x)v_\alpha^2(x,t)dx+\int_0^T\int_0^l\psi_\alpha(x)\left(\frac{\partial v_\alpha(x,t)}{\partial x}\right)^2dxdt\le\\ \le C\left(\int_0^l\psi_\alpha(x)\tilde{\varphi}_\alpha^2(x)dx+\int_0^T\int_0^l\psi_\alpha(x)\tilde{f}^2(x,t)dxdt\right),\end{gathered} \tag{17}$$

где постоянная C не зависит от v_α и

$$\psi_\alpha=\begin{cases}1, & 0\le x\le\alpha,\\ \dfrac{l-x}{l-\alpha}, & \alpha\le x\le l.\end{cases}$$

С помощью априорной оценки (17) доказывается существование и единственность решения задачи (15), (16) и, следовательно, задачи (9), (10) при каждом $0<\alpha<l$.

Далее устанавливаются априорные оценки разностей $u_\alpha-u_0$ и $u_\alpha-u_l$. Для этого, обозначая через $u(x,t)$ одно из решений u_0 задачи (11), (12) или u_l задачи (13), (14), вводится новая функция $w(x,t)$ по формуле

$$w_\alpha=u-u_\alpha+x\left[h(t)-\frac{u(l,t)-u(\alpha,t)}{l-\alpha}\right].$$

Эта функция является решением задачи

$$\frac{1}{a}\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial x^2}=\frac{x}{a}\left[h'(t)-\frac{\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}\right],$$

$$w_\alpha(x,0)=\varphi-\varphi_\alpha-x\left[\frac{u(l,0)-u(\alpha,0)}{l-\alpha}-h(0)\right],$$

$$w_\alpha(0,t)=0,\quad \frac{w_\alpha(l,t)-w_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha}=0,$$

где $\varphi(x)$ – одна из функций $\varphi_0(x)$ или $\varphi_l(x)$ в зависимости от обозначения функции u, и, следовательно, для w_α справедлива аналогичная (17) априорная оценка

$$\begin{gathered}\sup_{0\le t\le T}\int_0^l\psi_\alpha(x)w_\alpha^2(x,t)dx+\int_0^T\int_0^l\psi_\alpha(x)\left(\frac{\partial w_\alpha(x,t)}{\partial x}\right)^2dxdt\le\\ \le 2C\left(\int_0^l\psi_\alpha(x)\left|\varphi(x)-\varphi_\alpha(x)\right|^2dx+\int_0^l\psi_\alpha(x)x^2\left|\frac{u(l,0)-u(\alpha,0)}{l-\alpha}-h(0)\right|^2dx+\right.\\ \left.+\int_0^T\int_0^l\psi_\alpha\frac{x^2}{a^2(x,t)}\left|h'(t)-\frac{\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}\right|^2dxdt\right).\end{gathered}$$

Это неравенство останется в силе, если в его левой части применим неравенство $\psi_\alpha(x)\ge l-x$, а в правой части – неравенство $\psi_\alpha(x)\le 1$. В полученное после этих оценок неравенство вместо $u(x,t)$ подставляется одно из решений u_0 или u_l задачи (11), (12) или (13), (14) соответственно. В результате получаются априорные оценки

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (l-x)\left|u_0-u_\alpha\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right|^2 dxdt\le C\left\{\int_0^l\left|\varphi_0(x)-\varphi_\alpha(x)\right|^2dx+\int_0^T\left[\left|\frac{\alpha h(t)-u_0(\alpha,t)}{l-\alpha}\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\alpha h'(t)-\dfrac{\partial u_0(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}\right|^2\right]dt+\left|\frac{\alpha h(0)-\varphi_0(\alpha)}{l-\alpha}\right|^2\right\},\tag{18}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (l-x)\left|u_l-u_\alpha\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_l}{\partial x}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right|^2 dxdt\le$$

$$\le C\left\{\int_0^l\left|\varphi_l(x)-\varphi_\alpha(x)\right|^2dx+\int_0^T\left[\left|\frac{u_l(l,t)-u_l(\alpha,t)}{l-\alpha}-h(t)\right|^2+\right.\right.\tag{19}$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\dfrac{\partial u_l(1,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u_l(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}-h'(t)\right|^2\right]dt+\left|\frac{\varphi_l(l)-\varphi_l(\alpha)}{l-\alpha}-h(0)\right|^2\right\}.$$

Из этих априорных оценок вытекает следующая непрерывная зависимость решений задачи (9), (10) от параметра α.

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^l\left|\varphi_\alpha(x)-\varphi_0(x)\right|^2dx=0,\tag{20}$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (l-x)\left|u_\alpha-u_0\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2 dxdt\right]=0.\tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для решений задачи (11), (12)

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^T u_0(\alpha,t)dt=0,\quad \lim_{\alpha\to 0}\int_0^T\left|\frac{\partial u_0(\alpha,t)}{\partial t}\right|^2dx=0\ \text{ и }\ \lim_{\alpha\to 0}\varphi_0(\alpha)=0,$$

то из (20) в силу (18) следует (21). Для полноты рассмотрений осталось показать, что для любой функции $\varphi_0\in W_2^1(0,T)$, удовлетворяющей условиям $\varphi_0(0)=0$ и $\varphi_0(l)=h(0)$, существуют функции $\varphi_\alpha\in W_2^1(0,T)$ такие, что $\varphi_\alpha(0)=0$, $\dfrac{\varphi_\alpha(l)-\varphi_\alpha(\alpha)}{l-\alpha}=h(0)$ и справедливо (20). Очевидно, что это справедливо для $\varphi_\alpha(x)=\varphi_0(x)-x\left(\dfrac{\alpha h(0)-\varphi_0(\alpha)}{l-\alpha}\right)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{\alpha\to l}\int_0^l\left|\varphi_\alpha(x)-\varphi_l(x)\right|^2dx=0,\tag{22}$$

то

$$\lim_{\alpha\to l}\left[\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (1-x)\left|u_\alpha-u_l\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|^2 dxdt\right]=0.\tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для решений задачи (17), (18)

$$\lim_{\alpha\to l}\int_0^T\left[\left|\frac{u_l(l,t)-u_l(\alpha,t)}{l-\alpha}-h(t)\right|^2+\left|\frac{\dfrac{\partial u_l(l,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u_l(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}-h'(t)\right|^2\right]dt=0$$

и $\lim\limits_{\alpha\to l}\dfrac{\varphi_l(x)-\varphi_l(\alpha)}{l-\alpha}=h(0),$ то из (22) в силу (19) следует (23). Для полноты рассмотрений осталось показать, что для любой функции $\varphi_l\in W_2^1(0,T),$ удовлетворяющей условиям $\varphi_l(0)=0,$ $\varphi_l'(l)=h(0),$ существуют функции $\varphi_\alpha\in W_2^1(0,T)$ такие, что $\varphi_\alpha(0)=0,$ $\dfrac{\varphi_\alpha(l)-\varphi_\alpha(\alpha)}{l-\alpha}=h(0)$ и справедливо (22). В качестве таких функций можно взять

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_l(x)-x\left(\frac{\varphi_l(l)-\varphi_l(\alpha)}{l-\alpha}-h(0)\right).$$

Теорема 4 доказана.

1. Y u r c h u k N. I. // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE. 2003. Cottenham: Cambridge Scientific Publishers, 2005. P. 243.
2. Y u r c h u k N. I., T c h a r i e K o k o u, M o u s s a Z a k a r i D j i b i b e // Electronic Journal of Differential Equations. 2008. Vol. 2008. № 17. P. 1.
3. Ю р ч у к Н. И., Ч а р и е К о к у // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 414.
4. Y u r c h u k N. I., C h a r i e K o k u // Differential Equations. 2008. Vol. 44. № 3. С. 434.

Поступила в редакцию 15.06.11.

Николай Иосифович Юрчук – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики. Заслуженный деятель науки Республики Беларусь, лауреат Государственной премии Республики Беларусь. Область научных интересов – дифференциально-операторные уравнения, уравнения с частными производными и уравнения математической физики. Автор более 200 научных работ.