УДК 517.925.7

В.И. ГРОМАК

СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ И ДЕФОРМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ I

The Painlevé equations can be regarded as completely integrable equations and possess solutions which can be expressed in terms of solutions of linear integral equations, despite being nonlinear equations. Although first discovered from strictly mathematical considerations, the Painlevé equations have arisen in a variety of important physical applications. They possess hierarchies of rational solutions and one-parameter families of solutions expressible in terms of the classical special functions, for special values of the parameters. In the general case the Painlevé transcendents may be thought of a nonlinear analogues of the classical special functions. Further the Painlevé equations admit symmetries under affine Weyl groups which are related to the associated Bäcklund transformations. In this paper many of the remarkable properties which the Painlevé equations possess are reviewed including some representations, Bäcklund transformations associated discrete equations, and hierarchies of exact solutions. In particular, the second Painlevé equation (P_2) is primarily used to illustrate these properties and higher analogous of (P_2) are also discussed.

Уравнения Пенлеве возникли в работах П. Пенлеве и его учеников [1–3] как решение проблемы классификации обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w^{(n)} = R\left(z, w, w, ..., w^{(n-1)}\right), \tag{1}$$

где правая часть R голоморфна по z в некоторой области $D \subset C$ и рациональна по $w, w', ..., w^{(n-1)}$. Здесь аргумент z и искомая функция $w(z)$ принимают комплексные значения. Если $w(z)$ есть решение, то оно как функция комплексного переменного может иметь как однозначные особые точки, такие как полюсы, существенно особые точки, так и многозначные особые точки, или критические точки ветвления, локализация которых на комплексной плоскости в общем случае определяется начальными условиями.

Особая точка называется подвижной, если ее локализация зависит от выбора решения. В противном случае она называется неподвижной, или фиксированной особой точкой. Говорят, что уравнение (1) имеет свойство Пенлеве, если общее решение (1) не имеет подвижных особых точек, отличных от полюсов [4]. Конечно, это скорее описательное определение. Более строгое определение свойства Пенлеве может быть сформулировано следующим образом.

Определение. Уравнение (1) в области D имеет свойство Пенлеве. Если произвольный мероморфный росток решения в любой точке $z \in D$ имеет аналитическое продолжение как мероморфная функция вдоль любого пути γ в D, исходящего из z.

Аналогично определяется свойство Пенлеве и для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

Мотивировка постановки проблемы, восходящей к Пикару [5] и состоящей в определении условий существования свойства Пенлеве, достаточно ясна: отсутствие подвижных критических точек, т. е. свойство Пенлеве, означает, что локальное общее решение такого уравнения допускает мероморфное продолжение на всю универсальную накрывающую проколотой комплексной плоскости. Тем самым уравнения со свойством Пенлеве (или уравнения P-типа) наследуют фундаментальное свойство линейных уравнений.

Уравнение (1) при $n=1$ имеет свойство Пенлеве, если и только если оно является уравнением Риккати

$$w' = a(z)w^2 + b(z)w + c(z). \tag{2}$$

В случае уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, классификационную проблему решает

Теорема 1 (Фукса – Пуанкаре). *Пусть в уравнении*

$$P(z, w, w') = 0 \tag{3}$$

$P(z,w,u)$ – *полином по* w, u *с мероморфными по* z *коэффициентами в области* $U \subset \mathbb{C}$. *Пусть* g – *род алгебраической кривой* $C_z = \{(w,u) \in \mathbb{C}^2 : P(z,w,u) = 0\}$ *в точке* $z \in U$. *Если уравнение (3) имеет свойство Пенлеве, то возможны следующие три случая:*

1) если $g = 0$, *то уравнение (3) может быть приведено к уравнению Риккати (2)*;

2) если $g = 1$, *то уравнение (3) приводимо к уравнению эллиптической кривой*

$$(w')^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3;$$

3) если $g \geq 2$, *то уравнение (3) может быть решено алгебраическими квадратурами.*

Как показали Пенлеве и Гамбье, в случае $n = 2$ в (1) с точностью до преобразований группы Мебиуса, определяемых

$$(z, w) \to (\tau, u), \quad u = \frac{\alpha(z)w + \beta(z)}{\gamma(z)w + \delta(z)}, \quad z = \varphi(\tau),\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$ – аналитичны, существуют только 50 уравнений P-типа, 44 из которых могут быть проинтегрированы в известных функциях либо преобразованы к одному из шести остальных уравнений, которые и называются уравнениями Пенлеве. Они имеют вид

$$w'' = 6w^2 + z, \tag{P_1}$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \tag{P_2}$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \tag{P_3}$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2\left(z^2 - \alpha\right) + \frac{\beta}{w}, \tag{P_4}$$

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \tag{P_5}$$

$$w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)(w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' + \\ + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right), \qquad (P_6)$$

где $(') \equiv \dfrac{d}{dz}$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные комплексные параметры.

Для $n \geq 3$ в уравнении (1) и тем более для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, классификационная проблема относительно свойства Пенлеве в общем случае остается открытой, несмотря на наличие мощных методов исследования этого свойства: метод малого параметра Пенлеве [4, 6, 7], метод резонансов [8], восходящий к С. Ковалевской [9, 10], метод возмущений Р. Конта [11]. Это объясняется тем, что названные методы дают лишь необходимые условия существования свойства Пенлеве, а для доказательства достаточности приходится рассматривать много уравнений с точки зрения их интегрирования либо замкнутой формы, либо сведения к известным уравнениям со свойством Пенлеве. Тем не менее и в этом направлении, особенно для полиномиальных уравнений, имеются существенные продвижения [12–14]. В этой связи особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, априори имеющие свойства Пенлеве. Ниже мы демонстрируем два таких метода: метод симметрийной редукции для уравнений в частных производных, допускающих интегрирование методом обратной задачи рассеяния [15–18], и метод изомонодромной деформации линейных дифференциальных систем [19–25], который рассмотрим во второй части работы.

Прежде чем перейти к краткому описанию математических свойств решений уравнений Пенлеве, отметим, что эти уравнения имеют приложения в важных математических проблемах: прямая и обратная задача Римана [26], деформация линейных дифференциальных систем [19–25], геометрия поверхностей [27, 28], ортогональные полиномы, случайные матрицы, теория чисел, распределение нулей дзета-функции, случайные перестановки, процессы роста и фильтрации и др. Также следует отметить, что, хотя уравнения Пенлеве возникли из чисто математической постановки, в настоящее время они находят применение во многих важных физических приложениях. Прежде всего это связано с тем, что редукции нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных приводят к уравнениям P-типа. Например, редукции уравнения Кортевега – де Фриза (KdV) приводят к (P_1) и (P_2), нелинейного уравнения Шрёдингера – к (P_4), уравнения Эрнста – к (P_6), уравнения sin-Гордон – к (P_3) и т. п. (см., например, главу 10 из [29] или [30]).

Уравнения Пенлеве широко используются в точно решаемых моделях статистической физики и квантовой теории поля для описания двухточечных корреляционных функций и статистической суммы двумерной квантовой гравитации [26].

В последние годы заметный прогресс достигнут и в изучении самих уравнений Пенлеве. Прежде всего это результаты, касающиеся фундаментальных свойств этих уравнений. Получено полное доказательство свойства Пенлеве для уравнений Пенлеве [31, 29] и доказательство неприводимости уравнений $(P_1)-(P_6)$ и приводимости уравнений (P_3) и (P_5) друг к другу при некоторых значениях параметров [32], доказана алгебраическая неприводимость и трансцендентность уравнений Пенлеве [29]. Изучены характер роста и распределение значений решений, а также особых точек уравнений Пенлеве, построены преобразования Беклунда, относительно которых уравнения Пенлеве инвариантны с точностью до изменения параметров, и на их основе – фундаментальные области пространства параметров, специальные классы решений [29, 33–36]. Наконец, последняя и впечатляющая серия исследований, главным образом связанная с изомонодромной деформацией линейных дифференциальных систем, построение и обоснование асимптотических результатов [23, 26]. Следует отметить, что уравнения Пенлеве играют решающую роль в асимптотическом анализе связанных с ними эволюционных уравнений в частных производных. Все эти результаты явились основой для последующих исследований подобных свойств высших аналогов уравнений Пенлеве.

Основные математические свойства уравнений Пенлеве

Рассмотрим некоторые свойства уравнений Пенлеве, при этом для иллюстрации конкретных результатов используем уравнение (P_2), которое имеет только один параметр и является, по сути, модельным для остальных уравнений Пенлеве.

Предельные переходы. Уравнения Пенлеве могут быть получены друг из друга специальными предельными переходами [4]

$$\begin{array}{ccccc} P_6 & \to & P_5 & \to & P_4 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P_3 & \to & P_2 \to P_1 \end{array} \qquad (4)$$

Так, при замене

$$(z, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \to \left(1 + \varepsilon z, w, \beta, \gamma / \varepsilon \ \ -\delta/\varepsilon^2, \delta/\varepsilon^2\right)$$

в уравнении (P_6) и предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ уравнение (P_6) преобразуется в уравнение (P_5), т. е. $(P_6) \to (P_5)$. С помощью таких переходов некоторые свойства уравнений с большим номером могут быть редуцированы к уравнениям с меньшим номером.

Симметрийная редукция и интегральные уравнения. Уравнения Пенлеве могут быть получены как симметрийная редукция уравнений с частными производными, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния. Например, если в модифицированном уравнении Кортевега – де Фриза $\left({}_mKdV\right)$

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (5)$$

положить $u(x,t) = (3t)^{-1/3} w(z), \quad z = x(3t)^{1/3}$, то после однократного интегрирования $w(z)$ удовлетворяет (P_2), где α – постоянная интегрирования. Таким образом, решения уравнения (P_2) определяют специальный класс решений уравнения $\left({}_mKdV\right)$ и в силу преобразования Миуры – уравнения (KdV). Более того, авторы [18] выдвинули гипотезу, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные симметрийной редукцией из вполне интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, обладают свойством Пенлеве. При этом, возможно, в некоторых случаях понадобится некоторая изобретательность при выборе зависимой переменной [37].

Некоторые решения уравнений Пенлеве могут быть выражены через решения линейных интегральных уравнений. Так, например, из интегрального уравнения

$$K(z,\xi) = kAi\left(\frac{z+\xi}{2}\right) + \frac{1}{4}k^2 \int_z^\infty \int_z^\infty K(z,s) Ai\left(\frac{s+t}{2}\right) Ai\left(\frac{t+\xi}{2}\right) ds dt, \qquad (6)$$

где $Ai(z)$ – функция Эйри, имеем решение $w_k(z) = K(z,z)$, удовлетворяющее (P_2) с $\alpha = 0$ и граничным условием $w_k(z) \sim Ai(z)$ при $z \to \infty$.

Уравнение (6) выводится как скалярная редукция из интегрального уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко для решения $({}_mKdV)$ методом обратной задачи рассеяния [8, 17].

Пары Лакса. Уравнения Пенлеве могут быть получены как условия совместности переопределенных линейных систем

$$\psi_\lambda = A(z,\lambda)\psi, \quad \psi_z = B(z,\lambda)\psi, \qquad (7)$$

где $F, B \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$. Условие совместности системы (7) $\psi_{\lambda z} = \psi_{z\lambda}$ выполняется при $A_z - B_\lambda + AB - BA = 0$ и при подходящем выборе матриц A и B может быть эквивалентно уравнению Пенлеве. Так, для (P_2) [38]

$$A = (z,\lambda) = \begin{pmatrix} -i\left(4\lambda^2 + 2w^2 + z\right) & 4\lambda w + 2iw' + \dfrac{\alpha}{w} \\ 4iw - 2iw' + \dfrac{\alpha}{w} & i\left(4\lambda^2 + z\right) \end{pmatrix}, B(z,\lambda) = \begin{pmatrix} -i\lambda & w \\ w & i\lambda \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы (или пара Лакса) получаются как скалярная редукция пары Лакса для уравнения $({}_mKdV)$. Конечно, матрицы A и B не единственны для уравнения (P_2).

Гамильтонова структура. Уравнения Пенлеве $(P_1) - (P_6)$ могут быть записаны в виде эквивалентных гамильтоновых систем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H_j(z,w,v)}{\partial v}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{\partial H_j(z,w,v)}{\partial w}, \qquad (8)$$

где $H_j = H_j(z,w,v)$ – полиномиальный по w, v неавтономный гамильтониан, соответствующий уравнению Пенлеве (P_j). Так, для уравнения (P_2) система (8) имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H_2}{\partial v} = \varepsilon w^2 + \frac{\varepsilon}{2} z + v, \quad \frac{dv}{dz} = -\frac{\partial H_2}{\partial w} = \alpha - \frac{\varepsilon}{2} - 2\varepsilon wv, \varepsilon^2 = 1, \tag{9}$$

где полиномиальный по w, v неавтономный гамильтониан

$$H_2(z,w,v) = \frac{v^2}{2} + \varepsilon\left(w^2 + \frac{z}{2}\right)v - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)w. \tag{10}$$

Исключение v из (9) дает (P_2), исключение w из (9) – уравнение (P_{34})

$$2vv'' = (v')^2 - 2zv^2 - 4\varepsilon v^3 - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

по классификации Пенлеве [4]. При этом система (9) определяет взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (P_2) и (P_{34}) $\left(w' - \varepsilon w^2 - \frac{\varepsilon}{2} z \neq 0, u \neq 0\right)$. Функция $h(z) \doteqdot H_2(z, w(z), u(z))$ из (10) удовлетворяет уравнению

$$(h'')^2 + 4(h')^3 + 2h'(zh' - h) - \frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 0,$$

которое имеет P-тип, при этом

$$w = \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2} - 2\varepsilon g''\right) \Big/ (4h'), \quad v = 2\varepsilon h',$$

а функции $\tau(z), \tau_1(z)$ (τ-функции), определяемые соотношениями

$$h(z) = \frac{d}{dz} \ln \tau(z), \quad w^2(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \ln \tau_1(z),$$

являются целыми.

Системы Брио – Буке. В окрестности особой точки z_0 (фиксированной или подвижной) уравнение Пенлеве может быть представлено эквивалентной системой Брио – Буке.

Так, например, для уравнения (P_2) с подвижной полярной особой точкой z_0 система Брио – Буке имеет вид

$$\begin{aligned} &tu_1' = u_1 + u_2, t = z - z_0, \\ &tu_2' = 6u_1 + 2u_2 + \varepsilon z_0 t^2 + 6\varepsilon u_1^2 + (\varepsilon + \alpha)t^3 + z_0 u_1 t^2 + 2u_1^3 + u_1 t^3, \end{aligned} \tag{11}$$

где $w = (\varepsilon + u_1(t))t^{-1}, w' = (-\varepsilon + u_2(t))t^2, \varepsilon^2 = 1$.

Системы Брио – Буке удобно использовать для доказательства сходимости разложений формальных решений в окрестности особых точек. Так, из (11) следует, что в окрестности z_0 уравнение (P_2) имеет однопараметрическое семейство решений

$$w \sim \frac{\varepsilon}{t} - \frac{1}{6}\varepsilon z_0 t - \frac{\alpha + \varepsilon}{4} t^2 + ht^3 + O(t^4), \; t = z - z_0, \; \varepsilon^2 = 1, \; \forall h \in \mathbb{C}.$$

Билинейная форма. Уравнение Пенлеве можно представить в билинейной форме с помощью оператора Хироты D (производная Хироты [37, 39]), действующего на упорядоченную пару функций $f(z), g(z)$ по переменной z согласно правилу

$$D\, g(z) \cdot f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} g(z + \varepsilon)\, f(z - \varepsilon) = g'f - gf',$$

где $(') \equiv \frac{d}{dz}$. Определение оператора Хироты можно распространить на функции многих и даже бесконечного числа переменных $g(x_1, x_2, ...)$, $f(x_1, x_2, ...)$ и операторы более высокого порядка по формуле

$$D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} ... D_{x_n}^{\alpha_n}\; g \cdot f = \prod_{r=1}^{n} \lim_{\varepsilon_r \to 0} \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial \varepsilon_r^{\alpha_r}}\, g(x_r + \varepsilon_r)\, f(x_r - \varepsilon_r).$$

Тогда

$$D^2 g\cdot f = g''f - 2g'f' + gf'',$$
$$D^3 g\cdot f = g'''f - 3g''f' + 3g'f'' - gf'''.$$

Уравнение (P_2) в терминах оператора Хироты можно записать в виде системы

$$\left(D^2+\frac{z}{2}\right)g\cdot f = 0, \left(D^3+\frac{z}{2}D-\alpha\right)g\cdot f = 0. \tag{12}$$

Если сделать замену $f=\exp\left(-\frac{1}{24}z^3\right)F,\ g=\exp\left(-\frac{1}{24}z^3\right)G,$ то вместо (12) имеем

$$D^2 G\cdot F = 0, \left(D^3 - zD-\alpha\right)G\cdot F = 0. \tag{13}$$

Остальные уравнения Пенлеве также можно записать в терминах оператора Хироты в виде систем, аналогичных (12), (13).

$\wp$-Форма. Вопрос представления уравнений Пенлеве в различных формах является весьма важным и определяется спецификой решаемых задач. Упомянем здесь $\wp$-форму уравнений Пенлеве [40–42]. Полагая в уравнении (P_6), где $(z,w)\to(x,y)$, замену $(x,y)\to(\tau,z)$, где

$$x=\frac{\vartheta_4^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)},\quad y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{\pi^2}\frac{\wp(z|\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)},$$

и $\wp(z|\tau):=\wp(z|1,\tau)$, т. е. $\wp$ и другие функции Вейерштрасса строятся по полупериодам $(w,w')=(1,\tau)$, а для тета-константы Якоби $\vartheta(\tau)$ зависят от модуля τ и при этом $\operatorname{Im}\tau>0$, уравнение (P_6) принимает вид [41]

$$-\frac{\pi^2}{4}\frac{d^2z}{d\tau^2}=\alpha\,\wp'(z|\tau)+\beta\,\wp'(z-1|\tau)+\alpha\,\wp'(z-\tau|\tau)+\delta\,\wp'(z-1-\tau|\tau). \tag{14}$$

Этот результат Пенлеве, известный как $\wp$-форма уравнения (P_6), был заново открыт в [40] и расширен в рамках других подходов (см. обзор [42]). Остальные уравнения Пенлеве также могут быть записаны в аналогичной форме с помощью приведенных предельных переходов, исходя из представления (14).

Уравнение (P_6) в форме, которую Фукс назвал замечательной, имеет вид «неоднородного уравнения Лежандра»

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{du}{dt}+\frac{u}{4t(t-1)}=\frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{2t^2(t-1)^2}\left[k_\infty-k_0\frac{t}{\lambda^2}+\frac{k_1(t-1)}{(x-1)^2}-k_t\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right],$$

где $u=\int_0^\lambda\left(\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\right)^{-1/2}d\lambda,$ а $\lambda=\lambda(t)$ есть решение уравнения (P_6).

Преобразования Беклунда. Преобразования Беклунда позволяют исследовать как геометрические, так и аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений [29, 43]. Рассмотрим преобразования Беклунда для уравнения (P_2) [33–36, 44–48]. Обозначим через $P_2(\alpha)$ множество решений уравнения (P_2) с параметром α и пусть $w_\alpha\in P_2(\alpha)$. Более того, определим $F:=\{P_2(\alpha)|\alpha\in\mathbb{C}\}$. Тогда преобразования Беклунда являются преобразованиями из F в F.

Заметим, что преобразование отражения $S:F\to F$, определенное как $S:w_\alpha\to -w_\alpha\in P_2(-\alpha)$, является преобразованием требуемого типа.

Теорема 2. *1. Пусть* $w_{\alpha-1}=w(z,\alpha-1)$ *– решение уравнения* (P_2) *с фиксированным значением параметра* $\alpha-1$ *такое, что* $w'_{\alpha-1}+w^2_{\alpha-1}+\frac{z}{2}\neq 0.$ *Тогда преобразование*

$$T: w_{\alpha-1}\to w_\alpha=-w_{\alpha-1}-\frac{\alpha-1/2}{w'_{\alpha-1}+w^2_{\alpha-1}+z/2} \tag{15}$$

определяет решение w_α *уравнения* (P_2) *с параметром* α.

2. Пусть w_α *– решение уравнения* (P_2) *с фиксированным значением параметра* α *такое, что* $w'_\alpha - w_\alpha^2 - z/2 \neq 0$. *Тогда преобразование*

$$T^{-1}: w_\alpha \to w_{\alpha-1} = -w_\alpha + \frac{\alpha - 1/2}{w'_\alpha - w_\alpha^2 - z/2} \tag{16}$$

определяет решение $w_{\alpha-1}$ *уравнения* (P_2) *с параметром* $\alpha - 1$.

Преобразования T, T^{-1}, S обладают свойством $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I, S^2 = I$ и, следовательно, образуют группу на F. Эта группа изоморфна аффинной группе Вейле типа $A_1^{(1)}$. В самом деле, положим $R = ST$. В этом случае

$$R: w_\alpha \to w_{\alpha_1} = w_\alpha + \frac{\alpha + 1/2}{w'_\alpha + w_\alpha^2 + z/2}, \alpha_1 = -\alpha - 1, R^2 = I.$$

Так что множество всех преобразований

$$W =< R, S >= \{T_n, S_n\}, n \in \mathbb{Z}, \text{ где } T_n = (SR)^n, \ S_n = (SR)^n R, n \in \mathbb{Z},$$

генерированное преобразованиями R и S, образует аффинную группу Вейле типа $A_1^{(1)}$ с фундаментальными соотношениями $R^2 = S^2 = I$. Для остальных уравнений Пенлеве $(P_3)-(P_6)$ аффинные группы – $\tilde{C}_2, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{D}_4$ соответственно.

Для уравнения (P_2) существуют также преобразования Беклунда, связывающие решения из $P_2(0)$ и $P_2(\varepsilon/2)$. Для $y(\tau) \in P_2(0), y(\tau) \neq 0, z = -2^{\frac{1}{3}}\tau$ и $w(z) \in P_2(\varepsilon/2), \varepsilon^2 = 1,$ $w' \neq \varepsilon w^2 + \frac{1}{2}\varepsilon z$ справедливы соотношения

$$-2^{\frac{1}{3}}\varepsilon(y(\tau))^2 = w'(z) - \varepsilon(w(z))^2 - \frac{1}{2}\varepsilon z, w(z) = 2^{-\frac{1}{3}}\varepsilon\frac{y'(\tau)}{y(\tau)}.$$

Из соотношений (15), (16) также следует алгебраическое соотношение

$$\frac{2\alpha + 1}{w_{\alpha+1} + w_\alpha} + \frac{2\alpha - 1}{w_\alpha + w_{\alpha-1}} + 4w_\alpha^2 + 2z = 0,$$

которое можно рассматривать как разностное уравнение относительно параметра α и известное как альтернативная форма дискретного уравнения P_1.

Точные решения. Решения уравнений Пенлеве в общем случае трансцендентны в том смысле, что не могут быть выражены через известные элементарные или специальные трансцендентные функции. Уравнения Пенлеве сами определяют новые функции, которые называют трансцендентами Пенлеве. Однако при специальных значениях параметров уравнения Пенлеве $(P_2)-(P_6)$ имеют рациональные, алгебраические решения, а также решения, выражающиеся через классические трансцендентные функции (Эйри, Бесселя, Куммера, Гаусса).

Уравнения Пенлеве $(P_2)-(P_6)$ допускают рациональные решения, а уравнения $(P_3),(P_5),(P_6)$ также имеют алгебраические решения при специальных значениях параметров. Эти иерархии решений могут быть получены из одного начального решения кратным применением преобразования Беклунда, а также выражены через специальные полиномы и функциональные определители.

Для уравнения (P_2) справедлива [49, 50]

Теорема 3 (Яблонского – Воробьева). *Рациональные решения уравнения* (P_2) *существуют только при* $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ *и имеют вид*

$$w(z,n) = \frac{d}{dz}\left\{\ln\left[\frac{Q_{n-1}(z)}{Q_n(z)}\right]\right\}, \quad n \geq 1,$$

где полиномы $Q_n(z)$ *для* $n \geq 1$ *определяются соотношением*

$$Q_{n+1}(z)Q_{n-1}(z) = z(Q_n(z))^2 + 4(Q_n'(z))^2 - 4Q_n(z)Q_n''(z)$$

с $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z$. *При* $\alpha = 0$ *уравнение* (P_2) *имеет решение* $w = 0$. При $\alpha = -n$ $w(z,-n) = -w(z,n)$.

Полиномы $Q_n(z)$ имеют степень $\frac{1}{2}n(n+1)$ и называются полиномами Яблонского – Воробьева.

Рациональные решения уравнений Пенлеве могут быть представлены отношением определителей [51].

Теорема 4. *Пусть* $p_k(z)$ *– полиномы, определяемые соотношением*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(z)\lambda^k = \exp(z\lambda - \frac{4}{3}\lambda^3)$$

с $p_k(z)=0$ *для* $k<0$ *и* $\tau_n - n \times n$*-определитель*

$$\tau_n(z) = \begin{vmatrix} p_n(z) & p_{n+1}(z) & \dots & p_{2n-1}(z) \\ p_{n-2}(z) & p_{n-1}(z) & \dots & p_{2n-3}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{-n+2}(z) & p_{-n+3}(z) & \dots & p_1(z) \end{vmatrix}$$

с $n \ge 1$. *Тогда функция*

$$w(z,n) = \frac{d}{dz}\left\{\ln\left[\frac{\tau_{n-1}(z)}{\tau_n(z)}\right]\right\}$$

удовлетворяет (P_2) *с* $\alpha = n$.

Из системы (9) следует, что если $v=0$, то все решения уравнения Риккати

$$w' = \varepsilon(w^2 + z/2),\ \varepsilon^2 = 1, \tag{17}$$

являются решениями уравнения (P_2) при $\alpha = \varepsilon/2$. Конечно, уравнение (17) стандартной заменой $w = -\varepsilon\varphi'/\varphi$ может быть приведено к линейному уравнению

$$\varphi'' + \frac{z}{2}\varphi = 0, \tag{18}$$

которое масштабным преобразованием приводится к уравнению Эйри и имеет общее решение

$$\varphi(z) = C_1 A_i(\xi) + C_2 B_i(\xi), \quad \xi = -2^{-1/3} z,$$

где $A_i(\xi), B_i(\xi)$ – функции Эйри и C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Взяв в качестве исходных для преобразования Беклунда решения уравнения (17), получим решения уравнения (P_2), рациональным образом выражающиеся через функции Эйри и их производную для всех полуцелых α [36]. Заметим, что эти решения также можно представить в форме отношения определителей.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(z)$ *– решение уравнения (18) и* $\tau_n(z) - n \times n$*-определитель*

$$\tau_n(z) = \begin{vmatrix} \varphi(z) & \varphi'(z) & \dots & \varphi^{(n-1)}(z) \\ \varphi'(z) & \varphi''(z) & \dots & \varphi^{(n)}(z) \\ \vdots & & & \\ \varphi^{(n-1)}(z) & \varphi^{(n)}(z) & \dots & \varphi^{(2n-2)}(z) \end{vmatrix}$$

с $\tau_0(z)=1$. Тогда функция

$$w\left(z, n-\frac{1}{2}\right) = \frac{d}{dz}\left\{\ln\left[\frac{\tau_{n-1}(z)}{\tau_n(z)}\right]\right\}, \quad n \ge 1,$$

является решением уравнения (P_2) *при* $\alpha = n - \frac{1}{2}$.

Высшие аналоги уравнений Пенлеве. Высшие аналоги уравнений Пенлеве могут быть построены различными методами: изомонодромных деформаций [19–22, 24, 25, 37, 38], аффинных симметрий [46], нелинейных цепочек [52] и др. Однако, по-видимому, первым был метод симметрийных редукций из эволюционных уравнений с частными производными [8, 18, 48, 53, 54]. Продемонстрируем его для уравнений (P_1) и (P_2). В этом случае высшие аналоги могут быть получены симметрийной редукцией из иерархии модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза (${}_mKdV$).

Иерархия ${}_mKdV$ получается преобразованием Миуры из иерархии уравнения Кортевега – де Фриза и может быть записана в виде

$$v_t + \partial_x\left(\partial_x + 2v\right)Ł_{n+1}\left[v_x - v^2\right] = 0, \tag{19}$$

где $v = v(t,x)$ и последовательность операторов $Ł_{n+1}$ удовлетворяет соотношению Ленарда [55]

$$\partial_x Ł_{n+1} = \left(\partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x\right)Ł_n,$$

начиная с $Ł_1[u] = u.$ Следующие два члена последовательности имеют вид

$$Ł_1[u] = u_{xx} + 3u^2, \quad Ł_3[u] = u_{4x} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3.$$

Иерархия второго уравнения Пенлеве получается из иерархии $\left({}_mKdV\right)$ (19) редукцией

$$v(x,t) = (\lambda t)^m\, w(z), \quad z = (\lambda t)^m\, x, \quad m = -\frac{1}{2n+1}, \quad \lambda = 2n+1,$$

которая дает

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w\right)L_n\left[w' - w^2\right] - zw - \alpha = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{${}_{2n}P_2$}$$

где оператор L_n определяется так же, как $Ł_n$ с заменой $\partial_x \to \dfrac{d}{dx}$, $L_1[u] = u$ и α – произвольный параметр.

При $n = 1$ имеем уравнение (${}_2P_2$), которое совпадает с (P_2), а при $n = 2,3$ соответственно имеем

$$w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - zw - \alpha, \tag{${}_4P_2$}$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} &= 10w^2w^{(4)} + w\left(z + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)}\right) + \\ &+ 70(w')^2w'' - 70w^4w'' - 140w^3(w')^2 + 20w^7 + \alpha. \end{aligned} \tag{${}_6P_2$}$$

Иерархия первого уравнения Пенлеве также может быть определена при помощи оператора L_n заменой $y(z) = w' - w^2.$ Тогда

$$({}_{2n-2}P_1) \equiv L_n[y] - \frac{z}{2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $n = 2$ имеем уравнение $\left(P_1\right)$ в форме $y'' + 3y^2 - \dfrac{z}{2} = 0.$ Для записи уравнений в стандартной форме можно сделать масштабное преобразование и записать иерархию уравнения $\left(P_1\right)$ в форме

$$d^{n+1}(w) + 4z = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{${}_{2n}P_1$}$$

$$\frac{d}{dz}d^{n+1}(w) = \left(D^3 - 8wD - 4w_z\right)d^4(w), d^1(w) = -4w, D = \frac{d}{dz}.$$

Тогда при $n = 1$ имеем уравнение $({}_2P_1) \equiv (P_1).$ При $n = 2,3$ получаем аналоги уравнения $\left(P_1\right)$ соответственно четвертой и шестой степени

$$w^{(4)} = 20ww'' + 10(w')^2 - 40w^3 + z, \tag{${}_4P_1$}$$

$$w^{(6)} = 42(w'')^2 + 56w'w''' + 28ww^{(4)} - 280w\left((w') + ww'' - w^3\right) + z. \tag{${}_6P_1$}$$

Уравнения $\left({}_{2n}P_1\right)$, $\left({}_{2n}P_2\right)$ называют высшими аналогами уравнений $\left(P_1\right)$ и $\left(P_2\right)$. Здесь $2n$ – порядок уравнений. Свойства этих уравнений аналогичны свойствам уравнений $\left(P_1\right)$ и $\left(P_2\right)$. Так, например, приведем преобразование Беклунда для иерархии уравнений $\left({}_{2n}P_2\right)$ [48, 54, 56, 57].

Теорема 6. *Пусть* $w = w(z,\alpha)$ *– решение уравнения* $\left({}_{2n}P_2\right)$ *при фиксированном значении параметра* α. *Тогда преобразования*

$$S: w(z,\alpha) \to w(z,-\alpha) = -w(z,\alpha),$$

$$T_\pm: w(z,\alpha) \to w(z,\alpha \pm 1) = -w(z,\alpha) + \frac{2\alpha \pm 1}{2L_n[\mp w'(z,\alpha) - (w(z,\alpha))^2] - z}$$

определяют решения уравнения $\left({}_{2n}P_2\right)$ *при условии, что* $\alpha \neq \mp 1/2$.

Литература по уравнениям Пенлеве достаточно обширна. Мы ссылаемся лишь на некоторые оригинальные статьи, монографии и статьи обзорного характера, в которых можно найти дополнительную литературу.

1. Painlevé P. // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201.
2. Painlevé P. // Acta Math. 1902. Vol. 25. P. 1.
3. Gambier B. // Ibid. 1909. Vol. 33. P. 1.
4. Ince E.L. Ordinary differential equations. Dover Publications. New York, 1944.
5. Picard E. // J. de Math. 1889. Vol. 5. P. 135.
6. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
7. Еругин Н.П. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. С. 387, 579.
8. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М., 1987.
9. Kovalevski S.V. // Acta Math. 1889. Vol. 12. P. 177.
10. Kruskal M.D., Clarkson P.A. // Stud. Appl. Math. 1992. Vol. 86. № 2. P. 87.
11. Conte R., Musette M. The Painlevé Handbook. Berlin, 2008.
12. Bureau F.J. // Ann. Mat. Pure Appl. 1964. Vol. 66. P. 1.
13. Cosgrove C.M., Scoufis G. // Stud. Appl. Math. 1993. Vol. 88. P. 25.
14. Соболевский С.Л. Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Мн., 2006.
15. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095.
16. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния. М., 1980.
17. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. L.M.S. Lect. Notes Math. Cambridge, 1991. Vol. 149.
18. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. // Lett. Nuovo Cimento. 1978. Vol. 23. № 9. P. 333.
19. Fuchs R. // Math. Ann. 1907. Vol. 63. P. 301.
20. Jimbo M., Miwa T., Ueno K. // Physica D2. 1981. P. 306.
21. Jimbo M., Miwa T. // Ibid. P. 407.
22. Jimbo M., Miwa T. // Physica D4. 1981. P. 26.
23. Its A.R., Novokshenov V.Yu. The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé equations. Lect. Notes Math. Berlin, 1986. Vol. 1191.
24. Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M. From Gauss to Painlevé: a Modern Theory of Special Functions. Aspects of Mathematics E. Braunschweig, 1991. Vol. 16.
25. Okamoto K. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 1986. Vol. 33. P. 575.
26. Итс А.Р., Капаев А.А., Новакшенов В.Ю., Фокас А.С. Трансценденты Пенлеве. Методы задачи Римана. М.; Ижевск, 2005.
27. Bobenko A., Eitner U. Painlevé equations in the Differential Geometry of Surfaces. Lect. Notes Math. Berlin, 2000. Vol. 1753.
28. Sakai H. // Commun. Math. Phys. 2001. Vol. 220. P. 165.
29. Gromak V.I., Laine I., Simomura S. Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. De Gruyter studies in mathematics. Berlin; New York, 2002. Vol. 28.
30. Цегельник В.В. Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа. Мн., 2007.
31. Hinkkanen A., Laine I. // J. Anal. Math. 1999. Vol. 79. P. 345.
32. Gromak V.I. // Diff. Eqns. 1975. Vol. 11. P. 285.
33. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.
34. Gromak V.I. // The Painlevé Property, One Century Later / Ed. R. Conte. CRM series in Mathematical Physics. Berlin, 1999. P. 687.
35. Gromak V.I. // Diff. Eqns. 1982. Vol. 18. P. 537.
36. Gromak V.I. // Ibid. 1978. Vol. 14. P. 1510.
37. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., 1989.
38. Flaschka H., Newell A.C. // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 76. P. 65.
39. Мива Т., Джимбо М., Дате Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М., 2005.
40. Manin Yu.I. // Geometry of Differential equations / Ed. A. Khovanskii et al. AMS Transl. Ser. 2. 1998. Vol. 186. P. 131.
41. Брежнев Ю.И. // ТМФ. 2009. Т. 161. С. 346.
42. Бабич М.В. // УМН. 2009. Т. 64. № 1 (385). С. 51.
43. Rogers C., Shadwick R. Bäcklund Transformations and their Applications. New York, 1982.
44. Лукашевич Н.А. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. С. 1124.
45. Okamoto K. // The Painlevé Property, One Century Later / Ed. R. Conte. CRM series in Mathematical Physics. Berlin, 1999. P. 735.
46. Noumi M. Painlevé Equations Through Symmetry. Trans. Math. Mono. AMS, Providence. RI, 2004. Vol. 223.
47. Clarkson P.A. // J. Comp. Appl. Math. 2003. Vol. 153. P. 127.
48. Airault H. // Stud. Appl. Math. 1979. Vol. 61. P. 31.
49. Vorob'ev A.P. // Diff. Eqns. 1965. Vol. 1. P. 58.
50. Яблонский А.И. // Весцi АН БССР. 1959. № 3. С. 30.
51. Kajiwara K., Ohta Y. // J. Math. Phys. 1996. Vol. 37. P. 4393.
52. Adler V.E. // Physca D. 1994. Vol. 73. P. 335.

53. Kudryashov N.A. // Phys. Lett. 1997. Vol. A224. P. 353.
54. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.; Ижевск, 2004.
55. Lax P.D. // SIAM Rev. 1976. Vol. 18. P. 351.
56. Clarkson P.A., Joshi N., Pickering A. // Inverse Problems. 1999. Vol. 15. P. 175.
57. Gromak V.I. // Bäcklund and Darboux Transformations. The Geometry of Solitons / Ed. A. Coley et al. CRM Proc. Lect. Notes Series. AMS. Providence, 2000. Vol. 29. P. 3.

Поступила в редакцию 06.06.11.

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа. Область научных интересов – аналитическая теория дифференциальных уравнений, теория уравнений Пенлеве, нелинейная теория волн, теория солитонов. Автор более 150 печатных работ, в том числе 3 монографий.