

УДК 517.9

А.А. ЛЕВАНОВ, С.А. МАЗАНИК, Г.П. РАЗМЫСЛОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The paper contains a survey of the results on asymptotic theory of linear differential systems, algebraic-differential systems and stochastic differential equations and inclusions obtained by the members of the department of higher mathematics the Belarusian State University in 2001–2010 years.

Научные исследования, ведущиеся на кафедре высшей математики БГУ, в основном связаны с задачами асимптотической теории линейных дифференциальных систем, дифференциально-алгебраических систем и стохастических дифференциальных уравнений и включений. Работы по этим направлениям были начаты в Беларуси в конце 1950-х гг. под руководством академика АН БССР Н.П. Еругина и профессора Ю.С. Богданова (заведовал кафедрой со дня ее основания в 1971 г. по 1982 г.) и ведутся в настоящее время под руководством академика НАН Беларуси Н.В. Гайшуна и академика НАН Беларуси Н.А. Изובה (заведовал кафедрой с 1995 г. по 1999 г.). В настоящей статье представлен краткий обзор основных результатов, полученных сотрудниками кафедры за последнее десятилетие (обзор результатов, полученных в предыдущие годы, содержится в [1]).

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Рассматриваются линейные системы вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1.1)$$

где $A(t)$ – матрица размерности $n \times n$, элементами которой являются локально интегрируемые на полуоси $I = [t_0, +\infty[$, $t_0 \in \mathbf{R}$, функции a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, $\sup_{t \in I} \|A(t)\| \leq a$. Наряду с системой (1.1) рассматривается система

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad (1.2)$$

коэффициенты которой имеют ту же гладкость, что и коэффициенты системы (1.1). Будем говорить, что система (1.1) приводима к системе (1.2), если существует линейное преобразование $x = Ly$ с абсолютно непрерывной невырожденной на I матрицей L , переводящее систему (1.1) в систему (1.2), т. е. для любого решения y системы (1.2) функция $x = Ly$ – решение системы (1.1) (для любого решения x системы (1.1) функция $y = L^{-1}x$ – решение системы (1.2)). Если матрица преобразования L является матрицей Ляпунова, т. е. удовлетворяет условию

$$\sup_{t \in I} (\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \|\dot{L}(t)\|) < +\infty,$$

то системы (1.1) и (1.2) будем называть приводимыми по Ляпунову, или асимптотически эквивалентными (см. [2]). Если к тому же $L(t) \rightarrow C$ при $t \rightarrow +\infty$, где C – некоторая невырожденная матрица, то системы (1.1) и (1.2) будем называть C -асимптотически эквивалентными, а в случае единичной матрицы $C = E$ – E -асимптотически эквивалентными. В работах [3–6] получены критерии и достаточные условия C - и E -асимптотической эквивалентности линейных систем, построены асимптотические инварианты этих преобразований, построены системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами с заранее заданными асимптотическими характеристиками. В частности, показано [7], что любая система (1.1) асимптотически эквивалентна системе с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Исследованию приводимости по Ляпунову линейных систем в случае экспоненциально малых возмущений посвящены работы [8–12]. Показано [8], что если $\left\| \int_t^{+\infty} (B(u) - A(u)) du \right\| \leq C e^{-\sigma t}$, $t \geq 0$, $\sigma > 2a$,

где C – некоторая постоянная, то системы (1.1) и (1.2) являются эквивалентными по Ляпунову и доказана неулучшаемость оценки $\sigma > 2a$ во множестве всех линейных систем. Получен общий интегральный признак асимптотической эквивалентности линейных систем:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} \|X_A(t, \tau)(B(\tau) - A(\tau))X_A(\tau, t)\| d\tau < 1,$$

где $X_A(t, \tau)$ – матрица Коши системы (1.1). Введены понятия коэффициента $r(A)$ и показателя $\rho(A)$ приводимости линейных систем, определяемые как точные нижние грани множеств $R(A)$ и $R_\lambda(A)$ тех значений σ , при которых система (1.2) асимптотически эквивалентна системе (1.1) при любом возмущении $Q(t) = B(t) - A(t)$, удовлетворяющем условию $\|Q(t)\| \leq C(Q)e^{-\sigma t}$ или условию $\lambda[Q] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|Q(t)\| \leq -\sigma \leq 0$, $\sigma \geq 0$, $t \in I$, соответственно. Доказано их совпадение для любой системы (1.1), что позволяет ввести индивидуальную асимптотическую характеристику системы (1.1) – коэффициент приводимости $r_A = r(A) = \rho(A)$, и показано различие его поведения по отношению к указанным возмущениям. Результаты по систематическому исследованию свойств преобразований Ляпунова, их инвариантов и систем-представителей классов асимптотически эквивалентных систем представлены в [13].

В работах [14, 15] доказано совпадение величин неправильности систем (1.1) и (1.2) в случае, когда характеристический показатель Ляпунова $\lambda[B - A]$ меньше взятого с противоположным знаком коэффициента неправильности Гробмана системы (1.1), и получены достаточные условия совпадения максимальных нижних показателей систем (1.1) и (1.2).

С помощью метода отражающей функции В.И. Мироненко (см., например, [16]) построен [17, 18] класс линейных дифференциальных систем, обладающих блочно-диагональными отражающими матрицами. Изучены двухточечные краевые задачи для построенного класса систем и получены необхо-

димые и достаточные условия существования их решений. В случае периодичности матрицы коэффициентов указанных систем построены отображения за период и получены уравнения для нахождения мультипликаторов системы. Полученные результаты использованы для изучения вопросов существования и устойчивости периодических решений построенного класса линейных систем с периодическими коэффициентами.

2. Стохастические дифференциальные уравнения и включения

Объектом исследований являются стохастические дифференциальные уравнения Ито

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d, \quad (2.1)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Для уравнения (2.1) с измеримыми по Борелю локально ограниченными коэффициентами f и g получены новые теоремы существования сильных и слабых решений, охватывающие решения типа скользящего режима [19–27]. Исследована [28] проблема существования жизнеспособных решений уравнения (2.1), удовлетворяющих условию $x(t) \in K(t, x(t))$, где K – некоторое полунепрерывное сверху многозначное отображение.

В работе [29] доказана теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с отражением от границы

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, x(\tau))dW(\tau) + K(t), \quad t \geq 0, x \in \bar{D},$$

где D – область в $\mathbf{R}^d$, удовлетворяющая условиям Лионса – Шнитмана, $x_0 \in \bar{D}$, функции f и g измеримы по Борелю и ограничены, $K(t)$ – процесс ограниченной вариации, причем вариация $|K|$ возрастает лишь когда $x(t) \in \partial D$.

Получена теорема существования решений стохастических дифференциальных уравнений с дробным броуновским движением

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + b(t, x(t))dB^H(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d,$$

где $B^H(t)$ – дробное броуновское движение с индексом Херста $H \in (0, 5; 1)$, функции f, g, b удовлетворяют локальному условию Липшица [30].

Исследована непрерывная зависимость от начальных условий и правых частей для слабых решений стохастических дифференциальных включений [19]

$$dx(t) \in f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d,$$

с измеримыми полунепрерывными сверху многозначными отображениями f, g , значения которых – непустые выпуклые замкнутые множества.

Получено интегральное представление решений стохастической дифференциальной системы

$$dx(t) = (f(t, x(t))dt + q(t, x(t)))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d,$$

через решения невозмущенной обыкновенной системы $dx(t) = f(t, x(t))dt$ и на основе этого представления изучена устойчивость ряда нелинейных стохастических систем [31, 32].

Установлен [19] аналог теоремы Барбашина – Красовского для автономных стохастических дифференциальных включений

$$dx(t) \in f(x(t))dt + g(x(t))dW(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d.$$

Найдены критерии ограниченности в среднеквадратическом решении систем линейных стохастических уравнений [33]

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + g(t)dW(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d,$$

где $A(t)$ – действительная $(n \times n)$ -матрица с непрерывными элементами.

Построены точные методы интегрирования ряда нелинейных стохастических дифференциальных уравнений [19].

В рамках общей теории стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах получены оценки функционалов от решений для стохастических дифференциально-функциональных уравнений [25, 34]

$$dx(t) = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dW(t), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d, \quad (2.2)$$

где $x_t = \{x(t + \tau) \mid -h \leq \tau \leq 0\}$ – элемент пространства $C([-h, 0], \mathbf{R}^d)$, $h \geq 0$ – запаздывание, функции f, g измеримы по Борелю и локально ограничены. С помощью этих оценок доказаны теоремы существо-

вания слабых решений стохастического дифференциально-функционального уравнения (2.2) с разрывными коэффициентами и вырожденным оператором диффузии [25, 26, 34].

Рассмотрено стохастическое эволюционное уравнение

$$dx(t) = Ax(t)dt + f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t \geq 0, x \in H, \quad (2.3)$$

где H – сепарабельное гильбертово пространство, $W(t)$ – цилиндрическое броуновское движение со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U , A – генератор компактной полугруппы $S(t)$ на H , функции f, g измеримы по Борелю и локально ограничены. В работах [35–39] получены теоремы существования решений для уравнения (2.3). Исследована непрерывная зависимость решений уравнения (2.3) от начальных условий и правых частей [40].

Найдены достаточные условия отсутствия взрывов у решений стохастических эволюционных уравнений [41]

$$dx(t) = Ax(t)dt + f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t \geq 0, x \in H,$$

с измеримыми локально ограниченными функциями f, g и оператором A , порождающим сильно непрерывную полугруппу $S(t)$.

Для стохастического волнового уравнения

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + g(t, x, u(t, x))W(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d, u \in \mathbf{R},$$

с измеримыми локально ограниченными функциями f, g , пространственно однородным броуновским движением $W(t, x)$ доказана теорема существования решений [42].

Современное состояние основных разделов теории стохастических дифференциальных уравнений – теоремы существования, теория устойчивости, методы интегрирования – представлено в монографии [19].

3. Дифференциально-алгебраические системы

Рассматриваются не разрешенные относительно производной неоднородная система вида

$$A_0 \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

и система управления

$$A_0 \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1 u(t-h) + \int_0^h B(s)u(t-s)ds, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0)\},$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$, A_0, A, B, B_1 – постоянные матрицы соответствующих размеров; $B(t)$ – матричная функция; x_0 – заданный n -вектор; $h, h > 0$, – действительное число (запаздывание); $f(t), \varphi(t)$ – некоторые n -вектор функции.

Системы (3.1), (3.2) называются регулярными, если найдется число $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ такое, что $\det(\lambda_0 A_0 - A) \neq 0$.

Ясно, что если $A = 0$ и $\det A_0 = 0$, то системы (3.1), (3.2) являются нерегулярными. Для нерегулярной системы (3.1) получены необходимые и достаточные условия существования решений и указана формула ее общего решения [43]. В работе [44] рассмотрены некоторые виды управляемости таких систем.

Для регулярных же систем (3.1), (3.2) установлены условия существования решений [45–48] и в случае, когда матрица $B_1 = 0$, $B(s) \equiv 0, s \in [0, h]$, для системы управления (3.2) исследованы различные виды управляемости [49–52], получены критерии этих видов управляемости, выраженные либо через параметры исходной системы, либо в терминах специального решения соответствующей регулярной неоднородной матричной системы, которое играет роль, аналогичную роли матрицы Коши для обыкновенных дифференциальных систем.

В случае, когда A_0 является единичной матрицей, для системы управления (3.2) получены критерии относительной, полной H -управляемости и полной управляемости по выходу [53].

Исследованы некоторые типы управляемости дифференциально-алгебраических систем вида $A_0 \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t)$, а также их дискретных аналогов [54–56].

* * *

Представленные результаты, естественно, не охватывают всех исследований, проводимых сотрудниками кафедры (см., например, [57–78]). В частности, в монографиях [62–65] построена теория колец с дополнительной операцией суперпозиции (m -колец), исследованы свойства категории m -колец и их гомоморфизмов, а также категорий модулей над ними. Вопросы модулярного разрешения секре-

та в кольцах и генерации модулей для схем разделения секрета рассмотрены в [66–70]. Классификация четырехмерных однородных неразрешимых пространств Эйнштейна и решения уравнения Эйнштейна – Максвелла на четырехмерных однородных псевдоримановых пространствах представлены в [71, 72]. Получены разложения сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши, позволяющие построить эффективные вычислительные схемы приближенного решения сингулярного уравнения первого рода с ядром Коши [73–75]. Применение функций гиперкомплексного переменного к интегрированию систем дифференциальных уравнений рассмотрено в [76–78].

Авторы выражают признательность академику Н.А. Изобову за внимание к работе и искренне благодарят доцентов кафедры высшей математики Л.А. Альсевич, Д.Ф. Базылева, В.И. Булатова, С.В. Ведерникова, О.А. Кастрицу, Б.Б. Комракова, Г.В. Матвеева, Н.Я. Радыно, А.В. Филиппова, В.М. Ширяева и кандидата физико-математических наук ассистента М.М. Васьковского за предоставленные материалы и полезное обсуждение содержания статьи.

1. Леваков А.А., Мазаник С.А., Размыслович Г.П. // Выбр. науч. работы БДУ: у 7 т. Т. 7. Матэматыка. Мн., 2001. С. 323.
2. Богданов Ю.С. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707.
3. Красовская Т.Г., Храмцов О.В. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 2. С. 31.
4. Красовская Т.Г. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 45.
5. Мазаник С.А., Красовская Т.Г. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 2. С. 108.
6. Красовская Т.Г., Мазаник С.А. // Материалы Междунар. конф. «Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (МоАРМІ-2004)»: Тез. докл. науч. конф., Брест, 20–23 сент. 2004 г.: в 2 ч. Мн., 2004. Ч. 1. С. 38.
7. Красовская Т.Г., Мазаник С.А. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 193.
8. Изобов Н.А., Мазаник С.А. // Там же. 2006. Т. 42. № 2. С. 168.
9. Izobov N.A., Mazanik S.A. // Memoirs on differential equations and mathematical physics. 2006. Vol. 39. P. 154.
10. Изобов Н.А., Мазаник С.А. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 2. С. 191.
11. Изобов Н.А., Мазаник С.А. // Там же. 2008. Т. 44. № 3. С. 323.
12. Izobov N.A., Mazanik S.A. // Analytic Methods of analysis and differential equations: AMADE 2006. Cambridge, 2008. P. 69.
13. Мазаник С.А. Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. Мн., 2008.
14. Филиппов А.В. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 1. С. 24.
15. Филиппов А.В. // Третьи науч. чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 80-летию со дня рождения Ю.С. Богданова: Тез. докл. Мн., 2001. С. 38.
16. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.
17. Альсевич Л.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2002. № 2. С. 83.
18. Альсевич Л.А., Кастрица О.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 3. С. 23.
19. Леваков А.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Мн., 2009.
20. Леваков А.А. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 47.
21. Леваков А.А. // Там же. 2001. Т. 37. № 8. С. 1041.
22. Леваков А.А. // Докл. НАН Беларуси. 2003. № 5. С. 33.
23. Леваков А.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 4. С. 84.
24. Леваков А.А., Васьковский М.М. // Изв. Ин-та мат. и информ. Удмурт. гос. ун-та. 2006. Т. 37. Вып. 3. С. 81.
25. Леваков А.А., Васьковский М.М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1029.
26. Леваков А.А., Васьковский М.М. // Там же. 2007. Т. 43. № 10. С. 1324.
27. Леваков А.А., Васьковский М.М. // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС-2006». Мн., 2007. С. 5.
28. Леваков А.А. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 210.
29. Леваков А.А. // Там же. № 4. С. 465.
30. Леваков А.А., Новик Т.А., Кошман Е.И. // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Тез. докл. Междунар. конф. Мн., 2010. С. 108.
31. Леваков А.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2004. № 1. С. 113.
32. Леваков А.А. // Там же. 2005. № 2. С. 109.
33. Леваков А.А. // Там же. 2003. № 1. С. 88.
34. Васьковский М.М. // Там же. 2008. № 1. С. 64.
35. Васьковский М.М. // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС-2007». Мн., 2008. С. 30.
36. Васьковский М.М. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 40.
37. Vas'kovskii M. // International workshop in applied probability: proceedings of the international conference. Compiegne, 2008. (1 CD-ROM).
38. Vas'kovskii M. // Applied stochastic models and data analysis: proceedings of the international conference. Vilnius, 2009. P. 437.
39. Васьковский М.М. // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС-2008». Мн., 2009. С. 30.
40. Васьковский М.М. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 19.

41. Задворный Я.Б., Васьковский М.М. // Еругинские чтения-2011: Тез. докл. Междунар. конф. Новополоцк, 2011. С. 144.
42. Солоневич П.А., Васьковский М.М. // Там же. С. 157.
43. Размыслович Г.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2001. № 2. С. 87.
44. Размыслович Г.П. // Тез. докл. Междунар. мат. конф. «Еругинские чтения-VII». Гродно, 2001. С. 147.
45. Булатов В.И. // Труды ИМ НАН Беларуси. 2001. Т. 10. С. 33.
46. Булатов В.И. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2002. № 1. С. 106.
47. Булатов В.И. // Труды ИМ НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 2. С. 49.
48. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Тез. докл. Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2009». Пинск, 2009. С. 314.
49. Булатов В.И. Полная управляемость линейных регулярных систем управления // Труды 4-й Междунар. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в 3 т. Т. 3. Дифференц. уравнения. Мн., 2006. С. 19.
50. Булатов В.И. // Труды 5-й Междунар. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в 2 т. Мн., 2010. Т. 2. С. 31.
51. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 9. С. 1291.
52. Размыслович Г.П., Крахотко В.В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2006. № 1. С. 123.
53. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Там же. № 3. С. 130.
54. Игнатенко В.В., Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Материалы Междунар. науч.-техн. конф. «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». Мн., 2009. С. 319.
55. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Изв. Ин-та мат. и информ. Ижевск, 2006. С. 75.
56. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Тез. докл. Междунар. мат. конф. «Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». Мн., 2005. С. 104.
57. Bazyleu D.F., van Geel J., Yanchevskii V.I. // Bull. Belg. Math. Soc. 14. 2007. P. 51.
58. Ведерников С. В. // Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2006. № 1. С. 39.
59. Леваков А.А. // Там же. 2003. № 2. С. 45.
60. Mazanik S.A. // Mathematica Bohemica. 2002. Vol. 127. № 2. P. 275.
61. Матвеев Г.В., Ширяев В.М. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2002. № 2. С. 67.
62. Ширяев В.М. Кольца с дополнительной операцией суперпозиции. Мн., 2004.
63. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца. Мн., 2009. Т. I (электронный ресурс). Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200934.
64. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца. Мн., 2009. Т. II (электронный ресурс). Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200935.
65. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца. Мн., 2009. Т. III (электронный ресурс). Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200936.
66. Galibus T.V., Matveev G.V. // SYNASC'2006. Timisoara, 2006. P. 39.
67. Galibus T.V., Matveev G.V. // ENTCS. 2007. Vol. 186. P. 43.
68. Galibus T.V., Matveev G.V., Shenets N.N. // SYNASC'2008. Timisoara, 2008. P. 248.
69. Galibus T., Matveev G., Shenets N. // SYNASC'2008 / Los Alamitos, IEEE Comp. Soc., CPS. 2009. P. 197.
70. Матвеев Г.В., Шенет Н.Н. // Дискретная математика и ее приложения: Материалы X Междунар. семинара. М., 2010. С. 521.
71. Комраков В., Jnr. // Lobachevskii J. of Mathematics. 2001. Vol. 8. P. 33.
72. Комраков Б. Б. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 2. С. 13.
73. Расолько Г.А., Альсевич Л.А. // Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2009. № 2. С. 46.
74. Расолько Г.А., Альсевич Л.А. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 5. С. 10.
75. Расолько Г.А., Альсевич Л.А. // Труды 5-й Междунар. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в 2 т. Мн., 2010. Т. 1. С. 105.
76. Гаврилович А.Б., Радыно Н.Я. // Инж.-физ. журн. 2006. Т. 79. № 2. С. 27.
77. Радыно Н.Я. // Сб. науч. тр. Междунар. мат. конф. «Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования», Гродно, 18–22 июня 2007 г. Гродно, 2007. С. 61.
78. Радыно Н.Я. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 1. С. 83.

Поступила в редакцию 03.06.11.

Анатолий Афанасьевич Леваков – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики. Область научных интересов – теория обыкновенных дифференциальных уравнений, стохастических дифференциальных уравнений и включений. Автор более 80 научных и научно-методических работ, в том числе монографии и учебного пособия.

Сергей Алексеевич Мазаник – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики. Область научных интересов – асимптотическая теория дифференциальных уравнений, методика преподавания математики. Автор более 200 научных и научно-методических работ, в том числе монографии и двух учебных пособий.

Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Область научных интересов – теория оптимального управления, алгебро-дифференциальные системы, матричный анализ. Автор более 130 научных и научно-методических работ, в том числе 11 авторских изобретений и 4 учебных пособий.