

УДК 004.9 (075.8)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ PYTHON – БИБЛИОТЕК ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ

Г. Ч. Шушкевич¹⁾, С. В. Шушкевич²⁾

^{1), 2)} Гродненский государственный университет имени Янки Купалы,
Беларусь, Гродно, gsys@grsu.by, shushkevich_sv@grsu.by

Рассмотрено совместное применение библиотек Numpy, Sympy, Matplotlib и базовых средств языка Python для аналитических вычислений и построения некоторых кривых (подера, соприкасающаяся окружность, эволюта) на плоскости.

Ключевые слова: Python; Numpy; Sympy; Matplotlib; аналитические вычисления; подера; соприкасающаяся окружность; эволюта.

USING PYTHON - LIBRARIES FOR ANALYTICAL CALCULATIONS AND PLOTTING OF CURVES

G.Ch. Shushkevich¹⁾, S.V. Shushkevich²⁾

^{1), 2)} Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus, Grodno, gsys@grsu.by,
shushkevich_sv@grsu.by

Combined using Numpy, Sympy, Matplotlib libraries and basic tools of Python language for analytical calculations and plotting of some curves (podera, contiguous circle, evolute) on a plane is considered.

Keywords: Python; Numpy; Sympy; Matplotlib; analytical calculations; podera; tangent circle; evolute.

Введение

Компьютерные технологии занимают все более существенное место в образовании. Появление компьютерных технологий значительно расширило установленные границы процесса обучения и способствовало качественному улучшению уровня образованности. Обучение будущих специалистов использованию компьютерных технологий в процессе решения задач по дисциплинам специальности создает фундамент для применения полученных навыков в профессиональной деятельности.

Применение систем компьютерной математики (СКМ) существенно облегчает и расширяет возможности проведения аналитических и численных вычислений, визуализацию решения и хранение данных. Визуализация промежуточных результатов и решения задачи облегчает понимание

и сути исследуемых процессов и явлений, и зависимости изменения решения от влияния значений используемых параметров или переменных. Использование СКМ при преподавании математических дисциплин (аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений и других) позволяет сделать излагаемый материал более доступным и наглядным для восприятия [1–8].

Коммерческие СКМ, такие как Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, достаточно дороги, и не каждый пользователь или учебное заведение может приобрести системы с высокой стоимостью индивидуальной лицензии. В образовательном процессе возможно приобретение недорогой подписки на веб-сервис СКМ, либо, для замены коммерческого программного обеспечения, использование бесплатных СКМ, например, Maxima, Scilab, Octave, Smath Studio, SymPy. Со сравнительным анализом СКМ – Maple, Mathematica, Matlab и SymPy можно ознакомиться в статье [9].

В данной статье приведены примеры использования бесплатной библиотеки SymPy, написанной на языке Python, для аналитических вычислений и визуализации некоторых задач из курса математического анализа и дифференциальной геометрии.

Теоретический материал

Подерой (Pedal curve) плоской кривой $y=f(x)$ относительно точки $O(x_0, y_0)$ называется множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки $O(x_0, y_0)$ на касательные к данной кривой.

Если функция задана параметрически $x(t)=\varphi(t)$, $y(t)=\psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, то параметрическое уравнение подеры имеет вид [10]:

$$X(t) = \frac{a(t) + x(t)K(t) - y(t)}{1 + K^2(t)} K(t), \quad Y(t) = a(t) - \frac{a(t) + x(t)K(t) - y(t)}{1 + K^2(t)},$$

где $a(t) = y_0 + x_0 / K(t)$, $K(t) = y'(t) / x'(t)$.

Если кривая задана в полярной системе координат $\rho(\varphi) = f(\varphi)$, то ее можно представить в параметрическом виде $x(t) = f(t) \cos t$, $y(t) = f(t) \sin t$.

Кривизна кривой $y = f(x)$ в точки $O(x_0, y_0)$ вычисляется по формуле

$$K = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \quad \text{при } x = x_0.$$

Координаты центра соприкасающейся окружности (Osculating circle) с кривой $y = f(x)$ в точке $O(x_0, y_0)$ вычисляются по формуле [12]:

$$x_c = x_0 - \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)} f'(x) \Big|_{x=x_0}, \quad y_c = y_0 + \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)} \Big|_{x=x_0}.$$

Параметрическое уравнение соприкасающейся окружности имеет вид:

$$x(t) = x_c + R \cos t, \quad y(t) = y_c + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где R – радиус окружности, $R = 1/K$.

Если кривая задана параметрически – $x(t)=\varphi(t)$, $y(t)=\psi(t)$, то кривизна и координаты соприкасающейся окружности вычисляются по формулам [11]:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}} \quad \text{при } t = t_0,$$

$$x_c = x(t) - \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} y'(t), \quad y_c = y(t) + \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Эволютой (Evolute) кривой называется геометрическое место центров соприкасающихся окружностей [12].

Аналитические вычисления и построение некоторых кривых на плоскости

Пример 1. Построить график функции (четырёхлепестковая роза) $\rho(\varphi) = \cos 2\varphi$. Найти параметрический вид подеры и построить ее график относительно точки $O(0,0)$.

Python – документ

```
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy.plotting import plot
a,x,y,X,Y = symbols("a,x y,X,Y", cls=Function)
t = symbols("t"); x0=0; y0=0;
x=cos(2*t)*cos(t); y=cos(2*t)*sin(t)
k=(y.diff(t))/(x.diff(t)); a=y0+x0/k; r=simplify((a+x*k-y)/(1+k**2))
X=simplify(r*k); Y=simplify(a-r)
print("==== Подера - параметрическое представление ")
print('== x(t) = '); pprint(X); print('== y(t) = '); pprint(Y)
# Построение графиков
interval = np.arange(0, 2*np.pi, 0.05)
x_val = [x.subs(t, value) for value in interval]
y_val = [y.subs(t, value) for value in interval]
X_val = [X.subs(t, value) for value in interval]
```

```

Y_val = [Y.subs(t, value) for value in interval]
fig = plt.figure(figsize=(7,7))
plt.title('Построение подеры ', fontsize=14)
plt.xlabel('x(t)', fontsize=14); plt.ylabel('y(t) ', fontsize=14)
plt.plot(x_val, y_val,label='Original curve',linewidth=3.0,color='k')
plt.plot(X_val, Y_val,'--', label='Pedal curve',linewidth=2.5,color='k')
plt.grid(); plt.legend(loc='best',fontsize=12)

```

Результаты вычислений и визуализация кривых (рис.1,2).

```

==== Подера - параметрическое представление
== x(t) =

$$\frac{\left(5 - 6 \cdot \cos^2(t)\right) \cdot \left(2 \cdot \sin^2(t) - 1\right) \cdot \cos(t)}{12 \cdot \sin^4(t) - 12 \cdot \sin^2(t) - 1}$$

== y(t) =

$$\frac{\left(6 \cdot \sin^2(t) - 5\right) \cdot \sin(t) \cdot \cos(2 \cdot t)}{12 \cdot \sin^4(t) - 12 \cdot \sin^2(t) - 1}$$


```

Рис. 1. Результаты вычислений

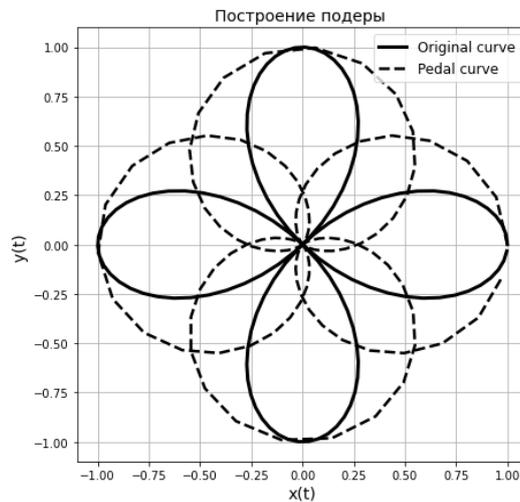


Рис. 2. Построение подеры

Пример 2. Построить гипоциклоиду $x(t) = 5\cos t + \cos 5t$, $y(t) = 5\sin t - \sin 5t$, соприкасающуюся окружность при $t_0 = 1,3$ и эволюту.

Результаты вычислений и визуализация кривых (рис.3, 4, 5).

```

===== Радиус окружности = 3.43883079591987
===== Параметрическое уравнение эволюты
=====  $x(t) = 15*\cos(t)/2 - 3*\cos(5*t)/2$ 
=====  $y(t) = 15*\sin(t)/2 + 3*\sin(5*t)/2$ 
===== Координаты центра окружности
=====  $x_c = 0.541359776092370$  ,  $y_c = 7.54936637276067$ 

```

Рис. 9. Результаты вычислений

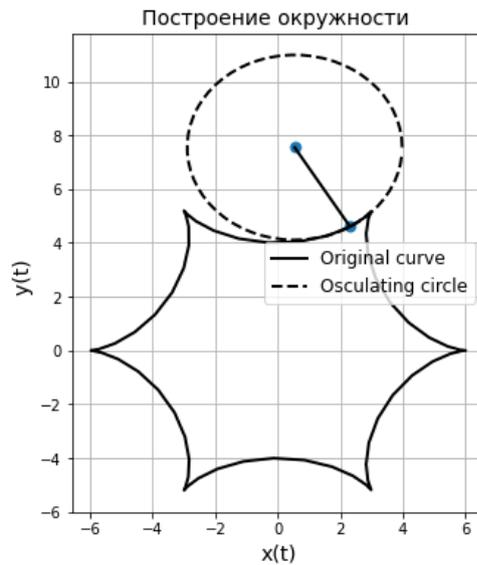


Рис. 4. Построение соприкасающейся окружности

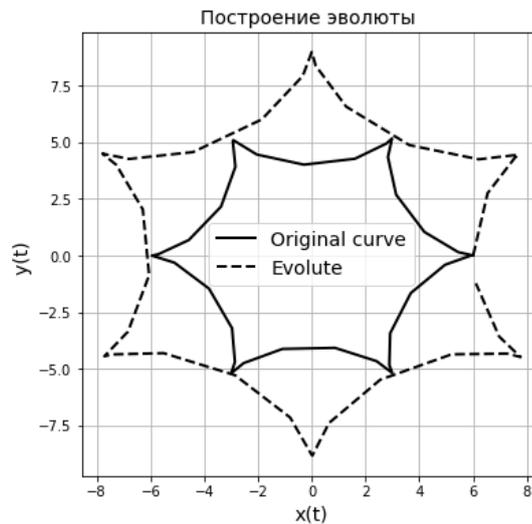


Рис. 5. Построение эволюты

Библиографические ссылки

1. *Голоскоков Д. П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П. Голоскоков. – СПб: Питер, 2004. – 539 с.
2. *Шушкевич Г. Ч., Шушкевич С. В.* Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учебное пособие в 2 ч. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч.2.– 256 с.
3. *Шушкевич С. В., Шушкевич Г. Ч.* Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С.В. Шушкевич, Г.Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.
4. *Горский, А. В.* О возможностях использования систем компьютерной математики в учебном процессе / А.В. Горский // Вестник ЧГПУ им.И. Я. Яковлева. – 2017, № 3(95), Ч.1. – С.90-99.
5. *Шушкевич Г. Ч., Шушкевич С. В.* Динамическая визуализация численных решений дифференциальных уравнений в системе Mathcad // Труды международной научно-практической конференции «Информатизация инженерного образования». 12 апреля –13 апреля 2016, Москва. Сборник трудов. С. 477–480.
6. *Шушкевич Г. Ч., Шушкевич С. В.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием системы Mathematica // Сборник трудов по материалам V международной научно-практической Интернет-конференции «Инновационные технологии в современном образовании». 15 декабря 2017, Москва. С.525-530.
7. *Шушкевич Г. Ч., Шушкевич С. В.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений с использованием библиотеки Sympy // Материалы международного научно-практического семинара «Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context». 23 февраля 2023, Могилев. С.109-112.
8. *Расолько Г. А., Кремень Е. В., Кремень Ю. А.* Технологии программирования: математическое моделирование и система компьютерной математики MathCad [сайт]. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/277920> (дата обращения 25.03.2023).
9. Сравнительный анализ универсальных математических пакетов: Matlab, Maple, Mathematica, – и высокоуровневого языка программирования Python [сайт]. – URL: <https://the-unl.com/sravnitelnyy-analiz-universalnykh-matematicheskikh-paketov-matlab-maple-mathematica-i-vysokourovneвого-yazyka-programmirovaniya> (дата обращения 25.03.2023).
10. Pedal curve [website]. Available at: https://en.wikipedia.org/Wiki/Pedal_curve (date of access: 25/03/2023).
11. Osculating circle [website]. Available at: https://en.wikipedia.org/Wiki/Osculating_circle (date of access: 25/03/2023).
12. Evolute [website]. URL: Available at: <https://en.wikipedia.org/Wiki/Evolute> (date of access: 25/03/2023).