УДК 517.9 (004.43)

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИКОВ

Н. С. Коваленко[1], М. Н. Василевич[2], С. Ю. Щерба[3]

[1] *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск,*
nskovalenko@rambler.ru
[2] *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск,*
vasilevich.m@gmail.com
[3] *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск,*
stas.gorkavyy@mail.ru

Работа посвящена проблеме активизации интереса к изучению дисциплины «Высшая математика» студентами-химиками. Приведен ряд типовых задач из раздела «Обыкновенные дифференциальные уравнения» с химико-биологическим содержанием и их решение, в том числе с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: задачи с химическим содержанием; закон перехода вещества в раствор; распад радиоактивного вещества; развитие короновирусной инфекции.

ABOUT TEACHING MATHEMATICS FOR CHEMISTRY STUDENTS

N. S. Kovalenko[1], M. N. Vasilevich[2], S. Y. Shcherba[3]

[1] *Belarussian state university, Belarus, Minsk, nskovalenko@rambler.ru*
[2] *Belarussian state university, Belarus, Minsk, vasilevich.m@gmail.com*
[3] *Belarussian state university, Belarus, Minsk, stas.gorkavyy@mail.ru*

The work is devoted to the problem of increasing interest in the study of the discipline Higher Mathematics by chemistry students. A number of typical problems from the section Ordinary Differential Equations with chemical and biological content and their solution, including using the computer algebra system Wolfram Mathematica, are presented.

Keywords: tasks with chemical content; the law of the transition of a substance into a solution; the decay of a radioactive substance; the development of a coronavirus infection.

Введение

Одной из базовых дисциплин для студентов химико-биологических специальностей является высшая математика. Поэтому актуальной остается проблема подбора и разработки практических задач с химико-биологическим содержанием [1]. Исходя из собственного опыта приведем несколько достаточно типовых примеров из раздела обыкновенные дифференциальные уравнения, в подготовке которых участвовали и студенты. Приведен также демонстрационный пример по использованию возможностей символьного пакета Wolfram Mathematica для решения и исследования конкретных задач с химическим содержанием.

Пример 1.

Описать процесс развития короновирусной инфекции, если вызывающий ее вирус COVID 19 размножаются со скоростью пропорциональной k_1 и погибают со скоростью пропорциональной k_2, а первоначальное количество вируса составляет в момент t_0 величину y_0.

Решение. Пусть $y = y(t)$ составляет величину популяции вирусов COVID 19 в момент времени t. Тогда прирост популяции Δy за малый промежуток Δt составит величину $\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t = (k_1 - k_2) y\Delta t$.

Разделим обе части последнего равенства на Δt, в результате получим $\frac{\Delta y}{\Delta t} = (k_1 - k_2) y$. Далее, в обеих частях полученного равенства перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получим равенство $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (k_1 - k_2) y$ или $y' = (k_1 - k_2) y$ (дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными). Решаем его:

$$\frac{dy}{dt} = (k_1 - k_2) y, \quad \frac{dy}{y} = (k_1 - k_2) dt, \quad \int \frac{dy}{y} = \int (k_1 - k_2) dt,$$

$$\ln|y| = (k_1 - k_2) t + \ln|C|, \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = (k_1 - k_2) t, \quad y = Ce^{(k_1 - k_2) t}.$$

Константу C находим из условия: в момент времени $t = t_0$, $y = y_0$. Подставляем эти значения вместо y и t в равенство $y = Ce^{(k_1 - k_2) t}$. В результате получим $y_0 = Ce^{(k_1 - k_2) t_0}$. Откуда $C = y_0 e^{-(k_1 - k_2) t_0}$. Далее, после несложных преобразований, получим окончательный ответ $y = y_0 e^{(k_1 - k_2)(t - t_0)}$. В частности, при $t_0 = 0$, $y(0) = y_0$, получим $y = y_0 e^{(k_1 - k_2) t}$.

Пример 2.

(*Закон перехода вещества в раствор*). Рассмотрим процесс перехода вещества в раствор. Известно, что при фиксированной температуре количество вещества, которое содержится в заданном объеме растворителя, не может превзойти некоторого числа *P*, определенного для насыщенного раствора каждого вещества. Также известно, что по мере приближения к насыщенному раствору уменьшается количество вещества, переходящего в раствор за единицу времени. Другими словами, чем больше вещества перешло в раствор, тем меньше скорость перехода. Задача состоит в том, чтобы в указанных условиях получить формулу, описывающую процесс перехода вещества в раствор.

Решение. Пусть $x(t)$ – количество вещества, перешедшего в раствор к моменту времени t. Тогда $x'(t)$ – скорость перехода, и согласно условия задачи можно написать: $x'(t)=\varphi(x)$, где $\varphi(x)\to 0$ при $x\to P$ $(x<P)$. Эксперименты показывают, что для многих веществ функция $\varphi(x)$ пропорциональна разности $P-x$, т.е. $\varphi(x)=k(P-x)$. Тогда $x'(t)=k(P-x)$, где k $(k>0)$ – коэффициент пропорциональности. Последнее равенство можно записать в виде $x'(t)+kx=kP$. Это – неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид: $x=Ce^{-kt}+P.$ Произвольную постоянную C найдем из условия: пусть t_0 – момент времени, с которого начался процесс перехода вещества в раствор, очевидно, что $x(t_0)=0$. Тогда получаем $Ce^{-kt_0}+P=0,$ откуда $C=-Pe^{-kt_0}$, и, следовательно

$$x(t)=P\left(1-e^{-k(t-t_0)}\right). \tag{1}$$

Значения величин k и P в формуле (1) определяются свойствами растворенного вещества и растворителя. Из (1) видно, что при любых $k>0$ и P величина $x(t)\to P$, если $t\to\infty.$ Вид функции $x(t)$ хорошо согласуется с экспериментальными данными. Поэтому формулу (1) можно рассматривать как закон перехода вещества в раствор.

Пример 3.

(*Задача о распаде радиоактивного вещества*). Имеется некоторое количество радиоактивного вещества. Известно, что через 30 дней распадается 50 % этого вещества. Требуется определить, через сколько дней останется 1 % первоначального количества вещества.

Решение. При решении задачи используется *закон радиоактивного распада*: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

Пусть $Q(t)$ – количество радиоактивного вещества в момент времени t после начала распада. За время Δt распадается $Q(t)-Q(t+\Delta t)$ вещества. В соответствии с законом радиоактивного распада имеем $\dfrac{Q(t)-Q(t+\Delta t)}{\Delta t}=kQ(t),$ где k – коэффициент пропорциональности. Переходя в данном равенстве к пределу при $\Delta t \to 0,$ получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dQ}{dt} = -kQ,$ решая которое, находим $Q(t) = Ce^{-kt},$ где C – произвольная постоянная.

Пусть первоначальное количество вещества равно Q_0. Тогда из начального условия $Q(0) = Q_0$ находим, что $C = Q_0$ и $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$. По условию задачи $0,5Q_0 = Q_0 e^{-30k}$, откуда $k = \dfrac{1}{30}\ln 2.$ Наконец, из условия $0,01Q_0 = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{30}t}$ получаем $t = \dfrac{\ln 100}{\ln 2}\cdot 30 \approx 199$ дней – время, по истечении которого останется лишь 1 % первоначального количества вещества.

Ниже приведено решение этой задачи с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

$DSolve\left[\{Q'[t] == -kQ[t], Q[0] == Q0\}, Q[t], t\right]$, Out: $Q[t] \to e^{-kt}Q0$.

$Solve\left[\mathrm{e}^{-kt}Q_0 == 1/2Q_0, k, Reals\right] /.t->30$, Out: $k \to \dfrac{\log[2]}{30}$.

$Solve\left[\mathrm{e}^{-kt}Q_0 == \dfrac{1}{100}Q_0, t, Reals\right] //Simplify$, Out: $t \to \dfrac{\log[100]}{k}$.

$t \to \dfrac{\log[100]}{k} /.k \to \dfrac{\log[2]}{30}$, $N[\%]$, Out: $t \to \dfrac{30\log[100]}{\log[2]}$, $t \to 199.31568$.

$k = \dfrac{\log[2]}{30};$ $Q_0 = 1;$ $Plot\left[\{\mathrm{e}^{-kt}Q_0, \mathrm{e}^{-kt}*1.5, \mathrm{e}^{-kt}*0.5\}, \{t, 0, 200\},\right.$
$\left.\mathrm{PlotLegends} -> \{\mathrm{e}^{-kt}Q_0, \mathrm{e}^{-kt}*1.5, \mathrm{e}^{-kt}*0.5\}, \mathrm{AxesLabel} -> \{t, Q[t]\}\right]$.

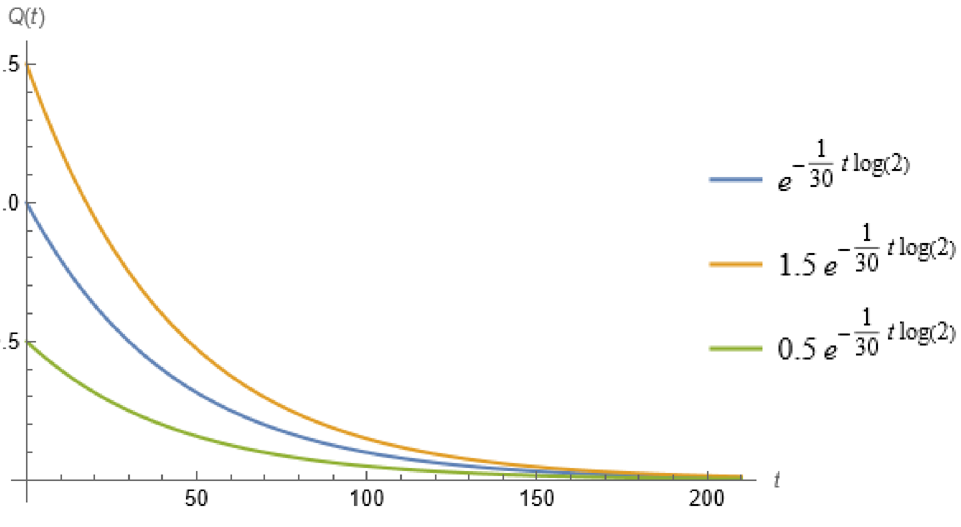

Рис. 1. Процесс распада радиоактивного вещества во времени (0-200 дней)

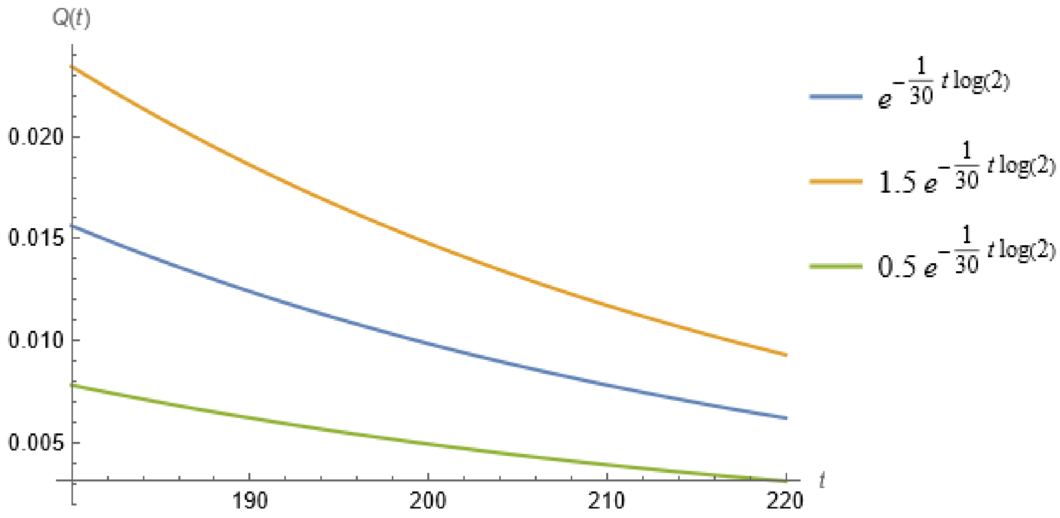

Рис. 2. Процесс распада радиоактивного вещества во времени (180-220 дней)

На рисунках 1 – 2 изображены графики, отображающие процесс распада радиоактивного вещества с течением времени.

Рассматриваются также задача о скорости фильтрации химического раствора и задача о равновесии содержания глюкозы в организме.

Заключение

Следует отметить, что решение практико-ориентированных задач, связанных с направлением будущей специальности студентов, значительно активизирует их интерес к получению прочных математических знаний. Демонстрация возможностей компьютерных технологий для решения прикладных задач позволяет уже на ранних этапах обучения по избранной специальности формировать профессиональные компетенции.

Библиографические ссылки

1. *Коваленко Н. С.* Практикум по высшей математике для студентов химических специальностей: учеб.-метод. пособие / Н. С. Коваленко, М. Н. Василевич, В. И. Яшкин. – Минск: БГУ, 2021. – 279с.