него сотрудничества с лабораториями алгебраического профиля Института математики АН БССР кафедра видит залог успехов в научных исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. См.: Боголюбов Н. Н.— В сб.: Октябрь и наука. М., 1977.
2. Нисневич В. Л.— Матем. сб., 1940, т. 8, с. 395.
3. Залесский А. Е., Конюх В. С. Алгебра и алгебраическая геометрия в работах математиков Белоруссии.— Минск, 1979.
4. Козел П. Т.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 63.
5. Тышкевич Р. И.— Матем. сб., 1975, т. 97, № 2, с. 262.
6. Мельников О. И.— Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук, 1976, № 3, с. 19.
7. Мельников О. И.— Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук, 1978, № 5, с. 134.
8. Мельников О. И., Шафранский Я. М.— Кибернетика, 1979, № 5, с. 53.
9. Бондаренко А. А.— Матем. сб., 1977, т. 102, № 2, с. 155.
10. Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.— Докл. АН БССР, 1978, т. 22, № 5, с. 397.
11. Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 1, с. 28.
12. Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979, т. 43, № 3, с. 603.
13. Платонов В. П., Бондаренко А. А., Рапинчук А. С.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1980, т. 44, № 2, с. 395.
14. Бондаренко А. А.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 9, с. 773.
15. Шаромет А. А.— Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук, 1976, № 3, с. 5.
16. Липницкиий В. А.— Матем. заметки, 1978, т. 25, № 5, с. 629.
17. Тишин Ю. В.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 7, с. 581.
18. Тишин Ю. В. Там же, с. 7.
19. Тишин Ю. В.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 4, с. 297.
20. Матвеев Г. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 60.
21. Ширяев В. М.— Semigroup Forum, 1976, v. 2, p. 149.
22. Ширяев — Semigroup Forum, 1979, v. 17, p. 201.
23. Ширяев В. М.— Изв. вузов СССР. Матем., 1977, № 5, с. 125.

Кафедра высшей алгебры

УДК 518.5

Л. Н. БАТУРИНА, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ СЕТИ

Пусть $G=(N, A, c)$ — сеть, у которой N — множество вершин с выделенным источником s и стоком t, А — множество ориентированных дуг вида (x_i, x_j) с заданными целочисленными неотрицательными пропускными способностями c_{ij}. Для данной сети любым из известных методов найдем максимальный поток из s в t. Пусть величина этого потока — V и соответствующие дуговые потоки — $f_{ij}\geqslant 0$. Предположим, что на одной из дуг $(x_{i_0}, x_{j_0})\in A$ значение пропускной способности уменьшено до $c'_{i_0j_0}$ так, что $0\leqslant c'_{i_0j_0}< f_{i_0j_0}$. Обозначим новую сеть $G'=(N, A, c')$. Рассмотрим задачу эффективного определения величины максимального потока в сети $G'=(N, A, c')$ с использованием информации о максимальном потоке в исходной сети $G=(N, A, c)$. Будем придерживаться терминологии из [1].

Для любой дуги (x_i, x_j) исходной сети, не принадлежащей минимальному разрезу, который отделяет s от t, найдем минимальное значение пропускной способности c^*_{ij}, при котором величина V сохраняется. Для этого можно использовать следующую модификацию алгоритма [2] определения максимального потока в сети.

Алгоритм *А*. 1. Построение начального потока. На одном или нескольких путях из x в t уменьшаем потоки, соответствующие величине V, в общей сложности на f_{ij}.

2. Расстановка пометок. Вершине x_i присваиваем пометку $(+x_i,$

$\delta(x_i) = \infty$). Далее предполагаем, что вершина x_j не может помечаться непосредственно из x_i. Просмотр вершин и расстановку пометок можно производить так же, как и при решении задачи о допустимой циркуляции [2].

3. Расстановка пометок заканчивается в одном из трех случаев: а) помечена вершина t; б) помечена вершина x_j; в) вершина t (или x_j) не помечена и никаких других пометок расставить нельзя. В случаях а) и б) увеличиваем поток на найденном пути соответственно на значение δ_k, равное $\delta(t)$ или $\delta(x_j)$, и этап 2 повторяем. В случае в) алгоритм заканчивает работу.

Вычисляем значение c по формуле: $c = f_{ij} - f'_{ij}$,

где $f'_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{l} \delta_k$ и l — число проведенных этапов при расстановке пометок.

Покажем, что $c = c^*_{ij}$. В результате применения алгоритма A определяется величина потока f'_{ij}, которую можно добавить на всех обходных увеличивающих поток путях от x_i до t и от x_i до x_j, получив после этого некоторый максимальный поток величины $v' \leqslant v$. Нетрудно видеть, что $v' = v - f_{ij} + f'_{ij}$. Для сохранения значения v необходимо, чтобы по дуге от x_i до x_j проходил поток величины $v - v' = f_{ij} - f'_{ij} = c$. Из-за отсутствия путей из x_i в t, увеличивающих поток, дальнейшее уменьшение потока по дуге (x_i, x_j) приведет к уменьшению величины v. Это и доказывает, что $c^*_{ij} = c$ и следовательно,

$$c^*_{ij} = f_{ij} - f'_{ij}. \tag{1}$$

Из сказанного следует также

Утверждение. Величина максимального потока в сети $G' = (N, A, c')$ равна

$$v' = \begin{cases} v - [c^*_{i_0j_0} - c'_{i_0j_0}] & \text{при } 0 \leqslant c'_{i_0j_0} < c^*_{i_0j_0}; \\ v & \text{при } c^*_{i_0j_0} \leqslant c'_{i_0j_0} \leqslant f_{i_0j_0}, \end{cases}$$

где $c^*_{i_0j_0}$ определяется по формуле (1).

Пусть $\Gamma(x_k)$ и $\Gamma^{-1}(x_k)$ — соответственно множество концов и начал дуг, инцидентных вершине x_k, $c_k = \min\left(\sum\limits_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_k)} c_{ik}, \sum\limits_{x_j \in \Gamma(x_k)} c_{kj}\right)$ — пропускная способность вершины x_k сети $G = (N, A, c)$; $f_k = \sum\limits_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_k)} f_{ik} = \sum\limits_{x_j \in \Gamma(x_k)} f_{kj}$ — величина потока через вершину x_k сети $G = (N, A, c)$. Предположим, что для некоторой вершины x_{k_0} сети $c'_{k_0} = 0$. Обозначим такую сеть через $G'' = (N', A', c')$.

Следствие. Величина максимального потока в сети $G'' = (N', A', c')$ равна $v' = v \sum\limits_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_{k_0})} c^*_{ik_0}$, где величины $c^*_{ik_0}$ определяются по формуле (1).

Используем алгоритм A для определения значений $c^*_{ik_0}$, при которых дуги (x_i, x_{k_0}) (где $x_i \in \Gamma^{-1}(x_{k_0})$) одновременно войдут в минимальный разрез, соответствующий потоку величины v. При этом поток уменьшаем в общей сложности на f_{k_0} на путях из s в t, которые проходят через вершины $x_i \in \Gamma^{-1}(x_{k_0})$ и $x_j \in \Gamma(x_{k_0})$. Расстановка пометок производится в предположении, что вершина x_{k_0} не может помечаться непосредствено из вершин множества $\Gamma^{-1}(x_{k_0})$. Случай б) как признак окончания этапа 2 алгоритма понимается для любой вершины $x_j \in \Gamma(x_{k_0})$. Алгоритм применяется последовательно шаг за шагом для определения значений $c^*_{ik_0}$ дуг вида (x_i, x_{k_0}) в любом порядке. При этом достигнутые на предыдущих шагах значения дуговых потоков принимаются в качестве начальных значений на очередном шаге.

На основе приведенного утверждения и следствия из него можно построить алгоритм B определения величины максимального потока в сети $G'=(N, A, c')$ или $G''=(N', A', c')$. Отличие его от алгоритма A состоит в том, что в новой сети необходимо определять обходные пути, увеличивающие поток, до тех пор пока не будет впервые достигнуто условие $\sum_{k=1}^{l}\sigma_k \geqslant f_{i_0j_0} - c'_{i_0j_0}$ для сети $G'=(N, A, c')$ или условие $\sum_{i\in\Gamma^{-1}(x_{k_0})}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij} \geqslant f_{k_0}$ для сети $G''=(N', A', c')$.

Пусть (x_i, x_j) — дуга сети $G=(N, A, c)$, $f_{ij}=c_{ij}$, $c_{ij}^{**}\geqslant c_{ij}^{*}$ — значение пропускной способности дуги (x_i, x_j), при котором возможно максимальное увеличение величины v при условии сохранения пропускных способностей остальных дуг сети.

Легко видеть, что задача определения значения c_{ij}^{**} для дуги (x_i, x_j) сводится к нахождению всех увеличивающих поток путей от s до x_i и от x_j до t. Тогда, если на путях от s до x_i можно добавить поток величины δ_1, а на путях от x_j до t величины δ_2, то

$$c_{ij}^{**}=c_{ij}+\sigma, \tag{2}$$

где $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$.

Для определения значений δ_1 и δ_2 используем следующий

Алгоритм C. 1. Начальный поток на дугах сети соответствует найденному максимальному потоку.

2. Расстановка пометок. 1-й шаг. Вершине x_j присваиваем пометку $(+x_j, \delta(x_j)=\infty)$. Полагаем, что вершина x_i не может помечаться непосредственно из x_j. Далее просмотр вершин, расстановка пометок и процесс окончания расстановки пометок производится, как и в алгоритме определения максимального потока.

Вычисляем $\delta_2=\sum_{k=1}^{l}\delta_k$, где l — число проведенных этапов при расстановке пометок. 2-й шаг. Вершине x_i присваиваем пометку $(+x_i, \delta(x_i)=\infty)$. Процесс расстановки осуществляется для вершин $x_j\in\Gamma^{-1}(x_l)$, у которых $f_{jl}<c_{jl}$. Процесс расстановки пометок заканчивается, если помечена вершина s, или вершину s пометить нельзя. Вычисляем $\delta_1=\sum_{k=1}^{m}\delta_k$, где m — число проведенных этапов при расстановке пометок.

Из-за того, что начальные потоки в алгоритмах A, B, C равны максимальному или близки к нему и что процесс расстановки пометок охватывает лишь часть вершин сети, предложенные алгоритмы A, B, C эффективнее, чем алгоритм определения максимального потока, применяемый непосредственно на сети G' или G''.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход.— М., 1978.
2. Форд П. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях.— М., 1962.

Кафедра математического обеспечения АСУ