приводит к оптимальному управлению $u^0(t) = 1$, $t \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, $u^0(t) = 0$, $t \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

Значительно сложнее оптимальное управление для $t_1 = 4\pi$:

$$u^0(t) = 1,\ t \in \left[0,\ \pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left[2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\right.$$

$$\left.3\pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left[4\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\ 4\pi\right],\ u^0(t) = 0,$$

$$t \in \left[\pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\ 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left[3\pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\right.$$

$$\left.4\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

Оптимальная траектория на фазовой плоскости для этого случая изображена на рис. 1. Следует отметить, что общее время движения с $u = 0$ меньше, чем для случая $t_1 = 2\pi$.

При $t_1 \to \infty$ полное время движения с $u = 0$ уменьшается. Этот факт физически особенно интересен, если его перевести на язык задачи (5).

Качественный вид оптимальных траекторий при больших t_1 приведен на рис. 2. Результаты для больших значений получаются продолжением по параметру t_1 предыдущего решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М., 1961.
2. Беллман Р. Динамическое программирование.— М., 1960.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления.— Минск, 1974.
4. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М., 1978.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М., 1972.
6. Айзекс Р. Дифференциальные игры.— М., 1967.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М., 1974.
8. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления.— М., 1971.
9. Данциг Дж. Линейное программирование, его приложения и обобщения.— М., 1966.
10. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования: Ч. 1—3.— Минск, 1977, 1978, 1980.

Кафедра методов оптимального управления

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ С УЛУЧШЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ СОГЛАСОВАННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧ

При построении методов численного решения задачи Коши для системы уравнений вида

$$u_i' = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m),\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

обычно наряду с традиционными требованиями аппроксимации стараются удовлетворить также ряд дополнительных требований, порождаемых специфическими особенностями рассматриваемой системы. Например, в случае так называемых жестких систем [1], характеризующихся большим разбросом собственных значений матрицы Якоби, приходится уделять особое внимание проблеме согласования по устойчивости дифференциальных и соответствующих разностных уравнений. Часто высокий уровень такой согласованности оказывается предпочтительнее высокого порядка аппроксимации, если, конечно, эти требования вступают в противоречие.

Для проверки свойств устойчивости системы разностных уравнений, порождаемой избранным численным методом, обычно прибегают к помощи модельной системы

$$u' = Au, \tag{2}$$

где $A = \{a_i^j\}$ — квадратная матрица порядка m, собственные значения λ_k которой имеют отрицательные вещественные части. Следуя Дальквисту [2], численный метод при этом называют A-устойчивым, если применительно к (2) при любом постоянном шаге $\tau > 0$ он приводит к системе разностных уравнений, все решения которой, как и решения дифференциальной системы (2), при $t \to \infty$ асимптотически выходят на нулевое положение равновесия.

Одним из существенных недостатков известных (см., например, [1—3]) A-устойчивых методов являются трудности их численной реализации. Актуальна поэтому задача построения таких A-устойчивых методов, которые в ряде случаев могут допускать более простую реализацию, а также разработка новых способов численной реализации неявных A-устойчивых методов. При построении подобных вычислительных алгоритмов, предназначенных для более узких классов жестких систем, часто бывает целесообразным также ослабление или усиление требования A-устойчивости.

Некоторые новые результаты в этих направлениях поиска будут приведены и в данной работе.

Поскольку избранная модельная система (2) не отражает непосредственной зависимости от t правых частей уравнений (1), для простоты записей в дальнейшем мы будем и исходную систему дифференциальных уравнений считать автономной:

$$u' = f(u). \tag{3}$$

Запишем применительно к (3) как обобщение одношагового метода из [4] следующее семейство неявных методов, зависящих от параметра $\sigma > 0$:

$$\hat{y} = y + \tau R f(y), \tag{4}$$

где $y \approx u(t)$, $\hat{y} \approx u(t+\tau)$, $R = \mathrm{diag}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$,

$$\rho_i = \frac{f_i(\hat{y})}{f_i(\hat{y}) + \sigma\,(f_i(y) - f_i(y + \tau f(\hat{y})))}.$$

Методы вида (4) можно рассматривать в качестве нелинейного аналога известных линейных методов с весами [5]

$$\hat{y} = y + \tau\,((1-\sigma) f(y) + \sigma f(\hat{y})). \tag{5}$$

В случае $\sigma = 0$ методы (4) и (5) вырождаются в явный метод Эйлера. При $\sigma = 1/2$ оба метода имеют второй порядок точности и характеризуются сходными свойствами согласованности дифференциальной и разностной задач (см., например, $m = 1$ [4]). Наибольший интерес здесь представляет случай $\sigma = 1$. Из семейства (5) в этом случае выделяется неявный метод Эйлера

$$\hat{y} = y + \tau f(\hat{y}), \tag{6}$$

который обладает свойством A-устойчивости. Легко видеть, что решение $\hat{y}$ системы (6) удовлетворяет также и системе уравнений (4) с $\sigma = 1$. При этом, однако, численная реализация метода (4) с $\sigma = 1$ способом простых итераций имеет определенные преимущества перед подобной реализацией метода (6).

Будем считать, например, матрицу A системы (2) отрицательно определенной, а ее собственные значения λ_k различными. Тогда любое решение этой системы можно [6] представить в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \xi^k \exp(\lambda_k t), \tag{7}$$

где ξ^k, $k=1, 2, \ldots, m$,— ортонормированные собственные векторы матрицы A, а c_k, $k=1, 2, \ldots, m$,— произвольные постоянные.

Вектор

$$\gamma^k(t) = \xi^k \exp(\lambda_k t) \tag{8}$$

является, очевидно, решением системы (2), удовлетворяющим начальному условию $u(0)=\xi^k$. Такое решение часто называют k-й гармоникой системы (2).

В силу (7) любое решение системы (2) есть линейная комбинация ее гармоник. Поэтому важной характеристикой метода является его способность сохранять основные свойства гармоник.

Оказывается, что явный метод, получающийся из (4) с $\sigma=1$ при конечном числе простых итераций с $\hat{y}^0=y$, устойчив на каждой гармонике вида (8) системы (2) для любого $\tau>0$ (обладает свойством спектральной устойчивости). Например, в случае одной итерации имеем

$$\hat{y}_i = y_i + \tau \sum_{j=1}^{m} a_i^j y_j \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j y_j}{2\sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j y_j - \sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j \left(y_j + \tau \sum\limits_{s=1}^{m} a_j^s y_s\right)}.$$

Если положить $y=\xi^k$ и учесть, что $A\xi^k=\lambda_k\xi^k$, то последнее равенство можно привести к виду

$$\hat{y}_i = \xi_i^k + \tau\lambda_k\xi_i^k \frac{\lambda_k\xi_i^k}{2\lambda_k\xi_i^k - \sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j\left(\xi_j^k + \tau\lambda_k\xi_j^k\right)} = \xi_i^k \frac{1}{1-\lambda_k\tau}.$$

где, как и выше, нижним индексом обозначен номер координаты соответствующего вектора.

Отсюда следует, что рассматриваемый метод для любого $\tau>0$ выводит, при этом монотонно, каждую из гармоник (8) на нулевое положение равновесия.

Реализация же метода (6) способом простых итераций таким свойством не обладает.

Можно предложить методы, которые еще лучше обрабатывают гармоники вида (8). Один из способов получения таких вычислительных правил основан на регуляризации многомодульных методов, построенных по принципу последовательного повышения порядка точности [7]. В качестве простейшего примера приведем здесь следующий метод второго порядка точности:

$$y^* = y + \frac{1}{2}\tau R^* f(y), \quad \hat{y} = y + \tau R f(y^*), \tag{9}$$

где $R^* = \operatorname{diag}\{\rho_1^*, \rho_2^*, \ldots, \rho_m^*\}$, $R = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_1, \ldots, \rho_m\}$,

$$\rho_i^* = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z_i}, \quad \rho_i = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z_i\right)^2}{1-z_i+\frac{1}{2}z_i^2},$$

$$z_i = \frac{f_i(y+\tau f(y)) - f_i(y)}{f_i(y)}.$$

Если в случае метода (4) с $\sigma=1$ при нахождении гармоники (8) множитель $\exp(\lambda_k\tau)$ аппроксимировался отношением $\frac{1}{1-\lambda_k\tau}$ с погрешностью порядка τ^2, то в методе (9) такое приближение осуществляется посредством выражения $\dfrac{1}{1-\lambda_k\tau+\frac{1}{2}\lambda_k^2\tau^2}$ с ошибкой порядка τ^3.

Аналогично строятся и методы более высоких порядков точности с подобной же устойчивой аппроксимацией экспоненты.

В развитие последнего требования можно построить примеры явных методов, которые вообще точны на гармониках (8). Простейший из таких методов имеет вид

$$\hat{y}=y+\tau Rf(y), \tag{10}$$

где $R=\mathrm{diag}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$, $\rho_i=\dfrac{\exp z_i-1}{z_i}$, при этом z_i может быть вычислено, например, как и в случае метода (9).

Если в (9) для нахождения ρ_i^* и ρ_i использовать выражения

$$\rho_i^*=2\,\frac{\exp\left(\frac{1}{2}z_i\right)-1}{z_i}, \quad \rho_i=\frac{\exp z_i-1}{z_i\exp\left(\frac{1}{2}z_i\right)}, \tag{11}$$

то получим новый пример метода, точного на гармонике вида (8) и обладающего вторым порядком точности на произвольном решении исходной системы.

Нетрудно построить подобные методы и более высоких порядков точности.

Сходную регуляризацию можно провести и в случае неявных методов разных порядков точности. Простейший пример подобного метода имеет вид

$$\hat{y}=y+\tau Rf(\hat{y}), \tag{12}$$

где

$$R=\mathrm{diag}\{\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_m\}, \ \rho_i=\frac{\exp z_i-1}{z_i\exp z_i}=\frac{1-\exp(-z_i)}{z_i},$$

при этом в дополнение к указанному ранее способу вычисления z_i здесь можно предложить, например, и следующие нелинейные выражения для z_i через искомые величины $\hat{y}_j$ $(j=1, 2, \ldots, m)$:

$$z_i=\frac{f_i(y+\tau f(\hat{y}))-f_i(y)}{f_i(\hat{y})}, \ z_i=\tau\,\frac{f_i(\hat{y})-f_i(y)}{\hat{y}_i-y_i}.$$

Как и методы (10) и (9), (11), метод (12) при любом $\tau>0$ точно решает модельное уравнение (2) в случае $m=1$. Кроме того, он устойчив на произвольном решении модельной системы (2) при $m>1$.

Действительно, так как в случае этого метода $\rho_i>0$ как для $z_i<0$, так и для $z_i>0$, матрица R, как и матрица $-A$, положительно определена. Поэтому собственные значения матрицы $-RA$ положительны, и, следовательно, спектр матрицы $S=(E-\tau RA)^{-1}$ при любом $\tau>0$ принадлежит открытому отрезку (0, 1). Так как справедливо (см. (12)) соотношение $\hat{y}=Sy$, то тем самым при любом $\tau>0$ будет обеспечен выход приближенного решения, полученного по методу (12), на нулевое положение равновесия системы (2).

Метод (12), как и любой другой неявный метод, должен быть дополнен способом его численной реализации, который, по возможности, не нарушал бы достигнутых свойств устойчивости. В качестве подобного способа можно предложить, например, квазиньютоновский метод решения систем нелинейных уравнений, основанный на псевдообращении матриц (см. [8]). Этот способ характерен тем, что не требует (как метод Ньютона, например) на каждом шаге итераций формирования и непосредственного обращения якобиана, при этом произвольной линейной системе m алгебраических уравнений он доставляет точное решение не более чем за $m+1$ итераций, сохраняя, таким образом, при числе итераций $N=m+1$ свойство A-устойчивости избранного неявного метода, приводящего в случае (2) к линейной системе уравнений относительно неизвестного вектора $\hat{y}$. При $N<m+1$ такой способ (подобно рассмотренному способу численной реализации неявного метода (4) с $\sigma=1$) сохраняет свойство спектральной устойчивости исходного неявного метода.

В заключение отметим, что предлагаемые здесь методы могут быть использованы также при построении разностных схем с расширенной областью устойчивости в случае граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем.— М., 1979.
2. Dahlquist G.— BJT, 1963, v. 3, p. 27.
3. Артемьев С. С., Демидов Г. В.— В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики.— Новосибирск, 1975, с. 214.
4. Бобков В. В.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 5, с. 406.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М., 1969.
7. Бобков В. В.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1967, № 4, с. 27.
8. Бобков В. В., Городецкий Л. М.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1980, № 4, с. 14.

Кафедра вычислительной математики

УДК 512

А. А. БОНДАРЕНКО

АЛГЕБРА И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В РАБОТАХ МАТЕМАТИКОВ БГУ ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА

Алгебра и алгебраическая геометрия относятся к наиболее интенсивно развивающимся разделам математики. Для современной математики характерен процесс непрерывного обновления благодаря постоянному притоку новых глубоких идей обобщающего характера. В этом процессе одна из главных ролей принадлежит алгебре. За последние 15—20 лет сформировалась и завоевала признание белорусская алгебраическая школа, имеющая к настоящему времени ряд значительных достижений, которые получили большой резонанс как в нашей стране, так и за рубежом.

Акад. АН СССР Н. Н. Боголюбов в статье «О достижениях советской математики» охарактеризовал в обобщенной форме основные результаты математических исследований, проведенных в Белоруссии: «За последние годы удалось не только преодолеть отставание в алгебраической K-теории, имеющей многочисленные применения в топологии и алгебраической геометрии, но и получить наиболее существенные в мире результаты в этой области.

Важный прогресс достигнут в теории линейных групп, где разработан общий метод исследования, основанный на применении алгебро-геометрических и теоретико-числовых идей, позволивший решить ряд известных задач (ИМ АН БССР)*. Дальнейшее развитие этого метода как в нашей стране, так и за рубежом сделало его основным методом теории линейных групп.

В теории классических групп существовала гипотеза о тривиальности спинорной нормы унитарной группы над некоммутативным телом. В 1974 г. с помощью метода локально компактных локализаций было показано, что спинорная норма не может быть тривиальной (ИМ АН БССР)» [1].

Н. Н. Боголюбов отмечает, что в области алгебраической геометрии

* Институт математики АН БССР.