Здесь $\Theta_t = \frac{a}{t} \rho_t + 2\left(1 - \frac{a}{t}\right) l(t-1) r(t)$; $\beta_l = \frac{l}{l-1}(1 - a/l)^2$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия

$$\gamma_t = a/t \quad a \geqslant 1, \ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^{t} \rho_k = 0. \tag{32}$$

Для того чтобы оценка (18) была состоятельной, достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{k=2}^{t} (k-a) l(k-1) r(k) = 0. \tag{33}$$

При доказательстве (33) существенно используется тот факт, что при $a \geqslant 1, \ k < t \quad \prod_{l=k+1}^{t} \beta_l \leqslant \frac{k}{t}$.

Заметим, что при $a=1$ (12) превращается в выборочное среднее, а (33) в известное условие состоятельности выборочного среднего при коррелированных наблюдениях:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{k=2}^{t} \sum_{l=1}^{k-1} \rho(l, k) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Albert A, Sittler R. W.— J. SIAM Control, 1966, Ser. A, v. 3, N 3, p. 384.
2. Аведьян Э. Д.— Автоматика и телемеханика, 1975, № 5, с. 67.
3. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающих систем.— М., 1970.
4. Медведев Г. А., Хацкевич Г. А.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 8, с. 69.
5. Медведев Г. А.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 5, с. 110.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 517.544.8.545

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ И ОТОБРАЖЕНИЕ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Пусть M — конечная ориентируемая риманова поверхность рода $h \geqslant 0$ с гладким краем ∂M, который предположим связным и ориентированным. Пусть $\alpha(t)$ — изменяющий ориентацию гомеоморфизм края ∂M на себя, удовлетворяющий тождеству $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ и такой, что дифференциал $d\alpha(t)$ H-непрерывен и нигде не обращается в нуль.

Задача Карлемана в ее простейшей постановке (задача о скачке) требует нахождения всех функций $\Phi(z)$, аналитических на $M \setminus \partial M$, H-непрерывно продолжимых на ∂M, где должно выполняться краевое условие:

$$\Phi[\alpha(t)] - \Phi(t) = g(t), \quad t \in \partial M. \tag{1}$$

Здесь $g(t)$ — заданная Н-непрерывная функция, удовлетворяющая тождеству $g[\alpha(t)] + g(t) \equiv 0$ на ∂M.

С точки зрения разрешимости задача (1) полностью исследована [1]; ее разрешимость равносильна выполнению равенств

$$\int_{\partial M} g(t)\, d\Psi[\alpha(t)] = 0, \tag{2}$$

где $d\Psi$ — любой аналитический на $M \setminus \partial M$ дифференциал, H-непрерывно продолжимый на ∂M, где должно выполняться равенство

$$d\Psi(t) = d\Psi[\alpha(t)]. \tag{3}$$

Если условия (2) выполнены, то задача (1) разрешима, а ее общее решение равно любому ее частному решению плюс произвольная комплексная постоянная.

Задача (3) имеет h линейно независимых решений, и, таким образом, условия (2) можно записать в виде системы h независимых уравнений. Если $h=0$, то задача (1) разрешима безусловно.

Проблема вычисления решений задачи (1) связана с проблемой вычисления основных функционалов замкнутой римановой поверхности S, полученной из M с помощью локально-конформного склеивания точек t и $\alpha(t)$ края.

Если $M \subset R$, где R — замкнутая риманова поверхность, основные функционалы которой известны, то задачу (1) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма и тем самым получить некоторый способ построения ее решений. Этот подход позволяет дать эффектное решение некоторых задач отображения круговых многоугольников, не требующее вычисления аксцессорных параметров [2] и поэтому представляющее не только практический, но и теоретический интерес.

2. Пусть $R=\hat{C}$ — расширенная комплексная плоскость; $M \setminus \partial M$ — односвязная область, содержащая точку ∞. Функцию $\Phi(z)$, аналитическую на $M \setminus \partial M$ и H—непрерывно продолжимую на ∂M, можно искать в виде интеграла типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+C, \tag{4}$$

с неизвестной плотностью $\varphi(t)$, удовлетворяющей тождеству $\varphi(t)+\varphi[\alpha(t)]\equiv 0$. В самом деле, при $t \in \partial M$ имеем

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\varphi(t), \quad \Phi^{+}[\alpha(t)]-\Phi^{-}[\alpha(t)]=\varphi[\alpha(t)]. \tag{5}$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\varphi(t)+\varphi[\alpha(t)]\equiv 0$, имеем

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)+\Phi^{+}[\alpha(t)]-\Phi^{-}[\alpha(t)]\equiv 0$$

или

$$\Phi^{+}[\alpha(t)]+\Phi^{+}(t)=\Phi^{-}[\alpha(t)]+\Phi^{-}(t).$$

Считая правую часть известной, получаем относительно функции $\Phi^{+}(z)$ задачу Карлемана, которая, как известно [3], разрешима безусловно. Тогда $\varphi(t)$ можно вычислить по формуле (4).

С помощью представления (4) сведем задачу (1) к интегральному уравнению. Имеем:

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+C,$$

$$\Phi^{-}[\alpha(t)]=-\frac{1}{2}\varphi[\alpha(t)]-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}\frac{\varphi[\alpha(\tau)]\,\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}\varphi(\tau)\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau+C.$$

Подставляя найденные предельные значения в краевое условие (1), получаем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}\varphi(\tau)\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}\right]d\tau=g(t),\ t\in\partial M, \tag{6}$$

которое вместе с условием $\varphi(t)+\varphi[\alpha(t)]\equiv 0$ равносильно задаче (1).

Уравнение (6) имеет единственное решение при любой правой части. Оно может быть использовано для приближенного решения задачи (1).

3. Применим теперь задачу Карлемана (1) и равносильное ему интегральное уравнение (6) для решения модельной задачи. Пусть требуется построить функцию $F(z)$, реализующую конформное отображение области $\{|z|>1, \operatorname{Im} z>0\}$ (рис. 1) на верхнюю полуплоскость. Отображающая функция F есть известная функция Жуковского $F(z)=\lambda(z+z^{-1})$, но мы здесь ее вычислим с целью иллюстрации метода.

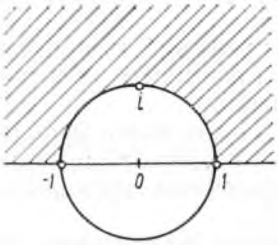

Рис. 1

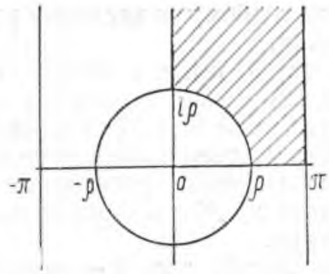

Рис. 2

В качестве M возьмем множество $\{|z|>1\}$. Граница ∂M — окружность $|t|=1$, ориентированная против часовой стрелки.

Введем функцию сдвига $\alpha(t)=\bar{t}$. Отображающая функция удовлетворяет следующему краевому условию:

$$F(\bar{t})=F(t), \quad |t|=1. \tag{7}$$

Это следует из принципа симметрии. Если считать, что $F(\infty)=\infty$, $F(i)=0$, $F(z)\sim z$ при $z\to\infty$, то отображающая функция этими условиями определена однозначно. Полагая $F(z)=\Phi(z)+\frac{1}{z}$, из (7) получим задачу Карлемана для функции Φ:

$$\Phi(\bar{t})-\Phi(t)=t-\bar{t}, \; |t|=1. \tag{8}$$

Преобразуем ядро интегрального уравнения (6), полагая $\alpha(t)=\bar{t}=\frac{1}{t}$; $\alpha'(t)=-\frac{1}{t^2}$:

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}=-\frac{1}{\tau^2\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{t}\right)}-\frac{1}{\tau-t}=-\frac{1}{\tau}.$$

Таким образом, интегральное уравнение (6) в нашем случае приводится к виду:

$$\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau=t-\frac{1}{t}, \; |t|=1.$$

Обозначая $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau=\mu$, имеем:

$$\varphi(t)=\mu+t-\frac{1}{t}, \quad \mu=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\left(\mu+t-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}=\mu.$$

Из условия $\varphi(\bar{t})+\varphi(t)\equiv 0$ находим $\mu=0$. Таким образом,

$$F(z)=z+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=1}\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau-z}+C=z+\frac{1}{z}+C.$$

Из условия $F(i)=0$ находим $C=0$. Таким образом, $F(z)=z+z^{-1}$ — функция Жуковского (с точностью до множителя).

4. Пусть $0<\rho<\pi$ и требуется построить функцию $F(z)$, реализующую конформное отображение кругового четырехугольника $\{0<\operatorname{Re} z<\pi$, $\operatorname{Im} z>0$, $|z|>\rho\}$ (рис. 2) на верхнюю полуплоскость, причем $F(\infty)=\infty$, $F(i\rho)=0$. При такой нормировке отображающая функция существует и определяется с точностью до положительного множителя. Продолжая ее по принципу симметрии через прямолинейные участки границы данной области, получим 2π-периодическую функцию $F(z)$, фундаментальной областью которой является полоса $|\operatorname{Re} z|<\pi$, из которой выброшен круг $|z|<\rho$, причем на окружности должно выполняться условие: $F(\bar{t})=F(t)$.

Полагая $\alpha(t)=\bar{t}$, будем искать решение задачи в виде $F(z)=\Phi(z)-\cos z$, и тогда для нахождения 2π-периодической функции $\Phi(z)$ получим краевую задачу Карлемана

$$\Phi[\alpha(t)]-\Phi(t)=\cos\alpha(t)-\cos t, \quad |t|=\rho. \tag{9}$$

Решение этой задачи ищем в виде:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{\varphi(\tau)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}\,d\tau+C(\rho), \tag{10}$$

где $\varphi(\tau)+\varphi[\alpha(\tau)]\equiv 0$. Задача (9) равносильна интегральному уравнению

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{\varphi(\tau)}{2}\left[\alpha'(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right]d\tau=\cos\alpha(t)-\cos t, \tag{11}$$

с дополнительным условием $\varphi(t)+\varphi[\alpha(t)]\equiv 0$.

Подставляя в уравнение (11) $\alpha(t)=\overline{t}=\frac{\rho^2}{t}$, $\alpha'(t)=-\frac{\rho^2}{t^2}$, получим

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\varphi(\tau)\left[\frac{\rho^2}{2\tau^2}\operatorname{ctg}\frac{\rho^2}{2t\tau}(\tau-t)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right]d\tau=$$

$$=\cos\frac{\rho^2}{t}-\cos t, \tag{12}$$

и так как $\varphi(\overline{t})+\varphi(t)=0$, то $\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt=0$.

Для решения уравнения (12) разложим его ядро в ряд. Исходим из разложения:

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}z^{2k-1},\quad |z|<2\pi, \tag{13}$$

где B_{2k} — числа Бернулли. Используя это разложение, имеем:

$$\frac{\rho^2}{2\tau^2}\operatorname{ctg}\frac{\rho^2}{2\tau t}(\tau-t)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau-1}{2}=$$

$$=\frac{\rho^2}{\tau^2}\left[\frac{\tau t}{\rho^2(\tau-t)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\left(\frac{\rho^2(\tau-t)}{\tau t}\right)^{2k-1}\right]-\frac{1}{\tau-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}(\tau-t)^{2k-1}=$$

$$=\frac{1}{\tau-t}\left(\frac{t}{\tau}-1\right)-\frac{\rho^2}{\tau^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\frac{\rho^{2(2k-1)}}{\tau^{2k-1}t^{2k-1}}(\tau-t)^{2k-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}(\tau-t)^{2k-1}=-\frac{1}{\tau}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\left(1-\frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1}t^{2k-1}}\right)(\tau-t)^{2k-1}.$$

Учитывая, что $\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau=0$, перепишем уравнение (12) в следующем равносильном виде:

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\left(1-\frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1}t^{2k-1}}\right)(\tau-t)^{2k-1}\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\cos\frac{\rho^2}{t}-\cos t,\quad |t|=\rho. \tag{14}$$

В силу того, что отображающая функция $F(z)$ должна быть четной, легко сделать заключение о четности неизвестной функции $\varphi(t)$. Разлагая ее в ряд Лорана и замечая, что $\varphi(t)=-\varphi(\bar{t})=\varphi(-t)$, получаем

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j\left(\frac{t^{2j}}{\rho^{2j}}-\frac{\rho^{2j}}{t^{2j}}\right),\quad |t|=\rho. \tag{15}$$

Коэффициенты этого разложения должны стремиться к нулю при $j\to\infty$. Далее

$$\cos\frac{\rho^2}{t}-\cos t=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\rho^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}}-\frac{\rho^{2m}}{t^{2m}}\right). \tag{16}$$

Таким образом, уравнение (14) переписывается в виде:

$$\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\left(1-\frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1}t^{2k-1}}\right)(\tau-t)^{2k-1}\left(\frac{\tau^{2j}}{\rho^{2j}}-\frac{\rho^{2j}}{\tau^{2j}}\right)dt=$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\rho^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2n}}\right). \qquad (17)$$

Интегралы

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\left(1-\frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1}\,t^{2k-1}}\right)(\tau-t)^{2k-1}\left(\frac{\tau^{2j}}{\rho^{2j}}-\frac{\rho^{2j}}{\tau^{2j}}\right)d\tau \qquad (18)$$

вычислим с помощью вычетов, учитывая, что подынтегральная функция от τ имеет внутри круга $|\tau|<\rho$ полюс только при $\tau=0$. Преобразуем подынтегральную функцию интеграла (18) к виду:

$$\frac{\tau^{2j}(\tau-t)^{2k-1}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{4k-2j}(\tau-t)^{2k-1}}{\tau^{2(k-j)+1}\,t^{2k-1}} - \frac{\rho^{2j}(\tau-t)^{2k-1}}{\tau^{2j}} + \frac{\rho^{4k+2j}(\tau-t)^{2k-1}}{\tau^{2(k+j)+1}\,t^{2k-1}}.$$

Первое и последнее слагаемое имеют при $\tau=0$ нулевые вычеты, поэтому интеграл (18) приводится к виду:

$$-\frac{\rho^{4k-2j}}{t^{2k-1}}\,\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{(\tau-t)^{2k-1}}{\tau^{2k-2j+1}}\,d\tau - \frac{\rho^{2j}}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=\rho}\frac{(\tau-t)^{2k-1}}{\tau^{2j}}\,d\tau. \qquad (19)$$

Первый из этих интегралов отличен от нуля только при $1\leqslant 2k-2j+1\leqslant \leqslant 2k-1$, а второй — только при $2\leqslant 2j\leqslant 2k$. Оба неравенства дают $1\leqslant j\leqslant k$. При этом ограничении выражение (19) равно

$$-\frac{\rho^{4k-2j}}{t^{2k-1}}\,C_{2k-1}^{2k-2j}\,(-t)^{2j-1} - \rho^{2j}\,C_{2k-1}^{2j-1}\,(-t)^{2k-2j} =$$

$$= C_{2k-1}^{2k-2j}\left(\frac{\rho^{4k-2j}}{t^{4k-2j}} - \rho^{2j}\,t^{2k-2j}\right) = -\rho^{2k}\,C_{2k-1}^{2(k-j)}\left(\frac{t^{2(k-j)}}{\rho^{2(k-j)}} - \frac{\rho^{2(k-1)}}{t^{2(k-1)}}\right).$$

Подставляя найденное выражение в (17), получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m\left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}}-\frac{\rho^{2m}}{t^{2m}}\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\,\rho^{2k}\sum_{j=1}^{k-1}C_{2k-1}^{2j}\left(\frac{t^{2j}}{\rho^{2j}}-\frac{\rho^{2j}}{t^{2j}}\right) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\rho^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}}-\frac{\rho^{2m}}{t^{2m}}\right). \qquad (20)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}}-\frac{\rho^{2m}}{t^{2m}}\right)$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_{2k-1}^{2m}\,\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\,\rho^{2k}\varphi_{k-m} + (-1)^{m-1}\frac{\rho^{2m}}{(2m)!}, \qquad (21)$$

$$(0<\rho<\pi;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Перепишем эту систему в развернутом виде:

$$\left|\begin{aligned}
\varphi_1 &= \left(\frac{|B_4|}{4!}\,C_3^2\,\rho^4\,\varphi_1 + \frac{|B_6|}{6!}\,C_5^2\,\rho^6\varphi^2 + \frac{|B_8|}{8!}\,C_7^2\rho^8\varphi_3 + \ldots\right) + \frac{\rho^2}{2!},\\
\varphi_2 &= \left(\frac{|B_6|}{6!}\,C_5^4\rho^6\varphi_1 + \frac{|B_8|}{8!}\,C_7^4\rho^8\varphi_2 + \frac{|B_{10}|}{10!}\,C_9^4\,\rho^{10}\varphi_3 + \ldots\right) - \frac{\rho^4}{4!},\\
\varphi_3 &= \left(\frac{|B_8|}{8!}\,C_7^6\rho^8\varphi_1 + \frac{|B_{10}|}{10!}\,C_9^6\rho^{10}\varphi_2 + \frac{|B_{12}|}{12!}\,C_{11}^6\rho^{12}\varphi_3 + \ldots\right)\frac{\rho^6}{6!},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \qquad (22)$$

Мы покажем, что эта система вполне регулярна [4] и, следовательно, имеет единственное решение (φ_m), стремящееся к нулю, которое можно вычислить как методом итераций, так и методом редукции.

Полная регулярность системы означает, что существует $\theta(\rho)\in]0,\ 1[$ такое, что сумма модулей коэффициентов каждой строки матрицы системы (22) не превосходит $1-\theta(\rho)$, т. е.

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\,C_{2k-1}^{2m}\,\rho^{2k}\leqslant 1-\theta(\rho),\ (0<\rho<\pi;\ m=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (23)$$

Для доказательства этого неравенства используем разложение (13) и вводим функцию

$$f(\rho)=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\rho^{2k-1}, \tag{24}$$

где степенной ряд имеет радиус сходимости 2π. Так как все коэффициенты разложения (24) положительны, то при $0<\rho<2\pi$ все производные функции f также положительны. Исходя из (24), вычислим и оценим левую часть неравенства (23):

$$0<\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}C_{2k-1}^{2m}\rho^{2k}=\frac{f^{(2m)}(\rho)}{(2m)!}\rho^{2m+1}=$$

$$=1-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^{2m}}{(2m)!}\operatorname{ctg}^{(2m)}\frac{\rho}{2}\leqslant 1-\theta(\rho), \tag{25}$$

где обозначено

$$\theta(\rho)=\inf_{m}\left\{\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^{2m}}{(2m)!}\operatorname{ctg}^{(2m)}\frac{\rho}{2}\right\}. \tag{26}$$

Осталось только показать, что $0<\theta(\rho)<1$ при $0<\rho<\pi$. С этой целью рассмотрим степенной ряд

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\rho)}{n!}(z-\rho)^n, \tag{27}$$

сходящийся при $|z-\rho|<2\pi-\rho$. Так как $0<\rho<\pi$, то ряд будет сходиться, в частности, при $z=2\rho$ и, значит, его общий член должен стремиться к нулю. Поэтому, в частности, имеет место равенство:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f^{(2m)}(\rho)}{(2m)!}\rho^{2m+1}=0. \tag{28}$$

Отсюда и из (25) заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^{2m}}{(2m)!}\cdot\operatorname{ctg}^{(2m)}\frac{\rho}{2}=1. \tag{29}$$

Функция $y(\rho)=\operatorname{ctg}\frac{\rho}{2}$ положительна и убывает при $0<\rho<\pi$. Дифференцируя ее многократно, имеем:

$$y'=-\frac{1}{2\sin^2\frac{\rho}{2}}=-\frac{1+y^2}{2}<0;$$

$$y''=-yy'=\frac{y+y^3}{2}>0;\ \ldots$$

Продолжая этот процесс, заключаем, что все производные четных порядков строго положительны, а все производные нечетных порядков строго отрицательны при $0<\rho<\pi$. Этот вывод и равенство (29) показывают, что функция $\theta(\rho)$, определенная равенством (26), удовлетворяет неравенству $\theta(\rho)>0$. Далее, $y''(\rho)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\rho}{2}\right)$ строго убывает при $0<\rho<\pi$, и $y''(\pi)=0$. Далее,

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2}\operatorname{ctg}''\frac{\rho}{2}=\lim_{\rho\to+0}\frac{\rho^3}{4}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\rho}{2}}{2\sin^2\frac{\rho}{2}}=1,$$

поэтому

$$\theta(\rho)=\inf_{m}\left\{\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^{2m}}{(2m)!}\cdot\operatorname{ctg}^{(2m)}\frac{\rho}{2}\right\}\leqslant\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2}\cdot\operatorname{ctg}''\frac{\rho}{2}<1\quad\text{при}\quad 0<\rho<\pi.$$

Таким образом, неравенства $0<\theta(\rho)<1$ установлены и тем самым полная регулярность системы (22) доказана.

Подставляя найденное выражение для $\varphi(\tau)$ в равенство (10), находим искомую отображающую функцию ($|z|<\rho$, $|\operatorname{Re} z|<\pi$):

$$F(z) = C(\rho) - \cos z + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=\rho} \frac{\varphi(\tau)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} \, d\tau =$$

$$= C(\rho) - \cos z + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \left(\frac{t^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{t^{2j}} \right) \operatorname{ctg} \frac{t - z}{2} \, dt =$$

$$= C(\rho) - \cos z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{2j} \varphi_j \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho} \frac{1}{t^{2j}} \operatorname{ctg} \frac{t - z}{2} \, dt =$$

$$= C(\rho) - \cos z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^{2j} \varphi_j}{2^{2j-1} (2j-1)!} \operatorname{ctg}^{(2j-1)} \left(- \frac{z}{2} \right) =$$

$$= C(\rho) - \cos z - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{(2j-1)!} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^{2j} \operatorname{ctg}^{(2j-1} \left(\frac{z}{2} \right).$$

Постоянная $C(\rho)$ находится из условия нормировки

$$C(\rho) = \cos(i\rho) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{(2j-1)!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{2j} \operatorname{ctg}^{(2j-1)} \left(\frac{i\rho}{2} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И.— Сибир. матем. ж., 1973, т. 14, № 1, с. 64.
2. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений.— М., 1963.
3. Квеселава Д. А.— Труды Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР, 1948, т. 16, с. 39.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М.— Л., 1962.

Кафедра теории функций

УДК 517.966

Р. ГАБАСОВ

ВОПРОСЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Двадцать пять лет тому назад с принципа максимума Л. С. Понтрягина [1] — фундаментального результата прикладной математики началась математическая теория оптимальных процессов. Задачи оптимального управления возникли в современной технике, экономике, военном деле и других сферах человеческой деятельности, где успех, существенное развитие связаны с исключительными затратами, с использованием предельных возможностей. Практическая значимость результатов была и остается главной причиной большого интереса к новому разделу математики и бурного развития теории оптимального управления в течение последней четверти века. Принцип максимума наряду с динамическим программированием Р. Беллмана [2] резко увеличил интенсивность исследований по экстремальным задачам.

Успехи теории оптимального управления обыкновенными динамическими системами стимулировали исследования по оптимизации систем с последействием [3], стохастических систем [4] и систем с распределенными параметрами [5]. В последнее десятилетие много внимания уделялось теории дифференциальных игр [6, 7], которая явилась развитием теории оптимального управления одним участником на случай, когда в процессе управления принимают участие игроки с несовпадающими интересами.

Достигнутый к настоящему времени уровень теоретических разработок позволяет для любой прикладной задачи сформулировать полный набор необходимых условий оптимальности [8].

Необходимые условия оптимальности позволяют в ряде случаев получить такие качественные характеристики решения, которые в совокупности с известными свойствами конкретных систем достаточны для по-