УДК 62-50

Г. А. МЕДВЕДЕВ

АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ЗАВИСИМЫХ ВЫБОРКАХ

Будем рассматривать задачу оценивания неизвестных параметров в регрессионной задаче, когда эти параметры линейно связаны с наблюдениями (выборочными значениями).

$$y_t = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) + \xi_t = \varphi^*(t)\, c + \xi_t. \tag{1}$$

Здесь и ниже пользуемся следующими обозначениями:

c — вектор-столбец неизвестных параметров, значения которых нужно оценить в процессе идентификации; n — размерность вектора c; $c^* = (c_1, c_2 \ldots c_n)$, $*$ — знак транспонирования; y_t — наблюдение выходной переменной в момент времени t, t — дискретное время $(t=1, 2, \ldots)$; $\varphi^*(t) = (\varphi_1(t)\varphi_2(t) \ldots \varphi_n(t))$ — известный вектор; ξ_t — аддитивный шум с нулевым математическим ожиданием $M\{\xi_t\}=0$ и корреляционной функцией $M\{\xi_k\xi_t\}=\rho(k, t)$. Дисперсию ξ_t обозначим ρ_t. Пусть также $y^*(N) = (y_1 y_2 \ldots y_N)$ — N-вектор наблюдений; $\Phi^*(N) = (\varphi(1)\varphi(2) \ldots \varphi(N))$ — известная матрица размера $(n\times N)$; $\xi^*(N) = (\xi_1\xi_2 \ldots \xi_N)$ — N-вектор шумов.

Тогда наблюдения в течение интервала времени $1\leqslant t\leqslant N$ запишутся в матричной форме

$$y(N) = \Phi(N)\, c + \xi(N). \tag{2}$$

При этом $M\{\xi(N)\xi^*(N)\} = R(N)$ будет обозначать матрицу корреляции шумов. $R(N) = \|\rho(k, t)\|$, $1\leqslant k$, $t\leqslant N$. Обозначим также $r^*(N) = (\rho(1, N)\rho(2, N) \ldots \rho(N-1, N)) - (N-1)$ — вектор корреляций.

Адаптивная идентификация методом наименьших квадратов (МНК). Наиболее полное исследование адаптивной процедуры оценивания методом наименьших квадратов при использовании независимых наблюдений провели Алберт и Ситлер в работе [1]. Мы распространим их результаты на случай зависимых наблюдений. В этой работе описана адаптивная процедура вычисления оценок вектора c из (2) в предположении, что матрица корреляции $R(N)$ диагональная. Чтобы использовать эти результаты в нашем случае, преобразуем (2) таким образом, чтобы были выполнены условия работы [1]. Введем в рассмотрение матрицу $D(t)$, $1\leqslant t\leqslant N$, определяемую рекуррентно соотношениями

$$D(1) = 1,\ D(t+1) = \begin{pmatrix} D(t) & 0 \\ d(t+1) & \delta_{t+1} \end{pmatrix},\ 1\leqslant t\leqslant N, \tag{3}$$

где $\delta_{t+1} = (\rho_{t+1} - r^*(t+1)R^{-1}(t)r(t+1))^{-1/2}$; $d(t+1) = -\delta_{t+1}r^*(t+1)\,R^{-1}(t)$.

Обозначим $\tilde{y}(t) = D(t)\,y(t)$, $\tilde{\Phi}(t) = D(t)\Phi(t)$, $\tilde{\xi}(t) = D(t)\,\xi(t)$, $1\leqslant t\leqslant N$.

Непосредственные вычисления показывают, что $\tilde{R}(t) = M\{\tilde{\xi}(t)\,\tilde{\xi}^*(t)\} = D(t)\,R(t)\,D^*(t) = I$, где I — единичная матрица соответствующего размера. Таким образом, умножая (2) слева на $D(N)$, получим соотношение

$$\tilde{y}(N) = \tilde{\Phi}(N)\,c + \tilde{\xi}(N), \tag{4}$$

в котором компоненты вектора $\tilde{\xi}(N)$ попарно некоррелированы. Заметим, что введенное матричное преобразование обладает необходимым для построения адаптивной процедуры свойством: $\tilde{y}^*(t+1) = (\tilde{y}^*(t)\,\tilde{y}_{t+1})$, $\tilde{\Phi}^*(t+1) = (\tilde{\Phi}^*(t)\,\tilde{\varphi}(t+1))$, $\tilde{\xi}^*(t+1) = (\tilde{\xi}^*(t),\ \tilde{\xi}_t)$. Здесь $\tilde{y}_{t+1} = d(t+1)\,y(t) + \delta_{t+1}\,y_{t+1} = \delta_{t+1}(y_{t+1} - r^*(t+1)\,R^{-1}(t)\,y(t))$; $\tilde{\varphi}(t+1) = \Phi^*(t)\,d^*(t+1) + \delta_{t+1}\,\varphi(t+1) = \delta_{t+1}(\varphi(t+1) - \Phi^*(t)\,R^{-1}(t)\,r(t+1))$; $\tilde{\xi}(t+1) = d(t+1)\,\xi(t) + \delta_{t+1}\,\xi_{t+1} = \delta_{t+1}(\xi_{t+1} - r^*(t+1)\,R^{-1}(t)\,\xi(t))$.

Используя для построения адаптивной оценки параметров c из (4) результаты [1], можно убедиться, что справедлива

Теорема 1. Если компоненты вектора шума в (2) коррелированы, то адаптивная оценка МНК имеет вид

$$c(N)=c(N-1)+\gamma(N)[y_N-r^*(N)R^{-1}(N-1)y(N-1)-\\ -\psi^*(N)c(N-1)]. \tag{5}$$

Здесь $\psi(N)=\varphi(N)-\Phi^*(N-1)R^{-1}(N-1)r(N)$, а коэффициент влияния $\gamma(N)$ вычисляется по формуле

$$\gamma(N)=\begin{cases}\dfrac{a(N)}{\psi^*(N)\,a(N)}, \text{ если } a(N)\neq 0 & (6)\\[2ex] \dfrac{b(N)}{\sigma_N^2+\psi^*(N)\,b(N)}, \text{ если } a(N)=0, & (7)\end{cases}$$

где $\sigma_N^2=\rho_N-r^*(N)R^{-1}(N-1)r(N)$; $a(N)=A(N-1)\psi(N)$ — n-вектор; $b(N)=B(N-1)\psi(N)$ — n-вектор, а $(n\times n)$ — матрицы A и B удовлетворяют рекуррентным соотношениям.

$$A(N)=\begin{cases}A(N-1)-\dfrac{a(N)\,a^*(N)}{\psi^*(N)\,a(N)}, \text{ если } a(N)\neq 0, & (8)\\[2ex] A(N-1)\qquad\qquad\qquad, \text{ если } a(N)=0; & (9)\end{cases}$$

$$B(N)=\begin{cases}B(N-1)-\dfrac{b(N)\,a^*(N)+a(N)\,b^*(N)}{\psi^*(N)a(N)}+\\[2ex] +\dfrac{\sigma_N^2+\psi^*(N)\,b(N)}{(\psi^*(N)\,a(N))^2}a(N)\,a^*(N), \text{ если } a(N)\neq 0, & (10)\\[2ex] B(N-1)-\dfrac{b(N)\,b^*(N)}{\sigma_N^2+\psi^*(N)\,b(N)}, \text{ если } a(N)=0. & (11)\end{cases}$$

$A(0)=I$. Если априорные данные о параметрах отсутствуют, то $c(0)=0$, $B(0)=0$.

Заметим, что условие $a(N)\neq 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы вектор $\psi(N)$ не являлся линейной комбинацией векторов $\psi(1)$, $\psi(2)$, ..., $\psi(N-1)$. Отсюда следует, что в процессе построения оценок вектора c по текущим данным, каково бы ни было N, формулы (6), (8) и (10) используются не более, чем n раз.

Пусть $\varphi_k(t)$, $1\leqslant k\leqslant n$, образуют набор линейно независимых функций. В этом случае, как правило (этому можно дать строгое обоснование), первые n строк матрицы $\Phi(N)$, $N>n$, являются линейно независимыми. И процедура оценивания строится по следующему правилу: первые n оценок $c(t)$, $1\leqslant t\leqslant n$ вычисляются с использованием (6), (8), (10), а последующие вычисления используют только (7) и (11), так как матрица $A(t)$ уже больше не нужна. Этот второй режим адаптивного оценивания при коррелированных наблюдениях ранее найден Аведьяном [2], использовавшим другую технику анализа.

Адаптивная идентификация типа стохастической аппроксимации. Вычислительные сложности адаптивных оценок МНК часто служат препятствием к их применению. Существенно более простыми являются оценки, построенные по типу стохастической аппроксимации (оценки ТСА), которые для рассматриваемой задачи имеют вид

$$c(N)=c(N-1)+\gamma(N)\,(y_N-\varphi^*(N)c(N-1)). \tag{12}$$

Сходимость (12) для независимых наблюдений обеспечивают коэффициенты влияния, выбираемые просто [3]:

$$\gamma(N)=a\varphi(N)/N. \tag{13}$$

Объем памяти необходимой информации и число арифметических операций на каждой итерации имеют порядок n независимо от того, коррелированы или нет наблюдения. Конечно, за счет простоты оценка (12), (13) теряет в эффективности по сравнению с (5)—(11). К сожалению, не представляется возможным аналитически определить ухудшение качества оценки при переходе от (5)—(11) к (12), (13). Здесь уместно заметить, что оценка ТСА может оказаться все-таки предпочтительней, чем оценка МНК, так как за одно и тоже время при вычислениях по (12), (13) можно сделать в (N^2/n) раз больше итераций, чем при применении (5)—(11).

Для одной из оценок ТСА, описанной ниже, в [4] экспериментально установлены области такой предпочтительности.

Удобно след матрицы вариаций оценок выбрать в качестве меры их эффективности, так как он совпадает с суммой дисперсий компонент вектора оценок. Оценка (12) может быть улучшена, если коэффициент влияния выбрать оптимальным образом: так, чтобы след матрицы вариаций был минимальным. Пусть

$$H(N)=M\{(c(N)-c)(c(N)-c)^*\},\quad h_N=\operatorname{tr} H(N). \tag{14}$$

Теорема 2 [5]. Если компоненты вектора шума в (2) коррелированы, то коэффициент влияния $\gamma(N)$ адаптивной оценки ТСА в (12), минимизирующий h_N, вычисляется по формуле

$$\gamma(N)=\frac{H(N-1)\varphi(N)-\lambda(N)}{\rho_N-\varphi^*(N)H(N-1)\varphi(N)-2\varphi^*(N)\lambda(N)}, \tag{15}$$

где $\lambda(N)=L(N-1)r(N)$, а $(n\times N)$ — матрица L определяется рекуррентно

$$L(1)=\gamma(1),\ L(N)=((I-\gamma(N)\varphi^*(N))L(N-1)\ \vdots\ \gamma(N)). \tag{16}$$

$\lambda(1)=0$, если наблюдения некоррелированы с априорными оценками. Матрица вариаций $H(N)$ в этом случае рекуррентно вычисляется соотношением

$$H(N)=H(N-1)-\frac{(H(N-1)\varphi(N)-\lambda(N))(H(N-1)\varphi(N)-\lambda(N))^*}{\rho_N+\varphi^*(N)H(N-1)\varphi(N)-2\varphi^*(N)\lambda(N)}, \tag{17}$$

Априорная оценка $c(0)$ и ее матрица вариаций $H(0)$ считаются заданными.

Сложность алгоритма (12), (15)—(17) такова: для выполнения одной итерации необходимо выполнить порядка Nn арифметических операций. Более точные сведения о сложности алгоритмов (12), (13) и (15) — (17) содержатся в [4].

О состоятельности адаптивных оценок по коррелированным наблюдениям. Наличие корреляции между наблюдениями обычно ухудшает качество оценок. Поэтому возможны ситуации, когда корреляция между наблюдениями не позволяет построить состоятельную оценку. Рассмотрим эту проблему на примере скалярного случая оценивания математического ожидания. В этом случае $n=1$, $\varphi(t)=1$ для всех t и

$$y_t=c+\xi_t,\quad t\geqslant 1. \tag{18}$$

Рассмотрим вначале оценку МНК. Обозначим через e вектор соответствующей размерности, составленный из единиц $e=(11\ldots1)$. Пусть

$$\varepsilon_1=1,\quad \varepsilon_t=1-eR^{-1}(t-1)r(t),\quad t>1. \tag{19}$$

Тогда оценка МНК параметра c в соответствии с (5) имеет вид

$$c_t=c_{t-1}+\gamma_t(y_t-r^*(t)R^{-1}(t-1)y(t-1)-\varepsilon_t c_{t-1}). \tag{20}$$

Из соотношений (6)—(11) получаем $a(1)=1$, $a(t)=0$, $t>1$, $b(1)=0$, $b(t)=b_{t-1}\varepsilon_t$, $t>1$, $b_1=\rho_1=\sigma_1^2$ и имеют место рекуррентные соотношения

$$b_t=\sigma_t^2 b_{t-1}/(\sigma_t^2+\varepsilon_t^2 b_{t-1}),\ \gamma_t=\varepsilon_t b_{t-1}/(\sigma_t^2+\varepsilon_t^2 b_{t-1}),\ \gamma_1=1 \tag{21}$$

σ_t^2 было определено ранее.

Оценим дисперсию оценки (20). Пусть $\eta_t=c_t-c$. Тогда

$$\eta_1=\xi_1,\quad \eta_t=(1-\gamma_t\varepsilon_t)\eta_{t-1}+\gamma_t(\xi_t-r^*(t)R^{-1}(t-1)\xi(t-1)). \tag{22}$$

Введем в рассмотрение t — вектор-строку $q(t)$, определив ее рекуррентным соотношением

$$q(t) = ((1-\gamma_t\varepsilon_t)q(t-1) - \gamma_t r^*(t) R^{-1}(t-1) \quad \gamma_t), \quad q(1) = 1. \tag{23}$$

Легко убедиться, что $\eta_t = q(t)\xi(t)$, поэтому дисперсия оценки (20)

$$h_t = D\{c_t\} = M\{\eta_t^2\} = q(t) R(t) q^*(t). \tag{24}$$

Используя (23), можно придать (24) рекуррентную форму и с ее помощью вычислить дисперсию в явном виде

$$h_t = (1-\gamma_t\varepsilon_t)^2 h_{t-1} + \gamma_t^2\sigma_t^2 = \gamma_t^2\sigma_t^2 + \sum_{k=1}^{t-1} \gamma_k^2\sigma_k^2 \prod_{l=k+1}^{t} (1-\gamma_l\varepsilon_l)^2. \tag{25}$$

Обозначим

$$u_t = \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} = \frac{(1 - eR^{-1}(t-1)\, r(t))^2}{\rho_t - r^*(t)\, R^{-1}(t-1)\, r(t)}. \tag{26}$$

Из (21) следует

$$b_t = 1/(1/b_{t-1} + u_t) = 1/\sum_{k=1}^{t} u_k \tag{27}$$

и далее

$$\gamma_t^2\sigma_t^2 = u_t/\left(\sum_{k=1}^{t} u_k\right)^2, \quad 1 - \gamma_t\varepsilon_t = \sum_{k=1}^{t-1} u_k / \sum_{k=1}^{t} u_k. \tag{28}$$

Используя это, получаем дисперсию h_t в виде

$$h_t = b_t = 1/\sum_{k=1}^{t} u_k. \tag{29}$$

Теорема 3. Для того чтобы оценка МНК (20) была состоятельной, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{t} u_k$ расходился при $t \to \infty$.

Отсюда можно установить некоторые полезные следствия. Пусть шум ξ является марковским с дисперсией σ^2 и параметром $\rho(t, t+1) = \rho \leqslant 1$. Тогда $u_t = (1-\rho)/\sigma^2(1+\rho)$ для всех t. Ряд $\sum_{k=1}^{t} u_k$ расходится для всех $\rho < 1$ и дисперсия оценки МНК $h_t = \sigma^2 \frac{1+\rho}{1-\rho} \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Пусть теперь шум ξ некоррелирован. Тогда для состоятельности оценки МНК получаем необходимое условие, ограничивающее рост дисперсии шума со временем: $\lim_{t\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{t} 1/\rho_k\right)^{-1} = 0$.

Рассмотрим теперь оценку ТСА (12) с коэффициентом влияния $\gamma_t = a/t$. Подобно (16) введем t — вектор-строку $l(t)$ рекуррентным соотношением

$$l(1) = a, \quad l(t) = ((1-a/t)\, l(t-1) \quad a/t), \quad t > 1. \tag{30}$$

Тогда $\eta_t = c_t - c = \pi_{1t}(a)\,\eta_0 + l(t)\,\xi(t)$, где $\pi_{1t}(a) = (1-a/t)\,(1-a/(t-1))\ldots(1-a/2)\,(1-a)$.

Дисперсия оценки (12) имеет вид $h_t = \pi_{1t}^2(a)\, h_0 + l(t)\, R(t)\, l^*(t)$. Здесь h_0 — дисперсия априорной оценки. Используя рекуррентное соотношение (30), получаем

$$h_t = (1-a/t)^2 h_{t-1} + 2(1-a/t)\frac{a}{t}\, l(t-1)\, r(t) + \frac{a^2}{t^2}\rho_t =$$

$$= \pi_{1t}^2(a)\, h_0 + \frac{a}{t}\left(\Theta_t + \sum_{k=1}^{t-1} \Theta_k \prod_{l=k+1}^{t} \beta_l\right). \tag{31}$$

Здесь $\Theta_t = \frac{a}{t}\rho_t + 2\left(1 - \frac{a}{t}\right) l(t-1) r(t)$; $\beta_l = \frac{l}{l-1}(1 - a/l)^2$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия

$$\gamma_t = a/t \quad a \geqslant 1, \ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^{t} \rho_k = 0. \tag{32}$$

Для того чтобы оценка (18) была состоятельной, достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{k=2}^{t} (k-a)\, l(k-1)\, r(k) = 0. \tag{33}$$

При доказательстве (33) существенно используется тот факт, что при $a \geqslant 1$, $k < t$ $\prod_{l=k+1}^{t} \beta_l \leqslant \frac{k}{t}$.

Заметим, что при $a=1$ (12) превращается в выборочное среднее, а (33) в известное условие состоятельности выборочного среднего при коррелированных наблюдениях:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \sum_{k=2}^{t} \sum_{l=1}^{k-1} \rho(l, k) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Albert A, Sittler R. W.— J. SIAM Control, 1966, Ser. A, v. 3, N 3, p. 384.
2. Аведьян Э. Д.— Автоматика и телемеханика, 1975, № 5, с. 67.
3. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающих систем.— М., 1970.
4. Медведев Г. А., Хацкевич Г. А.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 8, с. 69.
5. Медведев Г. А.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 5, с. 110.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 517.544.8.545

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ И ОТОБРАЖЕНИЕ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Пусть M — конечная ориентируемая риманова поверхность рода $h \geqslant 0$ с гладким краем ∂M, который предположим связным и ориентированным. Пусть $\alpha(t)$ — изменяющий ориентацию гомеоморфизм края ∂M на себя, удовлетворяющий тождеству $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ и такой, что дифференциал $d\alpha(t)$ H-непрерывен и нигде не обращается в нуль.

Задача Карлемана в ее простейшей постановке (задача о скачке) требует нахождения всех функций $\Phi(z)$, аналитических на $M \setminus \partial M$, H-непрерывно продолжимых на ∂M, где должно выполняться краевое условие:

$$\Phi[\alpha(t)] - \Phi(t) = g(t), \quad t \in \partial M. \tag{1}$$

Здесь $g(t)$ — заданная Н-непрерывная функция, удовлетворяющая тождеству $g[\alpha(t)] + g(t) \equiv 0$ на ∂M.

С точки зрения разрешимости задача (1) полностью исследована [1]; ее разрешимость равносильна выполнению равенств

$$\int_{\partial M} g(t)\, d\Psi[\alpha(t)] = 0, \tag{2}$$

где $d\Psi$ — любой аналитический на $M \setminus \partial M$ дифференциал, H-непрерывно продолжимый на ∂M, где должно выполняться равенство

$$d\Psi(t) = d\Psi[\alpha(t)]. \tag{3}$$

Если условия (2) выполнены, то задача (1) разрешима, а ее общее реше-