



УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Для решения основных граничных задач теории упругости ортотропного тела необходимо найти выражения компонентов напряжений и перемещений при помощи, по меньшей мере, трех произвольных квазигармонических функций. Решение этой проблемы в столь простой форме, как для трансверсально-изотропного тела, без предположения о существовании некоторого числа зависимостей между коэффициентами упругости, по-видимому, невозможно. Один из подходов к решению такой проблемы при наложении на коэффициенты упругости c_{ij} трех ограничений указан в работе [1].

В настоящей работе получено более простое представление общих формул для напряжений и перемещений в виде суперпозиции двух групп основных формул, для существования которых требуется соответственно три и шесть ограничений на коэффициенты упругости a_{ij} (см. обозначения, принятые в работе [2]).

В отличие от классических представлений предполагается, что $a_{ij} \neq a_{ji}$ при $i \neq j$, т. е. из 12 коэффициентов a_{ij} число независимых коэффициентов, подлежащих определению экспериментальным путем, равно $12-n$, где n — число независимых уравнений связей, налагаемых на коэффициенты a_{ij} .

1. Общие формулы для компонентов напряжений и перемещений. Пусть u, v, w — компоненты перемещений, отнесенные к осям декартовых координат x, y, z ; σ_{ij} и ϵ_{ij} — компоненты напряжений и деформаций, удовлетворяющие уравнениям закона Гука:

$$a_{ij}\sigma_{jj} = e_{ii}, \quad a_{44}\tau_{yz} = e_{yz}, \quad a_{55}\tau_{xz} = e_{xz}, \quad a_{66}\tau_{xy} = e_{xy} \quad (1)$$

и, при отсутствии массовых сил, уравнениям равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Для удобства записи здесь используются двойные обозначения:

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \quad \sigma_{22} = \sigma_y, \quad \dots, \quad \sigma_{12} = \tau_{xy}, \quad e_{xx} = e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dots, \quad e_{xy} = e_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Уравнения (2) и (1) для касательных напряжений выполняются, если

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_k \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \xi_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} \right), \quad \tau_{xy} = -A_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = A_k \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \eta_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{xz} &= -A_k \xi_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial z}, \quad \sigma_z = A_k \left(\xi_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \eta_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} \right), \quad \tau_{yz} = -A_k \eta_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y \partial z}, \\ u &= \frac{1}{2} A_k (\eta_k a_{44} - \xi_k a_{55} - a_{66}) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$v = \frac{1}{2} A_k (\xi_k a_{55} - \eta_k a_{44} - a_{66}) \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad w = \frac{1}{2} A_k (a_{66} - \eta_k a_{44} - \xi_k a_{55}) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z},$$

где A_k, ξ_k, η_k — произвольные коэффициенты; $\Phi_k = \Phi_k(x_k, y_k, z_k)$ — произвольная гармоническая функция переменных $x_k = \alpha_k x, y_k = \alpha_k \mu_k y, z_k = \alpha_k \lambda_k z$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z_k^2} = 0, \quad (4)$$

$\alpha_k, \mu_k, \lambda_k$ — некоторые безразмерные параметры.

Всякую функцию Φ_k , удовлетворяющую уравнению (4), будем называть квазигармонической функцией относительно переменных x, y, z или просто квазигармонической функцией.

Требуя, чтобы выражения (3) удовлетворяли уравнениям (1) для нормальных напряжений, получаем три уравнения, на основании которых с учетом (4) следует

$$\begin{aligned} \mu_k^2 &= \frac{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \xi_k \left(a_{13} + \frac{a_{55}}{2} \right) - \frac{\eta_k a_{44}}{2}}{a_{11} + \eta_k a_{13}} = \\ &= \frac{a_{32} + \xi_k a_{23}}{a_{21} + \frac{a_{66}}{2} + \eta_k \left(a_{23} + \frac{a_{44}}{2} \right) - \frac{\xi_k a_{55}}{2}} = \frac{a_{32} + \xi_k a_{33}}{a_{31} + \eta_k a_{33}}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 &= \frac{a_{12} + \frac{a_{66}}{2} + \xi_k \left(a_{13} + \frac{a_{55}}{2} \right) - \frac{\eta_k a_{44}}{2}}{\xi_k a_{11} + \eta_k a_{12}} = \\ &= \frac{a_{32} + \xi_k a_{33}}{\xi_k \left(a_{31} + \frac{a_{55}}{2} \right) + \eta_k \left(a_{32} + \frac{a_{44}}{2} \right) - \frac{a_{66}}{2}} = \frac{a_{32} + \xi_k a_{33}}{\xi_k a_{21} + \eta_k a_{22}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножив числители и знаменатели дробей (6) на A_k , получим систему трех линейных однородных уравнений относительно неизвестных $A_k, A_k \xi_k, A_k \eta_k$. Приравняв затем определитель этой системы к нулю, получаем кубическое уравнение относительно параметра $x = \lambda_k^2$

$$M_0 x^3 - M_1 x^2 + M_2 x - M_3 = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} M_0 &= a_{66} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}), \\ M_1 &= a_{22} a_{66} (a_{55} + a_{13} + a_{31}) + a_{44} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) - a_{66} (a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32}), \\ M_2 &= a_{22} a_{44} (a_{55} + a_{13} + a_{31}) + a_{66} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{44} (a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32}), \\ M_3 &= a_{44} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет три корня, из которых, по крайней мере, один вещественный. Зафиксируем какой-либо один из них, полагая $x = x_k = \lambda_k^2$ ($k = 1, 2, 3$). Считая x известным, из соотношений (6) получаем систему уравнений для нахождения неизвестных $\xi = \xi_k$ и $\eta = \eta_k$:

$$\begin{aligned} \left(a_{11} x - a_{13} - \frac{a_{55}}{2} \right) \xi + \left(a_{12} x + \frac{a_{44}}{2} \right) \eta &= a_{12} + \frac{a_{66}}{2}, \\ (a_{21} x - a_{23}) \xi + a_{22} x \eta &= a_{22}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основании равенств (5) следует, что ξ и η должны удовлетворять также уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_{33} (a_{55} \xi^2 - a_{44} \xi \eta) + \left[a_{23} a_{31} + \frac{1}{2} a_{32} a_{55} - a_{33} \left(a_{21} + \frac{1}{2} a_{66} \right) \right] \xi + \\ + \left[a_{22} a_{33} - a_{32} \left(a_{23} + \frac{1}{2} a_{44} \right) \right] \eta + a_{22} a_{31} - a_{32} \left(a_{21} + \frac{1}{2} a_{66} \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} a_{33} (a_{44} \eta^2 - a_{55} \xi \eta) + \left[a_{11} a_{33} - a_{31} \left(a_{13} + \frac{1}{2} a_{55} \right) \right] \xi + \left[a_{13} a_{32} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_{31} a_{44} - a_{33} \left(a_{12} + \frac{1}{2} a_{66} \right) \right] \eta + a_{11} a_{32} - a_{31} \left(a_{12} + \frac{1}{2} a_{66} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом

$$\mu_k^2 = \frac{a_{32} + \xi_k a_{33}}{a_{31} + \eta_k a_{33}}. \quad (11)$$

Исключая в уравнениях (10) с учетом (9) неизвестные ξ и η , получаем два уравнения 4-й степени относительно x :

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \quad (12)$$

$$b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = 0, \quad (13)$$

где $a_0 = k_0 t_5^2$, $a_1 = t_5 (2 k_0 t_6 + k_3 t_1 + k_4 t_3)$;

$$a_2 = k_0 (2 t_0 t_5 + t_6^2) + t_1 (k_1 t_1 - k_2 t_3) + k_3 (t_1 t_6 - t_2 t_5) + k_4 (t_3 t_6 - t_4 t_5),$$

$$a_3 = 2 k_0 t_0 t_6 - 2 k_1 t_1 t_2 + k_2 (t_1 t_4 + t_2 t_3) + k_3 (t_0 t_1 - t_2 t_6) + k_4 (t_0 t_3 - t_4 t_6),$$

$$a_4 = t_0 (k_0 t_0 - k_3 t_2 - k_4 t_4) + t_2 (k_1 t_2 - k_2 t_4),$$

$$b_0 = s_0 t_5^2, \quad b_1 = t_5 (2 s_0 t_6 + s_3 t_1 + s_4 t_3),$$

$$b_2 = s_0 (2 t_0 t_5 + t_6^2) + t_3 (k_2 t_3 - k_1 t_1) + s_3 (t_1 t_6 - t_2 t_5) + s_4 (t_3 t_6 - t_4 t_5),$$

$$b_3 = 2 s_0 t_0 t_6 - 2 k_2 t_3 t_4 + k_1 (t_2 t_3 + t_1 t_4) + s_3 (t_0 t_1 - t_2 t_6) + s_4 (t_0 t_3 - t_4 t_6),$$

$$b_4 = t_0 (s_0 t_0 - s_3 t_2 - s_4 t_4) + t_4 (k_2 t_4 - k_1 t_2), \quad (14)$$

$$k_0 = a_{22} a_{31} - a_{32} (a_{21} + b_{66}), \quad k_1 = a_{33} b_{55}, \quad k_2 = a_{33} b_{44},$$

$$k_3 = a_{23} a_{31} + a_{32} b_{55} - a_{23} (a_{21} + b_{66}), \quad k_4 = a_{22} a_{33} - a_{32} (a_{23} + b_{44}),$$

$$s_0 = a_{11} a_{32} - a_{31} (a_{12} + b_{66}), \quad s_3 = a_{11} a_{33} - a_{31} (a_{13} + b_{55}),$$

$$s_4 = a_{13} a_{32} + a_{31} b_{44} - a_{33} (a_{12} + b_{66}),$$

$$t_0 = a_{23} b_{44}, \quad t_1 = a_{22} b_{66}, \quad t_2 = a_{22} b_{44}, \quad t_3 = a_{11} a_{22} - a_{21} (a_{12} + b_{66}),$$

$$t_4 = a_{22} (a_{13} + b_{55}) - a_{23} (a_{12} + b_{66}), \quad t_5 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$t_6 = a_{12} a_{23} - a_{21} b_{44} - a_{22} (a_{13} + b_{55}), \quad b_{ii} = a_{ii}/2, \quad i = 4, 5, 6.$$

Предположим, что уравнения (7), (12) и (13) имеют три общих корня $x = x_k$ ($k=1, 2, 3$). Для их нахождения поступим следующим образом. Умножим уравнение (12) на b_0 и вычтем из полученного уравнения уравнение (13), умноженное на a_0 . В результате получим

$$m_0 x^3 - m_1 x^2 + m_2 x - m_3 = 0. \quad (15)$$

Здесь

$$m_0 = b_0 a_1 - a_0 b_1, \quad m_1 = a_0 b_2 - b_0 a_2, \quad m_2 = b_0 a_3 - a_0 b_3, \quad m_3 = a_0 b_4 - b_0 a_4. \quad (16)$$

Для того чтобы корни уравнений (7) и (15) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы

$$m_1 M_0 = m_0 M_1, \quad m_2 M_0 = m_0 M_2, \quad m_3 M_0 = m_0 M_3. \quad (17)$$

Равенства (17) представляют собой три ограничения на коэффициенты a_{ij} . При выполнении этих равенств значения неизвестных $x = x_k$ можно найти, используя уравнение (7). В дальнейшем будем рассматривать только такие ортотропные тела, для которых равенства (17) выполняются. Считая при этом a_{ij} и $x_k = \lambda_k^2$ известными, значения ξ_k , η_k и μ_k найдем из равенств (9) и (11); неопределенным остается лишь параметр α_k . Его значения можно зафиксировать произвольным образом, полагая, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

При использовании только положительных значений корней

$$\lambda_k = \pm \sqrt{x_k}, \quad \mu_k = \pm \sqrt{\frac{a_{32} + a_{33} \xi_k}{a_{31} + a_{33} \eta_k}} \quad (18)$$

параметров λ_k и μ_k общие формулы для напряжений и перемещений определяются выражениями (3), если считать k индексом суммирования ($k=1, 2, 3$). С учетом всех корней этих параметров получим формулы для напряжений и перемещений:

$$\sigma_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_k, \quad \sigma_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_k, \quad \sigma_z = \left(\xi_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta_k \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_k,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_k, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} F_k \xi_k, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} F_k \eta_k, \quad (19)$$

$$u = P_{k1} \frac{\partial}{\partial x} F_k, \quad v = P_{k2} \frac{\partial}{\partial y} F_k, \quad w = P_{k3} \frac{\partial}{\partial z} F_k,$$

$$\text{где } F_k = A_k \Phi_k + B_k \Omega_k, \quad P_{k1} = \frac{1}{2} (\eta_k a_{44} - \xi_k a_{55} - a_{66}),$$

$$P_{k2} = \frac{1}{2} (\xi_k a_{55} - \eta_k a_{44} - a_{66}), \quad (20)$$

$$P_{k3} = \frac{1}{2} (a_{66} - \eta_k a_{44} - \xi_k a_{55}),$$

$\Phi_k(a_k x, a_k \mu_k y, a_k \lambda_k z)$ и $\Omega_k(\pm a_k x, \pm a_k \mu_k y, \pm a_k \lambda_k z)$ — произвольные квазигармонические функции переменных x, y, z ; A_k и B_k — произвольные постоянные; k — индекс суммирования.

Для существования упругого состояния тела, определяемого выражениями (19), коэффициенты a_{ij} должны удовлетворять равенствам (17). В предельном случае, когда a_{ij} превращаются в упругие постоянные трансверсально-изотропного тела с шестью зависимостями

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad a_{66} = 2(a_{11} - a_{12}), \quad a_{32} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{13}, \quad a_{55} = a_{44}, \quad (21)$$

равенства (17) обращаются в тождества, поскольку при этом все $a_k = 0$. В общем же случае равенства (17) представляют собой три ограничения на коэффициенты a_{ij} . Если значения всех этих коэффициентов найдены экспериментальным путем, равенствами (17) можно воспользоваться как для проверки точности эксперимента, так и для подтверждения или отрицания существования ограничений на коэффициенты a_{ij} , определяемые этими равенствами.

Вместо требования выполнения равенств (17) можно потребовать выполнения уравнений (10) для всех $\xi = \xi_k$ и $\eta = \eta_k$ ($k = 1, 2, 3$). Такой путь приводит к шести ограничениям на a_{ij} , из которых в силу изложенного независимыми будут только три.

2. Общие формулы для ортотропного полупространства. Пусть ортотропное тело занимает область $z > 0$, ограниченную плоскостью S ($z = 0$). Будем предполагать, что плоскость S перпендикулярна к одному из трех главных направлений упругости тела, а упругое состояние тела определяется по формулам (19) при условии, что для всех $k = 1, 2, 3$:

$$\Phi_k = \Phi_k(x, \mu_k y, \lambda_k z), \quad \Omega_k = \Phi_k(x, \mu_k y, -\lambda_k z), \quad (22)$$

где Φ_k и Ω_k — квазигармонические функции в областях $z > 0$ и $z < 0$. При этом, как обычно, будем считать, что оси координат x, y, z образуют правую тройку и параллельны главным направлениям упругости тела.

Поскольку при заданной внешней нагрузке на поверхности тела его упругое состояние зависит от того, какое из главных направлений упругости параллельно оси z , то для полного исследования напряженного состояния тела необходимо рассмотреть три случая. Для каждого из них можно воспользоваться формулами (19) при соответствующем выборе значений коэффициентов a_{ij} . С этой целью можно поступить следующим образом. Пусть, например, закон Гука для главных направлений упругости (1), (2), (3) с ориентацией, показанной на рисунке, имеет вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= a'_{11} \sigma_1 + a'_{12} \sigma_2 + a'_{13} \sigma_3, & a'_{44} \tau_{23} &= e_{23}, \\ e_{22} &= a'_{21} \sigma_1 + a'_{22} \sigma_2 + a'_{23} \sigma_3, & a'_{55} \tau_{13} &= e_{13}, \\ e_{33} &= a'_{31} \sigma_1 + a'_{32} \sigma_2 + a'_{33} \sigma_3, & a'_{66} \tau_{12} &= e_{12}, \end{aligned} \quad (23)$$

где e_{ii} и e_{ij} — компоненты деформаций; σ_i и τ_{ij} — нормальные и касательные напряжения; a'_{ij} — коэффициенты упругости для главных направлений, удовлетворяющие неравенствам $a'_{11} < a'_{22} < a'_{33}$.

В случае, когда ось z параллельна направлению (3), коэффициенты a_{ij} имеют значения, определяемые по формуле $a_{ij} = a'_{ij}$. Если же ось z параллельна направлению (1), то значения a_{ij} получаются циклической перестановкой. Как легко видеть, они определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{1i} &= a'_{2i}, \quad a_{2i} = a'_{3i}, \quad a_{3i} = a'_{1i}, \\ a_{44} &= a'_{55}, \quad a_{55} = a'_{66}, \quad a_{66} = a'_{44}. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично можно получить значения a_{ij} для случая, когда ось z параллельна главному направлению (2) (см. рисунок).

Поступая таким образом, получим три варианта решения граничных задач для полупространства $z > 0$. По существу они сводятся к рассмотрению упругого равновесия трех ортотропных полупространств с поверхностями S , перпендикулярными к главным направлениям упругости (1), (2), (3). При этом для каждого из таких полупространств выбирается своя система координат x, y, z с осью z , перпендикулярной к поверхности тела S . Более простой путь решения аналогичных задач, не требующий преобразования коэффициентов a_{ij} , получим, считая оси координат x, y, z неизменно связанными с телом и соответственно параллельными осям (1), (2), (3). При этом все сводится к рассмотрению ортотропных полупространств $x > 0, y > 0$ и $z > 0$. Для последнего из них общие формулы определяются выражениями (19) и (22). При рассмотрении полупространств $x > 0$ и $y > 0$ также можно воспользоваться формулами (19), полагая соответственно

$$\Phi_k = \Phi_k(x, \mu_k y, \lambda_k z), \quad \Omega_k = \Phi_k(-x, \mu_k y, \lambda_k z), \quad (25)$$

$$\Phi_k = \Phi_k(x, \mu_k y, \lambda_k z), \quad \Omega_k = \Phi_k(x, -\mu_k y, \lambda_k z), \quad (26)$$

где λ_k и μ_k ($k=1, 2, 3$) — безразмерные параметры, определяемые, как сказано в п. 1.

Формулы (19) имеют место также для бесконечного тела с разрезами на плоскости $z=0$ в предположении, что

$$\Phi_k = \Phi_k(x, \mu_k y, \lambda_k z), \quad \Omega_k = \Omega_k(x, \mu_k y, -\lambda_k z), \quad (27)$$

где Φ_k и Ω_k , в отличие от (22), представляют собой различные квазигармонические функции переменных x, y, z .

Таким образом, выражениями (19) — (27) определяется структура общих формул для ортотропного полупространства и бесконечного ортотропного пространства с разрезами на плоскости $z=0$. Существуют также другие пути построения аналогичных формул. Все они должны удовлетворять принципу предельного перехода, состоящему в том, что при устремлении коэффициентов a_{ij} к соответствующим значениям для изотропного тела параметры λ_k и μ_k для всех k должны принимать значения $\lambda_k = \mu_k = 1$. Ибо только при выполнении этого условия выражения компонентов напряжений и перемещений, найденные в результате решения конкретных граничных задач, превращаются в бигармонические функции при предельном переходе к изотропному телу. Общие формулы, не удовлетворяющие принципу предельного перехода, следует рассматривать как ошибочные или в лучшем случае как приближенные.

3. Общие формулы для трансверсально-изотропного тела. Рассмотрим частный случай ортотропного тела, имеющего плоскость изотропии, перпендикулярную к оси z . Предположим, что между коэффициентами a_{ij} имеют место зависимости (21), но выражение a_{66} неизвестно, и, кроме того, $\xi = \eta$. Тогда на основании уравнений (10) находим $a_{66} = 2(a_{11} - a_{12})$. При этом на основании равенств (6) имеем

$$\lambda^2 = \frac{a_{11} + \xi a_{13}}{\xi(a_{11} + a_{12})} = \frac{a_{31} + \xi a_{33}}{\xi(a_{44} + 2a_{31}) - a_{66}}. \quad (28)$$

Отсюда следует

$$[a_{33}(a_{11}+a_{12})-a_{13}(a_{44}+2a_{31})]\xi^2 + \\ + [(a_{31}-a_{13})(a_{11}+a_{12})-a_{11}a_{44}]\xi + a_{11}(a_{11}-a_{12}) = 0. \quad (29)$$

С учетом равенств (5) и (6) находим

$$\mu_k^2 = 1, \quad \lambda_k^2 = \frac{a_{11} + a_{13}\xi_k}{(a_{11} + a_{12})\xi_k} \quad (k = 1, 2), \quad (30)$$

где ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения (29). Будем считать, что x_1 и x_2 — значения $x_k = \lambda_k^2$, определяемые выражениями (30), и представляют собой корни кубического уравнения (7). Тогда третий корень этого уравнения $x_3 = \lambda_3^2$ определяется по формуле

$$x_3 = \frac{a_{44}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})[a_{33}(a_{11} + a_{12}) - a_{13}(2a_{31} + a_{44})]}{a_{11}a_{66}(a_{11} - a_{12})(a_{11}^2 - a_{12}^2)}.$$

Используя уравнения (9), а затем соотношения (5), находим

$$\mu_3^2 = 1, \quad \xi_3 = \eta_3 = \frac{a_{11}}{(a_{11} + a_{12})x_3 - a_{13}}. \quad (31)$$

При этом, если тело занимает область $z > 0$, его упругое состояние определяется выражениями (19), (21) и (22).

Уравнения (1), (2) для трансверсально-изотропного тела с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси z , допускают также без каких-либо ограничений на коэффициенты a_{ij} следующее представление напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Q_1, \quad \sigma_y = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Q_1, \quad \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Q_1, \\ \tau_{xz} &= -\frac{1}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} Q_1, \quad \tau_{yz} = \frac{1}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} Q_1, \\ u &= -a_{66} \frac{\partial}{\partial y} Q_1, \quad v = a_{66} \frac{\partial}{\partial x} Q_1, \quad w = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где $Q_1 = D_1 \psi_1 + N_1 \omega_1$; $\psi_1 = \psi_1(x, y, \lambda_0 z)$ и $\omega_1 = \omega_1(x, y - \lambda_0 z)$ — произвольные квазигармонические функции, $\lambda_0^2 = a_{44}/a_{66}$, D_1 и N_1 — произвольные постоянные.

Сложив соответственно правые части равенств (19) и (32), получим более общее представление решения уравнений (1) и (2) для трансверсально-изотропного тела.

4. Вторая группа общих формул для ортотропного тела. Обобщением формул (32) на случай ортотропного тела, занимающего область $z > 0$, являются выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -n_1 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial y} + m_3 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y \partial z} + l_2 \frac{\partial^2 Q_3}{\partial x \partial z}, \\ \sigma_y &= n_2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial y} - m_1 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y \partial z} + l_3 \frac{\partial^2 Q_3}{\partial x \partial z}, \\ \sigma_z &= n_3 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial y} + m_2 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y \partial z} - l_1 \frac{\partial^2 Q_3}{\partial x \partial z}, \\ \tau_{xy} &= \left(n_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - n_5 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Q_1 - m_6 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x \partial z} + l_7 \frac{\partial^2 Q_3}{\partial y \partial z}, \\ \tau_{xz} &= -n_6 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y \partial z} + m_7 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x \partial y} + \left(l_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - l_5 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) Q_3 \\ \tau_{yz} &= n_7 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial z} + \left(m_4 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m_5 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Q_2 - l_6 \frac{\partial^2 Q_3}{\partial x \partial y}, \\ u &= -a_{66} \frac{\partial Q_1}{\partial y} + l_8 a_{55} \frac{\partial Q_3}{\partial z}, \\ v &= n_8 a_{66} \frac{\partial Q_1}{\partial x} - a_{44} \frac{\partial Q_2}{\partial z}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\omega = m_8 a_{44} \frac{\partial Q_2}{\partial y} - a_{55} \frac{\partial Q_3}{\partial x},$$

где $Q_k = D_k \psi_k + N_k \omega_k$ ($k=1, 2, 3$); $\psi_k(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$, $\omega_1(x, \mu_0 y, -\lambda_0 z)$, $\omega_2(-x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$, $\omega_3(x, -\mu_0 y, \lambda_0 z)$ — произвольные квазигармонические функции; $n_i, m_i, l_i, D_k, N_k, \lambda_0, \mu_0$ — произвольные постоянные. Полагая в формулах (33) $Q_2 = Q_3 = 0$ и удовлетворяя уравнениям (1) и (2), получаем значения коэффициентов n_i в форме

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{a_{66}(a_{12}n_8 + a_{22}) + (n_8\beta_{64} - \beta_{65})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ n_2 &= \frac{a_{66}(a_{11}n_8 + a_{21}) + (n_8\beta_{64} - \beta_{65})(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ n_8 &= \frac{\beta_0\beta_{45} + a_{44}a_{21}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})}{\beta_0 + a_{44}a_{21}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})}, \\ n_4 &= n_8, \quad n_3 = n_6 - n_7, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\beta_{ij} = a_{ii}/a_{jj}$ ($i, j=4, 5, 6$), $\beta_0 = (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}) - (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.

Значения m_i и l_i для $i=1, 2, 3, 8$ получаются однократной циклической заменой индексов коэффициентов a_{ij} в выражениях n_i и m_i с соответствием по схеме

$$n_i \rightarrow m_i \rightarrow l_i \rightarrow n_i \quad (i=1, 2, 3, 8). \quad (35)$$

Согласно этой схеме значения m_i и l_i получаются соответственно на основании выражений n_i и m_i при однократной замене индексов a_{ij} по правилу: $a_{11} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{33} \rightarrow a_{11}$, $a_{44} \rightarrow a_{55} \rightarrow a_{66} \rightarrow a_{44}$, $a_{12} \rightarrow a_{23} \rightarrow a_{31} \rightarrow a_{12}$, ...

Все остальные значения коэффициентов m_i, l_i и λ_0, μ_0 определяются по формулам:

$$\begin{aligned} m_4 &= m_8, \quad m_3 = m_6 - m_7, \quad m_5 = 1, \quad m_6 = \beta_{46}, \quad m_7 = m_8\beta_{45}; \\ l_4 &= l_8, \quad l_3 = l_6 - l_7, \quad l_5 = 1, \quad l_6 = \beta_{54}, \quad l_7 = l_8\beta_{56}; \\ \lambda_0^2 &= a_{44}/a_{66} = \beta_{46}, \quad \mu_0^2 = a_{44}/a_{55} = \beta_{45}. \end{aligned} \quad (36)$$

При этом формулы (33) имеют место, если a_{ij} удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} n_1 - n_8 &= \beta_{45}, \quad n_2 - 1 = n_8\beta_{54}, \quad m_1 - m_8 = \beta_{56}, \\ m_2 - 1 &= m_8\beta_{65}, \quad l_1 - l_8 = \beta_{64}, \quad l_2 - 1 = l_8\beta_{46}, \end{aligned} \quad (37)$$

представляющим шесть ограничений на упругие постоянные a_{ij} .

Путем наложения решений (19) и (33) получим самое общее представление для напряжений и перемещений ортотропного тела. Для его существования необходимо, чтобы коэффициенты a_{ij} удовлетворяли 9 ограничениям в форме равенств (17) и (37).

В случае трансверсально-изотропного тела равенства (17) и два из равенств (37) в силу соотношений (21) обращаются в тождества. Поскольку при этом $l_8 = 1/m_8$, $l_1 = m_2/m_8$, $l_2 = m_1/m_8$, то из всех остальных равенств (37) независимыми будут

$$m_1 - m_8 = \beta_{46}, \quad m_2 - m_8\beta_{64} = 1. \quad (38)$$

Используя формулы (19) и (33), можно получить решения основных граничных задач для упругого ортотропного полупространства и ортотропного пространства с разрезами на плоскости $z=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. — Тбилиси, 1968.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М., 1977.

Кафедра теоретической механики