

# ВЕСТНИК

Белорусского государственного  
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

2

1981

**Главная редакционная коллегия журнала:**

М. Д. ТИВО (*главный редактор*),  
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (*ответственный секретарь*), В. С. ГРИ-  
ГОРЬЕВ, Г. П. ДАВИДЮК, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ  
(*зам. главного редактора*), А. М. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУП-  
РУН, И. Г. ТИЩЕНКО

**Редакционная коллегия серии:**

А. М. САРЖЕВСКИЙ (*ответственный редактор*),  
Ю. С. БОГДАНОВ (*зам ответственного редактора*), В. И. ВЕ-  
ДЕРНИКОВ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Е. А. ИВА-  
НОВ, В. В. ИЗОХ, Л. И. КОМАРОВ, А. И. КОМЯК, Н. А. ЛЕ-  
ПЕШИНСКИЙ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, Б. Ю. ХА-  
НОХ (*ответственный секретарь*), А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ,  
С. С. ШУШКЕВИЧ



УДК 681.142.01

А. А. КОЛЯДА, В. К. КРАВЦОВ

## О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РЕАЛИЗАЦИИ АРИФМЕТИКИ ОБОБЩЕННЫХ СОК

В настоящей работе на основе анализа алгоритмов арифметики, разработанных в [1—4], сформулированы требования и рекомендации, которыми следует руководствоваться при выборе модулей обобщенных систем остаточных классов (ОСОК). Определен набор функциональных узлов (ФУ) арифметического устройства (АУ), который наиболее полно согласуется с особенностями алгоритмов арифметики ОСОК, а также получены оценки аппаратных затрат, необходимых для выполнения всех операций в ОСОК с расширенным интервальным индексом по рангу (ОСОК РИИР) [4, 5] за максимальное и минимальное времена.

Остановимся сначала на вопросе о выборе системы модулей  $p_1, p_2, \dots, p_{n+m}$  для определения чисел в ОСОК и выполнения арифметических операций. Анализ алгоритмов арифметики нормированных ОСОК и оценок диапазонов изменения интервального индекса (ИИ) результатов арифметических операций приводит к следующему.

1. Наряду с основной системой попарно взаимно простых модулей  $p_1, p_2, \dots, p_n$  необходима система дополнительных модулей, взаимно простых как между собой, так и с  $P$ . Диапазон  $Q$ , соответствующий этим модулям, должен удовлетворять условию:  $Q \geq \frac{Q_{\text{пр}}}{P}$ , благодаря которому ИИ произведение любых двух целых чисел из области определения операций полностью определяется остатками по модулям диапазона  $PQ$ .

2. Для упрощения работы с интервальными индексами значение  $r_{\text{max}}$  и один из дополнительных модулей, называемый модулем ИИ и обозначаемый через  $p_{n+1}$ , необходимо согласовать так, чтобы выполнялось неравенство

$$Q_{\text{ас}} \leq p_{n+1} \leq p^*, \quad (1)$$

где  $p^*$  — максимально возможное значение модуля. Более того, если  $Q_{\text{ас}} < Q_{\text{пд}} \leq p^*$ , то  $p_{n+1}$  целесообразно выбрать в соответствии с неравенством

$$Q_{\text{пд}} \leq p_{n+1} \leq p^*. \quad (2)$$

3. Один из дополнительных модулей (обозначим его через  $p_{n+2}$ ) удобно выбрать равным  $S$ . Это приводит к простой процедуре деления на  $S$  в алгоритме умножения дробей.

4. Если  $Q_{\text{пд}} \leq p^*$ , то, согласно п. п. 2, 3,  $Q = p_{n+1}p_{n+2}$ , где  $p_{n+1}$  удовлетворяет (2), а  $p_{n+2} = S$ . Если же  $Q_{\text{пд}} > p^*$ , то  $Q = p_{n+1}p_{n+2}p_{n+3}$ , где  $p_{n+1}$  удовлетворяет (1),  $p_{n+2} = S$ ,  $p_{n+3} > \frac{Q_{\text{пр}}}{Pp_{n+1}p_{n+2}}$ .

5. Так как в алгоритме определения знака числа  $A$  вычисление  $r_A^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-2$ ) удобно производить в диапазоне  $Q_k^{\text{зн}} = p_{k+1}p_{k+2}$ , а  $r_A^{(k-1)}$  — в диапазоне  $Q_{n-1}^{\text{зн}} = p_n p$  ( $p \neq p_n$ ), то, согласно [1], необходимо,

чтобы  $p_{k+2} \geq 2k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-2$ ) и  $p \geq 2(n-1)$ . Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что  $m = 2$ .

При реализации алгоритмов арифметики исследуемых систем широко могут быть использованы табличные методы. Нетрудно проверить, что для выполнения всех операций ОСОК, в ЭВМ достаточно иметь следующие функциональные узлы и набор констант.

I. Сумматоры/вычитатели  $СВ_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+2$ ) по модулям  $p_1, p_2, \dots, p_{n+2}$ .

II. ФЧП $n$  — формирователь числа переполнений по основаниям  $p_1, p_2, \dots, p_n$  при алгебраическом суммировании двух чисел. ФЧП $n$  по входным данным  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) определяет величину

$$\pi = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\alpha_i \pm \beta_i}{p_i} \right].$$

III. СПУИ — схема проверки условия на ИИ. В случае рассматриваемых ОСОК (СПУИ для ИИ  $r_A$  проверяет неравенство  $r_A^{(n)} + 1 - r_{\max} \leq r_A < r_{\max} + r_A^{(n)}$  и формирует признак переполнения.

IV. УВ ( $p_i$ ) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — множители с весом по модулю  $p_i$ , вычисляющие величины  $|P_i \alpha_i \beta_i|_{p_i}$  ( $0 \leq \alpha_i, \beta_i < p_i$ ) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

V. Умножители  $У_{n+1}$  и  $У_{n+2}$ , определяющие произведение вычетов соответственно по модулям  $p_{n+1}$  и  $p_{n+2}$ .

VI. ЧВПМ ( $p_i$ ) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — таблицы для получения частного взвешенного произведения вычетов и модуля, т. е. следующей величины:

$$\left[ \left[ \frac{P_i \alpha_i \beta_i}{p_i} \right] \right]_{p_i} \quad (0 \leq \alpha_i, \beta_i < p_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

VII. ПЦ ( $p_{i_1}, p_{i_j}$ ) ( $j = 2, 3, \dots, n+2$ ) — преобразователи цифр, где  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n+2}}$  — упорядоченная по убыванию система модулей  $p_1, p_2, \dots, p_{n+2}$ . ПЦ ( $p_{i_1}, p_{i_j}$ ) по входной величине  $\alpha \in [0, p_{i_1})$  определяет  $|\alpha|_{p_{i_j}}$ .

VIII. САИ  $k$  — схемы анализа ИИ  $r_A^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Роль САИ  $k$  состоит в формировании двух признаков  $H_k$  и  $Z_k$ , соответствующих индексу  $r_A^{(k)}$ .

Признаки  $H_k$  и  $Z_k$  определяются следующим образом:

$$H_k = \begin{cases} 0, & \text{если } r_A^{(k)} \in (0, (r_{\max}^H)_k) \\ 1, & \text{если } r_A^{(k)} \notin (0, (r_{\max}^H)_k), \end{cases}$$

$$Z_k = \begin{cases} 0, & \text{если } r_A^{(k)} \leq 0 \\ 1, & \text{если } r_A^{(k)} > (r_{\max}^H)_k. \end{cases}$$

В зависимости от того, используются ли при анализе  $r_A^{(k)}$  сумматоры и множители или анализ полностью выполняется по схеме, входными параметрами САИ  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) соответственно являются позиционный код  $r_A^{(k)}$  ( $r_A^{(k)} = a_2^{(k)} p_{k+1} + a_1^{(k)}$ ) или остаточный код  $r_A^{(k)}$  ( $r_A^{(k)} = (\rho_1^{(k)}, \rho_2^{(k)})$ ).

В первом случае цифры  $a_2^{(k)}$  и  $a_1^{(k)}$  должны быть предварительно определены по соотношениям:

$$a_1^{(k)} = \rho_1^{(k)}, \quad a_2^{(k)} = \left| \frac{\rho_2^{(k)} - \rho_1^{(k)}}{p_{k+1}} \right|_{p_{k+2}} \quad k = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$\text{для } k = n-1, \quad a_2^{(n-1)} = \left| \frac{\rho_2^{(n-1)} - \rho_1^{(n-1)}}{p_n} \right|_p.$$

Входной величиной САИ  $n$  является  $r_A$ .

IX. Формирователь знака (ФЗ) и формирователь ранга (ФР). Эти устройства выполняют окончательное формирование соответственно знака числа  $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, r_A)$  и ранга нормированного остаточного кода  $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ .

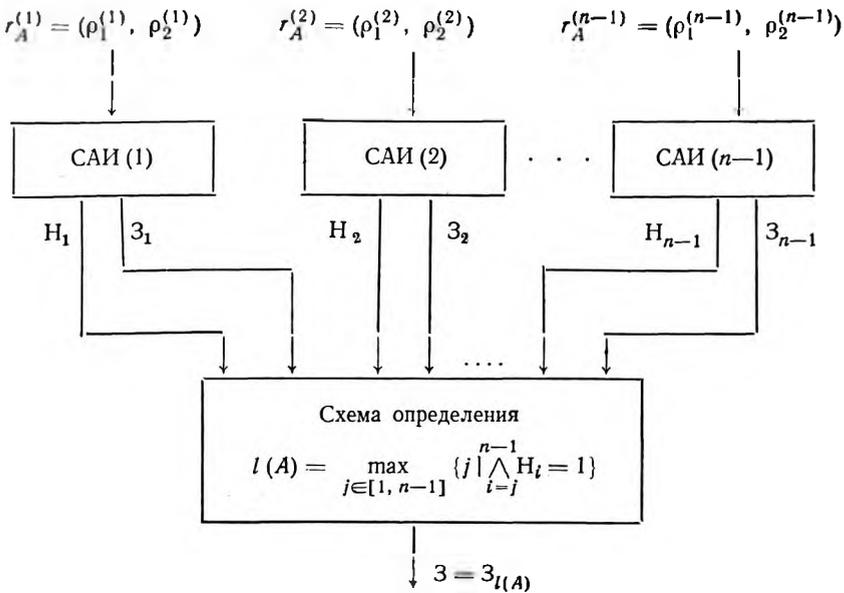


Рис. 1. Функциональная схема ФЗ

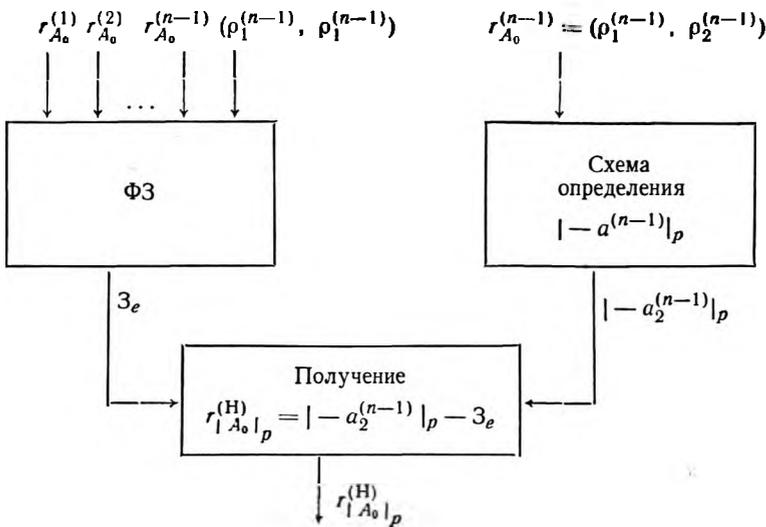


Рис. 2. Функциональная схема ФР

На рис. 1 и 2 изображены функциональные схемы рассматриваемых устройств. Для определенности предполагается, что на рис. 1 входными величинами устройства САИ  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) является остаточный код индекса  $r^{(k)}$ , а на рис. 2 — остаточный код индекса  $r_{A_0}^{(k)}$ , где  $A_0 = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, 0)$ . Формирование ранга и знака чисел может выполняться одной схемой, которую назовем формирователем знака/ранга (ФЗР).

Если вычисление  $|-a_2^{(n-1)}|_p$  так же, как и анализ  $r_A^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), выполнять по схеме, при определении знака числа или ранга потребуется лишь один такт после того, как  $r_A^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) получены.

Х. Константы:

- а)  $\left| \frac{1}{p_j p_i} \right|_{p_i}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ );
- б)  $\left| \frac{1}{p_j} \right|_{p_i}$  ( $j = 1, 2, \dots, n; i = n+1, n+2$ );
- в)  $\left| \frac{1}{p_{n+2} p^2} \right|_{p_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\left| \frac{1}{p_{n+2} p} \right|$ ,  $|P|_{p_{n+1}}$ ,  $|P|_{p_{n+2}}$ ;
- г)  $|P_{ik}^{-1}|_{p_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, k; k = 2, 3, \dots, n-1$ );
- д)  $\left| \frac{1}{p^{(k)}} \right|_{p_{k+1}}$ ,  $\left| \frac{1}{p^{(k)}} \right|_{p_{k+2}}$  ( $k = 2, 3, \dots, n-2$ );
- ж)  $|p_n|_p$ .

Если  $p = p_j$  ( $j \neq n$ ), то наряду с константой  $\left| \frac{p_n}{p_j} \right|_{p_j}$  необходимо располагать таблицей, которая по входному данному  $\tilde{\alpha}_j$  вычисляет  $\left[ \left\lfloor \frac{p_n \tilde{\alpha}_j}{p_j} \right\rfloor \right]_{p_j}$ .

Общее число  $N(n+2)$  констант, приведенных в п. Х, составляет  $N(n+2) = n(n+2) + \frac{(n-2)(n+5)}{2} + 3$ .

При этом число констант, соответствующее отдельным модулям, определяется соотношением

$$N(p_i) = \begin{cases} 2(n-1), & \text{если } i = 1, 2, 3, 4; \\ 2(n+1) - i, & \text{если } i = 5, 6, \dots, n-1; \\ n+1, & \text{если } i = n, n+2; \\ n+3, & \text{если } i = n+1. \end{cases}$$

В последней формуле предполагается, что  $p = p_{n+1}$ . Приведенные соотношения для  $N(n+2)$  и  $N(p_i)$  справедливы для  $n \geq 4$ . При  $n = 2, 3$  общее число констант соответственно составляет 11 и 20.

Пусть  $R_i = \lceil \log_2 p_i \rceil$ . Тогда для хранения перечисленных констант требуется память емкостью  $M(n+2) = \sum_{i=1}^{n+2} R_i N(p_i)$ . Так, если  $n = 7$ ,  $R_1 = R_2 = \dots = R_{n+2} = 5$ , то  $M(n+2) = 480$  бит.

Операция	Время выполнения			
	минимальное		максимальное	
	ОСОК I рода	ОСОК РИИР	ОСОК I рода	ОСОК РИИР
Алгебраическое сложение с анализом на переполнение	3	$4 + \lceil \log_2 n \rceil$	3	$2n + 3$
Определение знака числа или ранга	$2 + \lceil \log_2 (n+1) \rceil$		$2n + 1$	
Умножение целых с анализом на переполнение	$6 + \lceil \log_2 n \rceil$		$3(n+1)$	$5n + 3$
Умножение дробей с округлением	$9 + 2 \lceil \log_2 (n+1) \rceil$	$8 + 2 \lceil \log_2 (n+1) \rceil$	$6(n+1)$	$6n + 5$

Набор функциональных узлов, приведенный в п. п. I—IX обеспечивает минимальную скорость выполнения арифметических операций в ОСОК.

В таблице приведены минимальные и максимальные времена выполнения арифметических операций в нормированных ОСОК. В качестве единицы измерения используется модульный такт.

Легко проверить, что для обеспечения минимального времени выполнения каждой из арифметических операций в АУ наряду с устройствами, перечисленными в п. п. VII—IX, достаточно включить следующие функциональные узлы и набор констант.

1) Несколько сумматоров  $C(p_i)$  по каждому модулю  $p_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+2$ ).

2) Таблицы  $T_j n i$  ( $j=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n+2; i \neq j$ ),  $T_j k k+1$  ( $j=1, 2, \dots, k; k=1, 2, \dots, n-1$ ),  $T_j k k+2$  ( $j=1, 2, \dots, k; k=1, 2, \dots, n-2$ ),  $T_j(p)$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ).  $T_j l i$  по входному данному  $\alpha_j$

определяет величину  $\left| \frac{\alpha_j p}{p_j} \right|_{p_i}$ , а  $T_j(p)$  — величину  $\{ [p_n \alpha_j / p_j] \}_p$ .

Общее число приведенных таблиц составляет  $2n^2$ . Каждая из них может быть реализована либо по схеме, либо путем хранения в памяти,

объем которой в битах выражается формулой  $M = \sum_{i=1}^n N_i p_i R_i$ , где  $N_i = 3n + 1 - 2i$ .

Например, если  $32 > p_i \geq 16$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $n=7$ , то  $32 \times 500 > M > 16 \times 500$ .

3) Константы  $|P|_{p_{n+1}}$ ,  $|P|_{p_{n+2}}$ ,  $\left| \frac{1}{p_{n+2} p_i^2} \right|_{p_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),  $\left| \frac{1}{p_{n+2} p^k} \right|_{p_{n+1}}$ ,  $\left| \frac{1}{p^{(k)}} \right|_{p_{k+1}}$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ),  $\left| \frac{1}{p^{(k)}} \right|_{p_{k+2}}$  ( $k=1, 2, \dots, n-2$ ),  $|p_n|_p$  — всего  $3n + 1$  констант.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 1, с. 12.
2. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 3, с. 3.
3. Коляда А. А., Кравцов В. К. Ранг числа и умножение дробей в нормированных обобщенных СОК.—Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4111-76. Деп. от 29.11.76.
4. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 6.
5. Коляда А. А., Кравцов В. К.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 3, с. 57.

Поступила в редакцию  
24.08.78.

Кафедра ЭММ

УДК 539.19

А. М. ПРИМА, В. М. ПРИМА

### РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ИНТЕНСИВНОСТИ ИК ПОЛОС ЭТИЛЕНА ПО МОДЕЛИ ЭФФЕКТИВНЫХ ЗАРЯДОВ, И ВЗАИМОСВЯЗЬ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВАЛЕНТНЫХ И ДЕФОРМАЦИОННЫХ ЧАСТОТ

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных расчету электрооптических параметров и интенсивностей различных классов соединений (см., например, обзор [1]), выполненных на основе валентно-оптической теории интенсивностей [2—4]. Однако при решении прямой и обратной задач по расчету интенсивностей возникают серьезные трудности, связанные с неоднозначностью выбора знаков производ-

ных дипольного момента молекулы и большим числом параметров валентно-оптической теории в первом приближении. Эти трудности в значительной степени могут быть устранены, если для расчета интенсивностей применить известную модель эффективных зарядов [5, 6]. В последнее время эффективные заряды использованы также для расчета интенсивностей инфракрасных полос неплоских колебаний циклических молекул [7].

Представляет интерес определить отношение интенсивностей инфракрасных полос, обусловленных валентными и деформационными плоскими и неплоскими колебаниями этилена и дейтероэтилена, а также применить модель эффективных зарядов для расчета интенсивностей всех частот. При сопоставлении результатов расчета и эксперимента будем исходить из аналитических выражений для производных дипольного момента молекулы  $\vec{\mu}$  по нормальным координатам  $Q_i$ , в которые не входят коэффициенты форм нормальных колебаний.

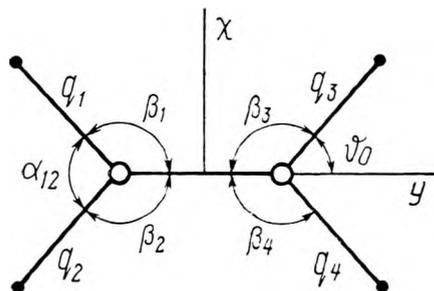


Рис. 1. Введенные естественные колебательные координаты молекулы этилена

длины связи С—Н;  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  — изменение валентных углов Н—С—Н и С—С—Н (рис. 1). Для расчета эффективных зарядов и их производных по колебательным координатам в соответствии с [8] необходимо иметь форму нормальных колебаний в двух видах:

1) смещения атомов из положения равновесия  $\vec{r}_{H_i}$ ,  $\vec{r}_{C_i}$  в общей системе координат как функций  $Q_i$ ;

2) естественные колебательные координаты  $q_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\alpha_{ik}$  как функции  $Q_i$ .

В инфракрасном спектре активны колебания трех типов симметрии: неплоские  $B_{1u}$  и плоские  $B_{2u}$ ,  $B_{3u}$  (нумерация частот соответствует [1]). В общем случае производная дипольного момента молекулы по нормальной координате представляет сумму трех частей:

$$\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial Q_i} = \frac{\partial \vec{\mu}^{(1)}}{\partial Q_i} + \frac{\partial \vec{\mu}^{(2)}}{\partial Q_i} + \frac{\partial \vec{\mu}^{(3)}}{\partial Q_i}. \quad (1)$$

Здесь  $\partial \vec{\mu}^{(1)} / \partial Q_i$  определяется постоянными эффективными зарядами  $\xi_a^{(0)}$ ;  $\frac{\partial \vec{\mu}^{(2)}}{\partial Q_i}$  — изменениями  $\xi_a$  при колебаниях [6], и  $\frac{\partial \vec{\mu}^{(3)}}{\partial Q_i}$  — поворотом постоянных поляризаций связей  $\vec{\delta}_{\alpha\beta} = \vec{d}_{\alpha\beta} + \vec{d}_{\beta\alpha}$ , где  $\vec{d}_{\alpha\beta}$ ,  $\vec{d}_{\beta\alpha}$  — поляризации соответственно атомов  $\alpha$  и  $\beta$  данной связи [8].

Направления смещений при колебаниях типа симметрии  $B_{1u}$  параллельно оси  $OZ$ , причем

$$z_{H_1} = \dots = z_{H_4} = z_{0H} Q_7, \quad (2)$$

$$z_{C_1} = z_{C_2} = z_C = z_{0C} Q_7.$$

Применяя условия Экарта, получаем

$$z_C = -\frac{2m_H}{m_C} z_H. \quad (3)$$

Подстановка (2), (3) в формулу для кинетической энергии позволяет определить нормирующий множитель

$$z_{0H} = \frac{1}{2 \sqrt{m_H \left(1 + \frac{2m}{m_C} H\right)}}. \quad (4)$$

Производная дипольного момента, обусловленная смещениями эффективных зарядов, равна

$$(\partial \mu_z^{(1)} / \partial Q_7)^{B_{1u}} = \sum_i \zeta_{H_i}^{(0)} z_{0H} + (\zeta_{C_1}^{(0)} + \zeta_{C_2}^{(0)}) z_{0C} = 2 \sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C}} \zeta_H^{(0)}. \quad (5)$$

Вследствие наличия центра симметрии

$$\partial \mu_z^{(2)} / \partial Q_7 = 0. \quad (6)$$

Аналогичным образом получаем

$$\partial \mu_z^{(3)} / \partial Q_7 = 2 \sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C}} \sigma \delta_{CH}. \quad (7)$$

Складывая выражения (5) — (7), согласно (1), получаем окончательно

$$(\partial \mu_z / \partial Q_7)^{B_{1u}} = 2 \sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C}} (\zeta_H^{(0)} + \sigma \delta_{CH}). \quad (8)$$

Для плоских колебаний типов симметрии  $B_{2u}$ ,  $B_{3u}$  форма валентного и деформационного нормального колебаний задается одинаковым способом — посредством вектора смещения

$$\vec{r}_{H_3} = \vec{a}_H Q_l.$$

Смещения остальных атомов  $H_i$  получаем посредством операций симметрии. На рис. 2, 3 показана схема смещений атомов при колебаниях  $B_{2u}$  и  $B_{3u}$  соответственно. Равновесная конфигурация характеризуется углом  $\vartheta_0 = \frac{1}{2} \text{ЛНСН}$ . Форма нормального колебания определяется модулем  $a_H$  и углом  $\vartheta_l$  наклона вектора  $\vec{a}_H$  к оси  $OY$  (см. рис. 2, 3). При колебаниях молекула остается нейтральной, поэтому

$$\Delta \zeta_{C_k} + \sum_{i=1}^2 \Delta \zeta_{k+i} = 0 \quad (k = 1, 2; i = 1, 2).$$

Вводя векторы смещений  $\vec{r}_{C_k}$ , применяя условия Экарта и нормировку, получаем

$$\left( \frac{\partial \mu_x^{(1)}}{\partial Q_l} \right)^{B_{2u}} = 2 \left( \frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C} \right) \zeta_H^{(0)} \sin \vartheta_l / \sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C} \sin^2 \vartheta_l}, \quad (9, a)$$

$$\left( \frac{\partial \mu_y^{(1)}}{\partial Q_l} \right)^{B_{3u}} = 2 \left( \frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C} \right) \zeta_H^{(0)} \cos \vartheta_l / \sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C} \cos^2 \vartheta_l}, \quad (9, б)$$

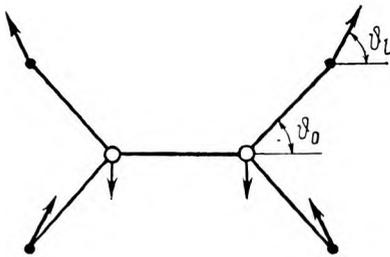


Рис. 2. Общий вид формы нормального (валентного и деформационного) колебания симметрии  $B_{2u}$

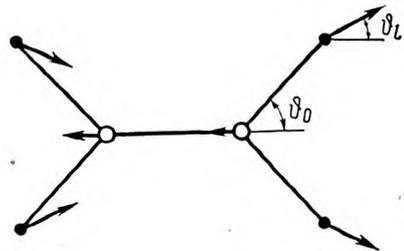


Рис. 3. Общий вид формы нормального (валентного и деформационного) колебания симметрии  $B_{3u}$

Построение естественных колебательных координат, как функций нормальных, произведено геометрически по методу М. А. Ельяшевича — Б. И. Степанова [2, 4]. Для типа симметрии  $B_{2u}$

$$q_3 = a_H \left[ \left( 1 + \frac{m_H}{m_C} \right) \cos(\vartheta_0 - \vartheta_l) - \frac{m_H}{m_C} \cos(\vartheta_0 + \vartheta_l) \right] Q_l, \quad (10)$$

$$\beta_3 = a_H \sigma \left[ \left( 1 + \frac{m_H}{m_C} \right) \sin(\vartheta_0 - \vartheta_l) - \frac{m_H}{m_C} \sin(\vartheta_0 + \vartheta_l) \right] Q_l;$$

$$\alpha_{34} = 0.$$

Заменяя в (10) знак минус на плюс, получаем формулы для  $B_{3u}$  при  $\alpha_{34} = -2\beta_3$ . Для суммы второго и третьего членов в (1) имеем следующие выражения:

$$\left( \frac{\partial \mu_x^{(2)}}{\partial Q_l} \right)^{B_{2u}} + \left( \frac{\partial \mu_x^{(3)}}{\partial Q_l} \right)^{B_{2u}} = \frac{2 \sin \vartheta_0}{\sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C} \sin^2 \vartheta_l}} \left\{ s_{CH} \left[ \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial q_1} - \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial q_2} \right] \times \right. \\ \times \left[ \left( \frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_C} \right) \cos(\vartheta_0 - \vartheta_l) - \frac{1}{m_C} \cos(\vartheta_0 + \vartheta_l) \right] + \left[ \left( \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial \beta_2} \right) + \right. \\ \left. \left. + 2\sigma_{CH} \delta_{CH} \operatorname{ctg} \vartheta_0 \right] \left[ \left( \frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_C} \right) \sin(\vartheta_0 - \vartheta_l) - \frac{1}{m_C} \sin(\vartheta_0 + \vartheta_l) \right] \right\}, \quad (11, a)$$

$$\left( \frac{\partial \mu_y^{(2)}}{\partial Q_l} \right)^{B_{3u}} + \left( \frac{\partial \mu_y^{(3)}}{\partial Q_l} \right)^{B_{3u}} = \frac{2 \cos \vartheta_0}{\sqrt{\frac{1}{m_H} + \frac{2}{m_C} \cos^2 \vartheta_l}} \left\{ s_{CH} \left[ \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial q_2} \right] \times \right. \\ \times \left[ \left( \frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_C} \right) \cos(\vartheta_0 - \vartheta_l) + \frac{1}{m_C} \cos(\vartheta_0 + \vartheta_l) \right] + \left[ \left( \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial \beta_2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{\partial \zeta_{H_1}}{\partial \alpha_{12}} \right) + \sigma_{CH} \delta_{CH} \operatorname{tg} \vartheta_0 \right] \left[ \left( \frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_C} \right) \sin(\vartheta_0 - \vartheta_l) + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{m_C} \sin(\vartheta_0 + \vartheta_l) \right] \right\}. \quad (11, б)$$

В табл. 1, 2 представлены экспериментальные данные по интенсивностям  $\Gamma$  или  $A$  ( $10^{-8}$  см<sup>2</sup>/с-молекула), производным дипольного момента  $\frac{\partial \mu}{\partial Q_l}$  (СГСЭ/г<sup>1/2</sup>), согласно [1, 9], и результаты расчета. Подставляя экспериментальные значения  $(\partial \mu / \partial Q_l)^{B_{1u}}$  неплоских колебаний в (8), получаем

$$\zeta_H^{(0)} + \sigma_{CH} \delta_{CH} = 0,62 D/\text{Å} = 0,15 e_0.$$

Для ацетилена эта величина равна  $0,93 D/\text{Å}$ . Таким образом, увеличение порядка связи приводит к увеличению эффективных зарядов. Для ацетилена величина  $\sigma \delta$  мала в сравнении с  $\zeta_H^{(0)}$ . Естественно предположить, что отношение  $\sigma \delta / \zeta_H^{(0)}$  в достаточно высоком приближении является одинаковым для этих соединений, поэтому можно принять, что

$$\zeta_H^{(0)} = 0,62 D/\text{Å} = 0,13 e_0; \quad \sigma \delta = 0.$$

Применение формул (9), (11) требует вычисления углов  $\vartheta_l$ . С этой целью решена задача по нахождению коэффициентов форм колебаний на основе системы силовых постоянных Б. И. Степанова [2, 4]. Отношение коэффициентов форм, согласно (10), определяет значения  $\vartheta_l$ . В табл. 3 представлены разности  $\vartheta_0 - \vartheta_l$  для валентных и деформационных колебаний. Силовое поле имеет такие свойства, что направления смещений атомов Н при валентных колебаниях отклоняются от направления связи на  $3^\circ$  и на  $0^\circ$ , при деформационных колебаниях — на  $90^\circ$ .

Распределение интенсивностей определяется прежде всего основной частью производной дипольного момента  $\partial \mu^{(i)} / \partial Q_l$ . Сравнение формул (8), (9) показывает, что интенсивности всех частот плоских колебаний должны быть меньше интенсивности частоты  $\nu_7$  неплоского колебания,

Интенсивности  $A_I$  и производные дипольного момента по нормальным координатам  $\partial\mu/\partial Q_I$  этилена по данным эксперимента и расчета

Симметрия колебания	Номер колебания	$C_2H_4$					
		Эксперимент			Расчет		
		$\nu$ , см <sup>-1</sup>	$A_I$ [9]	$\partial\mu/\partial Q_I$	I	II	III
$B_{2u}$	9	3105,9	12,4	$\pm 59,6$	79,9	70,9	55,9
$B_{3u}$	11	2988,7	6,73	$\pm 43,9$	52,1	44,1	44,1
$B_{3u}$	12	1443,5	4,86	$\pm 37,3$	86,9	53,8	37,6
$B_{1u}$	7	949,4	39,7	$\pm 106,7$	106,7	106,7	106,7
$B_{2u}$	10	826	0,26	$\pm 8,6$	55,5	3,3	6,3

Таблица 2

Интенсивности  $\Gamma$  и производные дипольного момента дейтеротилена согласно эксперименту и расчету

Симметрия колебания	Номер колебания	$C_2D_4$					
		Эксперимент			Расчет		
		$\nu$ , см <sup>-1</sup>	$\Gamma$ [9]	$\partial\mu/\partial Q_I$	I	II	III
$B_{2u}$	9	2345	520,1	$\pm 43,1$	61,5	57,2	45,9
$B_{3u}$	11	2200	346,4	$\pm 34,1$	42,5	35,0	34,0
$B_{3u}$	12	1078	481,4	$\pm 27,2$	63,3	38,9	26,9
$B_{1u}$	7	720	5794	$\pm 77,1$	77,1	77,1	77,1
$B_{2u}$	10	589	(7,3)	$\pm 2,5$	39,7	2,2	4,3

Таблица 3

Разности углов  $\vartheta_0 - \vartheta_I$ , характеризующие форму нормальных колебаний

Соединения	$B_{2u}$		$B_{3u}$	
	$\vartheta_0 - \vartheta_9$	$\vartheta_0 - \vartheta_{10}$	$\vartheta_0 - \vartheta_{11}$	$\vartheta_0 - \vartheta_{12}$
$C_2H_4$	3°12'	89°12'	-0°15'	93°40'
$C_2D_4$	3°3'	85°44'	0°32'	98°34'

так как формулы (11) отличаются от (8) в основном дополнительным множителем  $\sin \vartheta_I$  или  $\cos \vartheta_I$ , меньших единицы. Интенсивность валентной частоты  $\nu_9$  типа  $B_{2u}$  должна быть больше интенсивности валентной частоты  $\nu_{11}$  типа  $B_{3u}$ , поскольку в (9, а) входит множитель  $\sin \vartheta_9 \approx \sin \vartheta_0 = 0,85$ , который больше множителя  $\cos \vartheta_{11} \approx \cos \vartheta_0 = 0,52$  в (9, б). Интенсивность деформационной частоты  $\nu_{10}$  типа  $B_{2u}$  меньше интенсивности деформационной частоты  $\nu_{12}$ , так как  $\sin \vartheta_{10} \approx \sin \left( \vartheta_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \vartheta_0$  меньше  $\cos \vartheta_{12} \approx \left| \cos \left( \vartheta_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right| = \sin \vartheta_0$ . Интенсивность валентной частоты  $\nu_9$  больше интенсивности деформационной  $\nu_{10}$ , поскольку  $\sin \vartheta_9 > \sin \vartheta_{10}$ .

В столбце I табл. 1 и 2 даны вычисленные значения  $\partial\mu^{(1)}/\partial Q_I$  по значению  $\xi_{\mu}^{(0)} = 0,62 D/\text{Å}$ . Вариант расчета I показывает отношение интенсивностей частот в основном правильно, но весьма приближенно по чис-

ленному значению, особенно для деформационных частот плоских колебаний. Соответствие данных расчета и эксперимента значительно улучшается с учетом изменения эффективных зарядов при колебаниях посредством  $\partial\mu^{(2)}/\partial Q_i$ . Согласно формулам (11), уменьшение производной дипольного момента больше для частот  $\nu_9$  и  $\nu_{10}$  типа  $B_{2u}$ , чем для  $\nu_{11}$  и  $\nu_{12}$  типа  $B_{3u}$ , поскольку множитель  $\sin \vartheta_0$  в формуле (11, а) больше  $\cos \vartheta_0$  (11, б). Вариант расчета II целесообразно произвести при диагональной матрице производных эффективных зарядов, т. е. при

$$\frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial q_2} = \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \alpha_{12}} = 0; \quad s_{CH} \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial q_1} = -0,07 \frac{D}{\text{Å}}; \quad \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \beta_1} = -0,38 \frac{D}{\text{Å}}.$$

Три параметра удовлетворительно определяют интенсивности всех инфракрасных полос. Окончательный вариант расчета III выполнен при условии, что основную часть производной дипольного момента молекулы составляет  $\partial\mu^{(1)}/\partial Q_i$ . Сумма величин  $\partial\mu^{(2)}/\partial Q_i$  и  $\partial\mu^{(3)}/\partial Q_i$  вносит поправки и меньше по модулю основной части, поэтому в расчете параметров экспериментальные значения  $\partial\mu/\partial Q_i$  приняты со знаком, который следует из формул. В результате получены следующие значения параметров

$$bD/\text{Å}: \quad \zeta_H^{(0)} = 0,57; \quad \zeta_H^{(0)} + \sigma\delta = 0,639; \quad s_{CH} \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial q_1} = -0,118; \quad s_{CH} \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial q_2} = 0,059; \\ \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \alpha_{12}} = -0,478; \quad \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \beta_2} - \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \alpha_{12}} = -0,103.$$

Следует отметить, что отрицательный знак  $s_{CH} \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \beta_1} - \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \alpha_{12}}$  соответствует тому, что растяжение связи С—Н и особенно увеличение валентного угла С—С—Н вызывает уменьшение полярности связи С—Н.

Параметры  $s_{CH} \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial q_2}$ ,  $\frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \beta_2} - \frac{\partial \zeta_{H_1}^0}{\partial \alpha_{12}}$ , характеризующие более далекие влияния, значительно меньше по величине остальных параметров.

Все полученные формулы применимы для молекул замещенных этилена симметрии  $D_{2h}$ .

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. Д. С. Умрейко за интерес и содействие в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свердлов Л. М., Ковнер М. А., Крайнов Е. П. Колебательные спектры многоатомных молекул.— М., 1970.
2. Волькенштейн М. В., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул.— М.— Л., 1949, т. 2.
3. Волькенштейн М. В.— Докл. АН СССР, 1941, т. 32, с. 185.
4. Волькенштейн М. В., Грибов Л. А., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул.— М., 1972.
5. Wilson E. B., Decius J. C., Cross P. S. Molecular vibration.— Mc Crow-Hill,— New-York, 1955, p. 41.
6. Decius J. C.— J. Mol. Spectrosc., 1975, v. 57, p. 348.
7. Yozo Kakiuti, Minori Akiyama, Hiroshi Saito.— J. Mol. Spectrosc., 1976, v. 61, p. 164.
8. Прима А. М., Прима В. М.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 1, с. 6.
9. Golike R., Mills J. M., Crawford B.— J. Chem. Phys., 1956, v. 25, p. 1266.

Поступила в редакцию  
06.12.78.

НИИ ПФП, БПИ

УДК 681.142.01

А. А. КОЛЯДА, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

### БЫСТРОДЕЙСТВИЕ АУ В ОБОБЩЕННЫХ СОК

Алгоритмы арифметики обобщенных систем остаточных классов (ОСОК) обладают поточной структурой и при реализации на ЭВМ вычислительных процедур выполнение операций, зависящих от результа-

тов предшествующих операций, может быть начато задолго до полного получения этих результатов [1]. Предложенное в [1] арифметическое устройство (АУ) не только выполняет каждый из алгоритмов арифметики ОСОК в отдельности за минимальное число модульных тактов, но и способно функционировать в соответствии со структурой алгоритмов арифметики, т. е. в поточном режиме.

В данной работе проведен сравнительный анализ скоростных характеристик ОСОК и позиционных систем счисления (ПСС). Показано, что в ОСОК можно достичь более высокого быстродействия, чем в ПСС.

**1. Сравнение времен выполнения арифметических операций в ОСОК и ПСС.** Время работы некоторой логической схемы (ЛС) при однократном обращении к ней определяется числом логических элементов (ЛЭ) (числом уровней) в самой длинной цепочке ЛЭ, по которой есть путь от входа ЛС к ее выходу и временем  $t_3$  задержки в ЛЭ. Будем считать, что у всех использующихся элементов  $t_3$  одно и то же.

Для определения времен выполнения операций в ОСОК оценим длительность  $t_{MT}$  модульного такта, т. е. минимальное время, за которое может выполнить свою функцию любой из элементарных ФУ, описанных в [1]. В рассматриваемом АУ указанную величину следует увеличить на время  $t_p$  записи слова в регистр. Нетрудно проверить, что все используемые в [1] функциональные узлы могут быть реализованы таблично и с помощью небольших быстродействующих запоминающих устройств (ПЗУ), функционирующих как комбинационные схемы [2, 3]. В этом случае  $t_{MT} = t_d + t_4 + t_p$ , где  $t_d$  — время дешифрации адреса слова ПЗУ;  $t_4$  — время чтения слова.

Обозначим через  $R_{max}$  число битов, требующееся для представления вычетов по наибольшему из модулей ОСОК. Тогда при использовании ЛЭ с количеством входов  $R_{max}$  и  $2R_{max}$  можно достичь нижней оценки времени  $t_{ПЗУ} = t_d + t_4$ , составляющей  $2t_3$  [2—5]. Таким образом,

$$t_{MT} \geq 2t_3 + t_p. \quad (1)$$

Используя (1), можно оценить время выполнения любой операции в ОСОК. Перейдем к ПСС.

Согласно [2, 6], самой быстродействующей схемой суммирования в позиционных ЭВМ считается комбинационный сумматор со сквозными переносами, работа которого описывается следующими булевыми соотношениями:

$$p_i = p_0 F_1 F_2 \dots F_i + D_1 F_2 F_3 \dots F_i + D_2 F_3 F_4 \dots F_i + \dots + D_{i-1} F_i + D_i, \quad (2)$$

$$s_i = x_i \bar{y}_i \bar{p}_{i-1} + \bar{x}_i y_i \bar{p}_{i-1} + \bar{x}_i \bar{y}_i p_{i-1} + x_i y_i p_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  — число битов в слове;  $D_j = x_j y_j$ ,  $F_j = \bar{x}_j y_j + x_j \bar{y}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, i$ );  $x_i, y_i$  — значения  $i$ -го разряда слагаемых;  $p_i$  — значение переноса из  $i-1$ -го разряда;  $s_i$  — значение  $i$ -го разряда суммы.

Используя ЛЭ с  $R$  входами, соотношения (2) можно получить за  $t_c = 5 + \lceil \log_R N + 1 \rceil$  логических уровней.

Самой быстродействующей схемой умножения в позиционных ЭВМ, способной работать в поточном режиме, является дерево сумматоров [7], состоящее из  $\lceil \log_2 N \rceil$  уровней (рядов)  $2N$ -разрядных сумматоров со сквозными переносами. Сумматоры соседних уровней отделяются регистрами. Время работы такого умножителя определяется соотношением  $t_y = \lceil \log_2 N \rceil ((5 + \lceil \log_R 2N \rceil) t_3 + t_p)$ .

В таблице приведены скоростные характеристики ОСОК и ПСС для конкретных значений диапазона  $2^N$  и характеристик сложности ЛЭ. Для определения числа основных модулей СОК используется следующее соотношение:  $2(p_{cp})^{n+1} = 2^N$ , где  $p_{cp}$  — средняя величина модуля ОСОК. Величина максимального модуля  $p_{max}$  выбирается так, чтобы  $(p_{max})^2$  не превышало емкости применяемых ПЗУ. ОСОК обладает более высоким быстродействием, чем ПСС, особенно при работе с целыми числами (табл. 1). При этом следует отметить, что схема умножения позиционных кодов с помощью дерева сумматоров требует для своей реализа-

ции чрезвычайно большого объема оборудования и на практике применяется очень редко [7].

Скоростные характеристики ОСОК и ПСС

N		32—36	36—64	16	32—36	32—36	36	36		
n		6,7	8,15	3	6,7	6,7	6,7	6,7		
P <sub>ср</sub>		16	16	16	16	16	16	16		
R		2	2	2	3	2	2	2		
t <sub>p</sub>		1	1	1	1	2	1	1		
t <sub>пзу</sub>		2	2	2	2	2	2	3		
Тип сумматора		сквозн. перенос	груп. перенос	груп. перенос						
Сложение	ОСОК	Грода	9	9	9	9	12	9	12	
		РИИР	21	24	18	21	28	21	28	
	ПСС	12	12	11	8	13	14	14		
Умножение	ОСОК	Грода	умн. целых	27	30	24	27	36	27	36
			умн. дроб.	45	48	39	45	60	45	60
	РИИР		умн. целых	27	30	24	27	36	27	36
			умн. дроб.	42	48	36	42	56	42	56
	ПСС	78	78	44	36	84	126	126		
Эффект поточности	k	целые	5,3	6,0	4,66	5,3	5,3	5,3	5,3	
		дроб.	1,9	2,0	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	
	k	целые	10,0	10,0	5,2	4,99	8,0	15,55	11,66	
		дроб.	2,98	2,5	1,6	1,33	2,2	4,3	3,2	

Примечание. Время измеряется числом логических уровней.

**II. Повышение быстродействия ОСОК за счет поточной структуры алгоритмов арифметики.** Отмечалось, что рассматриваемое АУ может работать в поточном режиме, поэтому, если выполняемая программа содержит независимые участки, время ее реализации в этом АУ существенно уменьшается. В отличие от ПСС производительность АУ в ОСОК может быть повышена и при выполнении плохо распараллеливаемых или вообще нераспараллеливаемых вычислительных процедур.

Рассмотрим рекуррентное соотношение 1-го порядка:

$$y_m = ay_{m-1} + b, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Распараллеливание его в позиционных ЭВМ весьма затруднительно. Напротив, при реализации (3) в ОСОК возможно совмещение выполнения операций. Пусть в (3) все величины — целые числа. Тогда, сразу после первого такта умножения  $a$  на  $y_{m-1}$  может быть начато сложение, а после 3-го такта — умножение на  $y_m$  и т. д. (см. [1]). В результате  $M$  итераций определяется за время  $t_{M, \text{ОСОК}}^M = (3M + 3 + 1) \log_2(n + 1) [1] t_{\text{МТ}}$ . Если же в (3) дробные числа, то  $M$  итераций вычисляется за время

$t_{\text{ОСОК}} = (M(8 + \lceil \log_2(n+1) \rceil) + 3 + \lceil \log_2(n+1) \rceil) t_{\text{МТ}}$ .

По сравнению со случаем, когда поточный режим не применяется, скорость вычислений увеличивается в

$$k_1 = \begin{cases} \frac{2M(5 + \lceil \log_2(n+1) \rceil)}{3M + 3 + \lceil \log_2(n+1) \rceil} \text{ раз, если в (3) целые числа,} \\ \frac{3M(4 + \lceil \log_2(n+1) \rceil)}{M(8 + \lceil \log_2(n+1) \rceil) + 3 + \lceil \log_2(n+1) \rceil} \text{ раз, если в (3) дробные числа.} \end{cases}$$

По сравнению с ПСС скорость вычисления (3) увеличивается в

$$k_2 = \begin{cases} \frac{M(t_c + t_v)}{(3M + 3 + \lceil \log_2(n+1) \rceil) t_{\text{МТ}}} \text{ раз, если в (3) целые числа,} \\ \frac{M(t_c + t_v)}{M(8 + \lceil \log_2(n+1) \rceil) + 3 + \lceil \log_2(n+1) \rceil t_{\text{МТ}}} \text{ раз, если в (3) дробные числа.} \end{cases}$$

Рассмотрим рекуррентное соотношение 2-го порядка

$$y_m = ay_{m-1} + by_{m-2} + cx_{m-2} + dx_{m-1} + x_m; m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

При реализации на ЭВМ оно хорошо распараллеливается. Нетрудно проверить, что дополнительно к эффекту максимального распараллеливания, получаемому позиционными ЭВМ, в ОСОК скорость вычислений по (4) может быть увеличена во столько же раз, как и в (3).

Приведенные примеры показывают, что при выполнении АУ, функционирующих в ОСОК, любых вычислительных процедур применим поточный режим. В результате фактические времена выполнения арифметических операций значительно уменьшаются. В самом худшем случае сложение превращается в одноктактную, умножение целых — в трехтактную и умножение дробей — в  $(8 + \lceil \log_2(n+1) \rceil)$ -тактную операции.

Логические операции такие, как сравнение чисел, анализ на переполнение и другие превращаются в одноктактные.

Если, например, использовать ЛЭ с  $t_a = 20$  пс и  $t_{\text{МТ}} = 3t_a = 60$  пс, то при соответствующей архитектуре ЭВМ, функционирующей в ОСОК с диапазоном  $2^{38}$ , можно выполнить: около 17 млн. сложений, 5,5 млн. умножений целых чисел или 1,5 млн. умножений дробей в секунду.

Отметим, что имеются дополнительные возможности повышения быстродействия ОСОК за счет увеличения числа матриц ПЦАУ.

Подводя итог изложенному, можно сделать следующие выводы.

1. При работе в поточном режиме выполнение таких операций, как определение знака числа, сравнение чисел и анализ на переполнение совмещается во времени с выполнением арифметических операций. Таким образом, устраняется главный недостаток СОК — определяющее влияние на быстродействие ЭВМ алгоритмов вычисления позиционных характеристик.

2. Благодаря поточной структуре алгоритмов арифметики в ОСОК можно достичь более высокого быстродействия, чем в ПСС, особенно при реализации плохо распараллеливаемых вычислительных процедур.

3. При разработке мощных вычислительных систем, работающих в реальном масштабе времени, особенно важен контроль арифметических операций и коррекции случайных ошибок. Для ОСОК разработаны эффективные корректирующие коды, позволяющие не только обнаруживать, но и исправлять в ходе работы ЭВМ ошибки различной кратности [9, 10].

4. АУ ОСОК, реализованные таблично, отличаются высокой регулярностью, и с развитием интегральной технологии их производство оказалось бы весьма экономичным [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1, с. 19.
2. Самохвалов К. Г., Корнейчук В. И., Тарасенко В. П. Электронные цифровые вычислительные машины.— Киев, 1976.

3. Торгашев В. А. Система остаточных классов и надежность ЦВМ.— М., 1973.
4. Хассон С. Микропрограммное управление.— М., 1969, вып. 1.
5. Букреев И. Н., Мансуров Б. М., Горячев В. И. Микропрограммные схемы цифровых устройств.— М., 1975.
6. Чу Я. Организация ЭВМ и микропрограммирование.— М., 1975.
7. Аллен. Архитектура ЭВМ для обработки сигналов.— Труды Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1975, с. 63.
8. Коляда А. А., Кравцов В. К.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 3, с. 57.
9. Коляда А. А., Кравцов В. К. О корректирующих возможностях R-кодов обобщенных СОК.— Рукопись деп. в ВИНТИ. № 4112-76. Деп. от 29.11.76.
10. Коляда А. А., Кравцов В. К. Обнаружение и исправление ошибок при выполнении операций в ОСОК с помощью R-кодов.— Рукопись деп. в ВИНТИ. № 2240-77. Деп. от 06.06.77.

Поступила в редакцию  
06.06.79.

Кафедра ЭММ

УДК 621.372.8

В. И. ЛАВРУКОВИЧ, А. В. СИДОРЕНКО

## ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ СВЯЗИ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ СВЧ СИГНАЛА ПО ЛУЧУ ЛАЗЕРА

При измерении параметров СВЧ антенн возникает необходимость в передаче опорного СВЧ сигнала на переменные расстояния [1], при этом нестабильность фазы не должна превышать нескольких градусов, а амплитуды — 1 дБ. Перспективным методом передачи СВЧ сигнала является использование оптических линий связи. Модулированная СВЧ сигналом оптическая несущая может передаваться по атмосферному каналу связи или по волокну. Особенности передачи СВЧ сигнала в атмосферной линии связи рассматривались в работах [2, 3].

В настоящей статье обсуждаются вопросы передачи СВЧ сигнала в волоконно-оптической линии связи (ВОЛС). Одним из основных элементов такой линии связи является оптическое волокно, полоса пропускания и потери в котором существенным образом влияют на передачу СВЧ сигнала. Лучшие многомодовые волокна имеют полосу пропускания до

Параметры исследуемых оптических волокон

Параметры	Кварцевое волокно с боросиликатной оболочкой № 1	Кварцевое волокно с боросиликатной оболочкой № 2	Кварцевое волокно без защитной оболочки № 3
Апертура	0,33	0,22	0,22
Диаметр волокна, мкм	130	150	210
Диаметр сердцевинны, мкм	40	60	120
Потери, дБ/км	16	20	200
$\frac{\partial A}{\partial \theta}$ , дБ/град·м	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ , град/град·м	$2,06 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\partial A}{\partial R}$ , дБ/см·м	$2 \cdot 10^{-2}$	—	$2,7 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ , град/см·м	$1,25 \cdot 10^{-1}$	—	$3,9 \cdot 10^{-3}$
$\frac{\partial A}{\partial T}$ , дБ/град·м	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$
$\frac{\partial \Phi}{\partial T}$ , град/град·м	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$

1 ГГц·км. В одномодовых волокнах полоса пропускания доходит до 100 ГГц·км. Потери в лучших оптических волокнах не превышают 1 дБ/км.

С целью определения возможности использования в ВОЛС для передачи СВЧ сигнала нами проведены экспериментальные исследования влияния температуры окружающей среды, условий возбуждения волокна и его радиуса изгиба на параметры СВЧ сигнала в многомодовых волокнах трех типов (см. таблицу). Исследования проводились по методике, аналогичной [4]. Ввод лазерного излучения в волокно осуществлялся с помощью микробъектива.

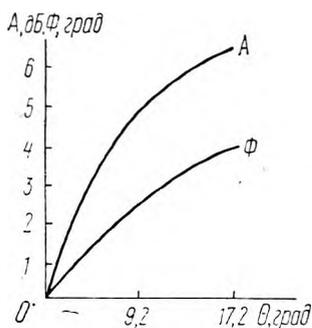


Рис. 1. Зависимость амплитуды  $A$  и фазы  $\Phi$  СВЧ сигнала от числовой апертуры ввода излучения для волокна № 2

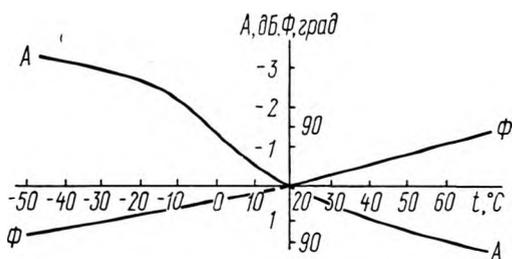


Рис. 2. Изменение амплитуды  $A$  и фазы  $\Phi$  СВЧ сигнала в зависимости от температуры окружающей среды  $t$  волокна № 1

На рис. 1 приведена зависимость амплитуды  $A$  и фазы  $\Phi$  СВЧ сигнала от числовой апертуры ввода излучения для кварцевого волокна с боросиликатной оболочкой. За начало отсчета взяты значения указанных параметров СВЧ сигнала при условии максимального ввода излучения. Увеличение затухания СВЧ сигнала с ростом числовой апертуры  $\Theta$  может быть объяснено тем, что в многомодовом волокне со ступенчатым профилем показателя преломления возрастает число распространяющихся мод, каждая из которых имеет различный коэффициент преломления [5]. Крутизна изменений амплитуды  $\frac{\partial A}{\partial \Theta}$  и фазы  $\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}$  для трех типов волокон приведена в таблице.

Исследование влияния на амплитуду и фазу СВЧ сигнала температуры окружающей среды (рис. 2) показало, что наиболее сильные изменения амплитуды наблюдаются при температуре ниже  $-20^\circ\text{C}$ . Уменьшение амплитуды сигнала при снижении температуры, по-видимому, обусловлено уменьшением потерь излучения на рассеяние. Крутизна изменений амплитуды  $\frac{\partial A}{\partial T}$  и фазы  $\frac{\partial \Phi}{\partial T}$  СВЧ сигнала для исследованных волокон приведена в таблице.

Влияние изгиба волокна на параметры СВЧ сигнала проявляется в том, что при малых радиусах изгиба ( $R \leq 0,07$  м) начинает сказываться явление модового преобразования, приводящее к увеличению потерь излучения. Приведенные в таблице значения  $\frac{\partial A}{\partial R}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$  даны для случая, когда волокно наматывалось на катушку радиуса  $R$  и отнесены к одному метру длины волокна.

Результаты исследований показали, что наиболее пригодным для передачи СВЧ сигнала является волокно с боросиликатной оболочкой № 1. Несмотря на то, что такое волокно является многомодовым, оно может применяться для передачи СВЧ сигнала на расстояниях до 100 м, что вполне достаточно для ряда областей применений. Сравнительно большое затухание в волокне также не является препятствием, так как

потери в ВОЛС в основном возникают при стыковке волокна с модулятором и фотоприемником.

Проведенные исследования позволили создать ВОЛС для передачи непрерывного СВЧ сигнала со следующими параметрами: длина линии 80 м, отношение сигнал/шум на выходе не менее 30 дБ при мощности выходного сигнала  $10^{-8}$  Вт, частота СВЧ сигнала 1,5 ГГц. В ВОЛС используется одномодовый HeNe лазер мощностью 20 мВт и электрооптический СВЧ модулятор резонаторного типа на кристалле  $\text{LiNbO}_3$  [6], обеспечивающий при уровне подводимой СВЧ мощности  $\sim 1$  Вт глубину модуляции излучения 30%. Для увеличения эффективности ввода излучения в волокно и вывода его на фотоприемник (лавинный фотодиод) на концах волокна формировались сферические линзы. При этом эффективность ввода излучения достигала 70%.

Проведенные испытания всей ВОЛС в целом показали, что в течение 8 ч непрерывной работы среднеквадратичное значение флуктуаций фазы и амплитуды СВЧ сигнала не превышает соответственно  $7^\circ$  и 1,3 дБ.

Созданная ВОЛС может найти широкое применение для передачи СВЧ сигнала в голографии, светодальнометрии, ядерных ускорителях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольберг Г. Е., Зимин Д. Б., Корбуков Г. Е. и др. Радио- и акустическая голография / Под ред. Г. Е. Корбукова. — Л., 1976, с. 54.
2. Данейко Н. Ф., Изох В. В., Корхов Е. Л. и др. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 2, с. 27.
3. Корхов Е. Л., Сидоренко А. В. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 1, с. 19.
4. Лаврукович В. И., Сидоренко А. В. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1978, № 1, с. 60.
5. Takasaki Y., Maeda M. — IEEE Trans. on Communications, 1976, v. 24, № 12, p. 1343.
6. Гусев В. Л., Сидоренко В. С., Соломко В. В. — Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 10, с. 1994.

Поступила в редакцию  
09.07.79.

Кафедра радиофизики  
и электроники СВЧ

УДК 541.14:539.124.143

Ю. В. ГЛАЗКОВ, А. И. ВРУБЛЕВСКИЙ,  
Н. И. ЗОТОВ, Н. М. БЕЛЯЦКАЯ

### ЭПР СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ РАДИКАЛОВ В ФОТОРЕАКЦИЯХ С УЧАСТИЕМ ПОРФИРИНОВ

Многие фотохимические реакции с участием тетрапиррольных пигментов протекают с образованием частиц свободнорадикального характера [1], что позволяет применять для их исследования метод ЭПР. Эффективность применения этого метода ограничивается длительностью жизни промежуточных парамагнитных продуктов — чем меньше время жизни, тем труднее фиксировать спектры ЭПР. Очевидно, что стабилизация свободных радикалов позволит расширить область применения метода ЭПР при изучении кинетики и механизма фотохимических реакций.

Известно, что один из способов стабилизации радикалов состоит в захвате их органическими нитрозо- и нитроно- соединениями — спиновыми ловушками [2]. В настоящей работе описываются результаты исследования парамагнитных продуктов, стабилизированных спиновыми ловушками в ходе фотохимических реакций с участием порфиринов.

Фотохимические системы составлены на основе октаметил-тетрафенилпорфина (ОМТФП) и различных хинонов: п-бензохинона; 2,6-дихлор-п-бензохинона; тетрахлор-п-бензохинона. В качестве спиновой ловушки выбран нитрозодурол (НД), обладающий устойчивостью к длительному облучению [3]. Растворители: бензол, хлористый метилен,

четырехлористый углерод, метанол очищались по стандартным методикам [4]. Концентрация порфирина и хинонов во всех опытах составляла  $5 \cdot 10^{-4}$  и  $5 \cdot 10^{-3}$  м/л соответственно. Содержание НД в смесях варьировалось в пределах  $5 \cdot 10^{-3}$  —  $5 \cdot 10^{-2}$  м/л. Облучение образцов осуществлялось лампой ДРШ-500 в резонаторе радиоспектрометра Е-12. Обескислороживание образцов производилось газообразным азотом. Значения магнитных констант спектров ЭПР измерялись по линиям  $Mn^{++}/MgO$  и ДФПГ. Исследования выполнялись при 300 К.

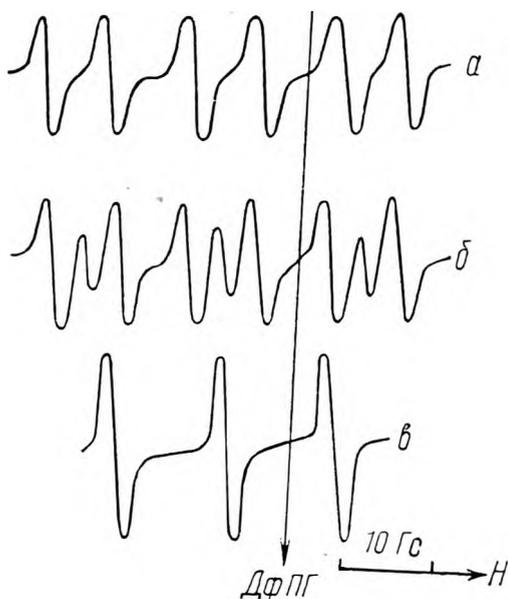
Облучение раствора ОМТФП и п-бензохинона в смеси бензол : метанол (3 : 1 по объему) через светофильтр ЖС-11 приводит к появлению радикала, спектр ЭПР которого состоит из пяти линий СТС с соотношением интенсивностей 1 : 4 : 6 : 4 : 1. Этот сигнал хорошо изучен [5] и принадлежит анион-радикалу п-бензохинона, который возникает вследствие фотопереноса электрона с сенсibilизатора (ОМТФП) на хинон. Магнитные константы этого и других обсуждаемых радикалов приведены в таблице.

Параметры спектров ЭПР радикалов хинонов

Радикал	$g \pm 0,0003$	$a^H, \text{ Гс}, \pm 0,03$	$a^N, \text{ Гс}, \pm 0,03$
Анион-радикал п-бензохинона	2,0045	—	2,32
I	2,0070	13,54	6,45
II	2,0072	14,03	6,63
III	2,0074	13,26	—
IV	2,0074	12,72	—

Введение в раствор НД ( $5 \cdot 10^{-3}$  м/л) в аналогичных условиях приводит к появлению радикала, спектр ЭПР которого представляет собой дублет триплетов с одинаковыми по интенсивностям линиями (см. рисунок, а). Такие же результаты наблюдаются при замене бензола на хлористый метилен или четырехлористый углерод. Так как дублет триплетов фиксируется только в опытах с применением спиновой ловушки, можно заключить, что он принадлежит радикалу, стабилизированному НД. Данный сигнал не появляется в растворе при отсутствии сенсibilизатора и, следовательно, является продуктом фотохимической реакции между сенсibilизатором и п-бензохиноном.

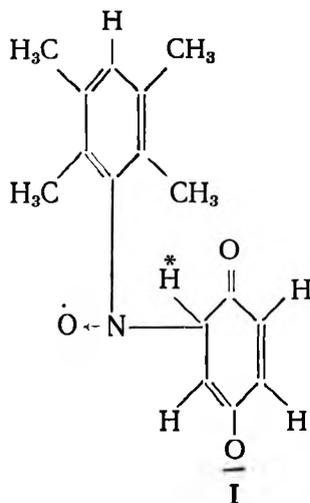
Установлено, что в растворах, состоящих только из бензола, хлористого метилена или четырехлористого углерода, описанный выше сигнал ЭПР не регистрируется. Необходимым условием появления дублета



Спектры ЭПР аддуктов радикалов хинонов с нитрозодуролом:

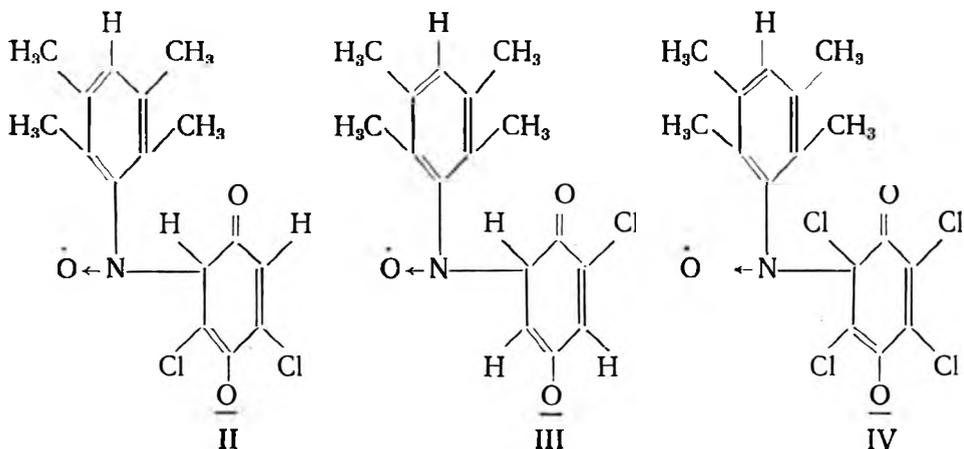
а — аддукт п-бензохинона; б — аддукт 2,6-дихлор-п-бензохинона; в — аддукт тетрахлор-п-бензохинона

триплетов является совместное присутствие в растворе п-бензохинона и метанола. Поскольку при замене метанола на дейтерометанол в растворах с хиноном спектр ЭПР, приведенный на рисунке *a*, сохраняется, можно сделать вывод, что он принадлежит аддукту анион-радикала п-бензохинона с ловушкой следующей структуры:



Вид спектра ЭПР, приведенного на рисунке *a*, объясняется взаимодействием неспаренного электрона с ядром азота ловушки и протоном хинона, отмеченного в структуре I значком (\*). Взаимодействие с другими магнитными ядрами не разрешается.

В случае 2,6-дихлор-п-бензохинона и тетрахлор-п-бензохинона в аналогичных условиях были зарегистрированы спектры ЭПР, приведенные на рисунке *b* и *в* соответственно, и которые объясняются следующими структурами стабилизированных анион-радикалов данных хинонов:



Структуры II и III принадлежат двум возможным способам образования связи между ловушкой и анион-радикалом 2,6-дихлор-п-бензохинона, одна из которых (II) дает дублет триплетов, а другая (III) — триплет (см. таблицу). Во всех случаях СТС от атомов хлора не разрешается.

Для выяснения влияния концентрации НД на природу стабилизируемых радикалов проделаны опыты по фотопереносу электрона в смеси хлористый метилен: метанол при содержании ловушки  $5 \cdot 10^{-2}$  м/л. Обнаружено, что при таких концентрациях НД становится возможным зафиксировать стабилизированные радикалы метанола —  $\text{CH}_2\text{OH}$ .

Таким образом, экспериментальные результаты показывают эффективность совместного применения методов ЭПР и спиновых ловушек к исследованию природы радикалов в фотохимических реакциях с участием порфиринов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуринович Г. П., Севченко А. Н., Соловьев К. Н. Спектроскопия хлорофилла и родственных соединений.— Минск, 1976, с. 312.
2. Фрейдлина Н. М., Кандор И. И., Гасанов Р. Г.— Успехи химии, 1978, т. 47, с. 508.
3. Tagake S., Kumura K.— J. Chem. Soc. Perkin Tr., 1973, p. 1252.
4. Вайсбергер А., Проскауэр Э., Тупс Э. Органические растворители.— М., 1958.
5. Ramon R., Tollin G.— Photochem. and Photob, 1971, v. 13, p. 135.

Поступила в редакцию  
14.09.79.

Кафедра строения вещества

УДК 535:530.182

Е. С. ВОРОПАЙ, А. М. САРЖЕВСКИЙ, П. А. ТОРПАЧЕВ

### К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СЕЧЕНИЙ ДВУХФОТОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ВНУТРИРЕЗОНАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Измерение слабого нелинейного поглощения, в частности, двухфотонного (ДФП), представляет достаточно сложную задачу. Это обусловлено в первую очередь малой величиной сечения поглощения, вследствие чего даже при плотностях потока фотонов  $10^{26}$ — $10^{27}$  фотонов/с<sup>-1</sup>·см<sup>-2</sup> коэффициент ДФП на четыре — пять порядков меньше коэффициентов однофотонного поглощения (ОФП) [1]. При изучении ДФП возникает проблема измерения малого изменения мощного светового потока. Задача усложняется еще и тем, что получить достаточно высокие плотности мощности возбуждения можно лишь с оптическими квантовыми генераторами световых импульсов длительностью десятки наносекунд.

Для регистрации ДФП разработан ряд способов и устройств [2—7], включая достаточно чувствительные внутрирезонаторные с активной средой и калориметрические устройства. С целью увеличения числа проходов образца при импульсном возбуждении нередко используют многоходовые кюветы или помещают кюветы с исследуемым веществом в пассивный (без активной среды) резонатор [8, 9].

Метод с применением пассивного резонатора, описанный в [9], наряду с простотой реализации позволяет повысить примерно на два порядка точность измерений малого (несколько процентов и менее) линейного поглощения фотонов светового импульса длительностью десятки наносекунд.

Кратко остановимся на сути этого метода с целью выяснения возможностей его применения для измерений нелинейного поглощения.

В оптический резонатор высокой добротности, образованный двумя зеркалами, помещают исследуемый объект. Через одно из зеркал резонатора в него вводят световой импульс длительностью  $\tau < 2L/c$ , где  $L$  — длина резонатора;  $c$  — скорость света. За другим зеркалом резонатора регистрируют затухающую последовательность импульсов с периодом  $T_n = 2L/c$ . Скорость затухания описывается выражением

$$A_n/A_0 = R_1^n R_2^n T^{2n} T_0^{2n}, \quad (1)$$

где  $A_0$  и  $A_n$  — соответственно амплитуды первого и  $n$ -го вышедших из резонатора импульсов;  $n$  — их число;  $R_1$  и  $R_2$  — коэффициенты отражений первого и второго зеркал соответственно;  $T$  — искомое пропускание исследуемого образца;  $T_0$  — пропускание кюветы с растворителем. Отсюда следует, что

$$T = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2} \cdot T_0} \left( \frac{A_n}{A_0} \right)^{1/2n} \quad (2)$$

Определив в предварительном измерении  $R_1$ ,  $R_2$  и  $T_0$ , на основании измерений  $A_0$ ,  $A_n$  и  $n$  по (2), можно найти  $T$ , а следовательно, и сечение линейного поглощения  $\sigma^{(1)}$ , которое определяется по формуле

$$\sigma^{(1)} = \frac{-1}{lN_0} \left[ \frac{1}{2n} \ln \frac{A_n}{A_0} - \ln T_0 \sqrt{R_1 R_2} \right], \quad (3)$$

где  $N_0$  — плотность центров поглощения.

Найдем теперь выражение для сечения ДФП. Как показано авторами [10], в случае линейных потерь и ДФП уравнение для ослабления плотности потока фотонов падающего излучения можно записать в виде

$$dF = -\sigma^{(2)} N_0 F^2 dz - k_1 F dz, \quad (4)$$

где  $F$  — плотность потока фотонов;  $\sigma^{(2)}$  — сечение ДФП;  $N_0$  — плотность центров поглощения;  $z$  — координата вдоль направления распространения луча;  $k_1$  — коэффициент линейных потерь на единицу длины кюветы. Из (4) получаем

$$\sigma^{(2)} = \frac{k_1}{F_0 N_0} \cdot \frac{\frac{A_0}{A_l} e^{-lk_1} - 1}{(1 - e^{-lk_1})}, \quad (5)$$

где  $A_l$  — величина, пропорциональная плотности потока фотонов перед выходной стенкой кюветы;  $A_0$  — соответствующая величина после входной стенки;  $F_0$  — плотность потока фотонов после входной стенки;  $l$  — длина кюветы.

Как видно из (5), в силу зависимости сечения ДФП от интенсивности возбуждения, нельзя применить описанный метод определения поглощения по результатам измерений функции затухания энергии в резонаторе в двух точках, с фиксацией интервала изменения аргумента между этими измерениями. Это обусловлено тем, что скорость затухания изменяется от импульса к импульсу, поэтому необходимо измерять амплитуды всех вышедших из резонатора импульсов, рассчитывать поглощение на основании измерения амплитуд соседних импульсов и проводить статистическое усреднение полученных значений поглощения. В этом случае наряду со значительным усложнением системы регистрации и расчета точность повышается в  $\sqrt{n-1}$  раз, и величина поглощения увеличивается в два раза вследствие двойного прохода образца. В методе же, предложенном в [9], точность выше в  $(n-1)$  раз по сравнению с одноходовым методом, а число проходов образца также двойное.

С целью сохранения при определении ДФП точности метода нахождения линейных потерь с применением пассивного резонатора, предложенного в работе [9], регистрацию первого и  $n$ -го импульсов можно представить как измерение входного и выходного значений плотности потока фотонов перед и после образца длиной  $(2n-1)l$ , в котором через  $l$  см имеют место локальные линейные потери на пропускание зеркала и двойной проход стенки кюветы с исследуемым веществом.

Покажем вначале, что при малом ДФП даже в случае одноходового метода необходим отдельный учет потерь на поверхностях образца и внутри его. Если на входе в кювету измерительный прибор регистрирует величину  $A_1$ , пропорциональную плотности потока фотонов излучения, плотность потока фотонов после прохождения входной стенки равна  $A_0 = A_1(1-r)$ , где  $r$  — коэффициент потерь на стенке (отражение, поглощение и т. д.). Очевидно, что эта величина и будет соответствовать интенсивности светового потока на входе в исследуемое вещество. Аналогично, если на выходе измеряется  $A_2$ , действительная плотность потока фотонов после прохождения исследуемого образца равна  $A_l = A_2/(1-r)$  (предполагается, что потери на обеих стенках одинаковы). Тогда вместо (5) получим

$$k_2^D = \frac{(1-r)^2 \frac{A_1}{A_0} e^{-lk_1} - 1}{1 - e^{-lk_1}} k_1, \quad (6)$$

где  $k_2^D = \sigma^{(2)} N_0 F_0$  — действительный коэффициент ДФП на единицу длины образца.

Если не проводить отдельного учета потерь на поверхности и внутри образца, а ввести некоторый эффективный коэффициент линейных потерь в виде

$$k_1^{\text{эф}} = \frac{1 - (1-r)^2 (1 - k_1 l)}{l}, \quad (7)$$

то в этом случае коэффициент ДФП на единицу длины рассчитывается из выражения

$$k_2^P = \frac{A_1}{A_2} \frac{e^{-lk_1^{\text{эф}}} - 1}{1 - e^{-lk_1^{\text{эф}}}} k_1^{\text{эф}}. \quad (8)$$

Рассчитаем на конкретном примере для одноходового метода возможность нахождения коэффициента ДФП по (8), а не по (6). Запишем поправочный множитель  $N$  в виде

$$N = \frac{k_2^P}{k_2^D}. \quad (9)$$

Задавая ряд последовательных значений  $k_2^D$ , определяем по (6)  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{l}{T_{\text{общ}}}$ . Затем по известному  $T_{\text{общ}}$  на основании (8) находим  $k_2^P$  и, наконец, по (9) рассчитываем  $N$ .

На рис. 1 изображена зависимость  $N$  от величины задаваемого, т. е. действительного ДФП на единицу длины ( $k_1 = 0,001 \text{ см}^{-1}$ ,  $l = 10 \text{ см}$ ,  $r =$

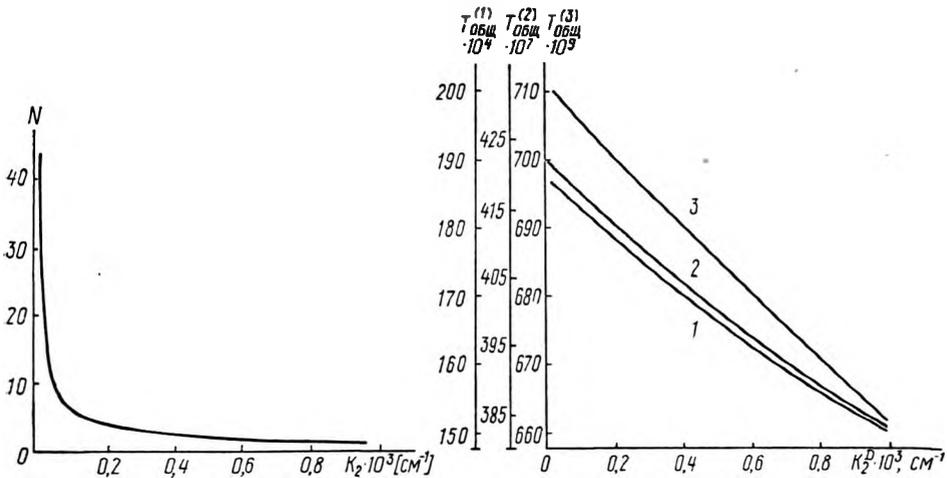


Рис. 1. Зависимость поправочного коэффициента  $N$  от величины измеренного двухфотонного поглощения на единицу длины (линейные потери на единицу длины образца  $0,001 \text{ см}^{-1}$ , длина образца  $10 \text{ см}$ , коэффициент потерь на поверхности образца  $0,04$ )

Рис. 2. Зависимость общего пропускания резонатора с исследуемым объектом от величины нелинейного поглощения в этом объекте (число вышедших из резонатора импульсов  $50$ , коэффициент отражения обоих зеркал  $0,99$ , длина образца  $10 \text{ см}$ ):

$1 - r = 0,01$ ;  $k_1 = 0,001$ ;  $N_{\text{min}} = 15$ ;  $N_{\text{max}} = 575$ ;  $2 - r = 0,04$ ;  $k_1 = 0,001$ ;  $N_{\text{min}} = 30$ ;  $N_{\text{max}} = 2677$ ;  $3 - r = 0,04$ ;  $k_1 = 0,005$ ;  $N_{\text{min}} = 24$ ;  $N_{\text{max}} = 6542$

$= 0,04$ ). Из графика видно, что даже при общей величине ДФП в кювете 1%, являющейся сравнительно большой для этого нелинейного эффекта, действительное значение  $k_2$  может отличаться от рассчитанного по (8) более чем на 40%. С уменьшением ДФП это различие быстро растет.

Таким образом, при исследованиях ДФП даже обычным одноходовым методом необходим отдельный учет линейных потерь на поверхности образца (стенках кюветы) и внутри него.

В случае внутрирезонаторного метода без активной среды вместо (8) имеем

$$k_2^o = \frac{1}{T_{\text{общ}}} \frac{e^{-(2n-1)lk_1^{\text{эф}}} - 1}{1 - e^{-(2n-1)lk_1^{\text{эф}}}} k_1^{\text{эф}}, \quad (10)$$

где  $T_{\text{общ}}$  — общее пропускание системы из  $(2n-1)$  кювет,

$$k_1^{\text{эф}} = \frac{1 - (1-r)^2(1-k_1l)R}{l}. \quad (11)$$

Предполагается, что  $R_1 = R_2 = R$ .

Действительное пропускание системы таких кювет можно представить как

$$T_{\text{общ}} = T_1 \cdot T_2 \dots T_m \dots T_{2n-1}, \quad (12)$$

где индекс соответствует номеру кюветы;

$$T_m = T_0 (1 - k_{21}^D \cdot l T_1 T_2 \dots T_{m-1}); \quad (13)$$

$T_0$  — пропускание, обусловленное линейными потерями. Оно одинаково для всех кювет и записывается в виде

$$T_0 = (1-r)^2(1-k_1l)R. \quad (14)$$

Поскольку  $T_1 = T_0 - k_{21}^D \cdot l T_0$ , то  $2 \leq m \leq 2n-1$ ;  $k_{21}^D$  — действительный коэффициент ДФП в первой кювете. Так как он пропорционален интенсивности возбуждения, то для  $m$ -той кюветы величина ДФП, равная  $k_{2m}^D \cdot l$ , по сравнению с первой кюветой уменьшится во столько раз, во сколько уменьшилась интенсивность возбуждения на входе в  $m$ -тую кювету по сравнению с первой кюветой. Пропускание кювет неодинаковы, так как неодинаковы ДФП в них.

Рассчитать  $T_{\text{общ}}$  как функцию  $k_{21}^D$  по (12)–(14) для конкретных  $k_1$ ,  $l$ ,  $r$ ,  $R$  и  $n$  наиболее просто с помощью ЭВМ. Программа счета проста, а время счета минимальное. На основании такого расчета строится график зависимости  $T_{\text{общ}}$  от  $k_{21}^D$ , который является градуировочным и определяется неизменными параметрами установки. Тогда при измерениях ДФП необходимо измерить  $A_0/A_{2n-1} = 1/T_{\text{общ}}$  и по графику найти  $k_{21}^D$ , а затем  $\sigma^{(2)} = k_{21}^D / F_0 N_0$ .

Такой расчет проведен нами на ЭВМ ЕС-1022 для трех различных наборов значений  $k_1$  и  $r$  (рис. 2). Общее ДФП во всей кювете изменялось от 1 до 0,01%, что является типичным. Поправочный множитель  $N$ , определяемый в соответствии с (9), рассчитывался только для двух значений  $k_1$  ( $10^{-3}$  и  $10^{-5}$  см $^{-1}$ ). Во всех трех случаях  $R=0,99$ ,  $l=10$  см,  $n=50$ .

Из сравнения кривых 1–3 видно, что  $N$  увеличивается с увеличением линейных потерь как внутри образца, так и на поверхности, а также с одновременным увеличением обоих этих типов линейных потерь. Наибольшее отличие от линейной зависимости общего пропускания от величины нелинейных потерь имеет место в случае кривой 1, когда эти потери сравнимы по величине с общими линейными потерями.

Как отмечалось, построение градуировочного графика на основании (12)–(14) проводилось нами для некоторого определенного числа проходов образца, которое являлось неизменным. Это требует, чтобы при определении потерь сравнивались амплитуды импульсов, номера кото-

рых не меняются (стробоскопический способ). Однако возможен и другой вариант измерений, когда фиксируются не число импульсов, а отношение амплитуд  $A_0/A_{2n-1}$ , или же при постоянстве вводимой в резонатор энергии —  $A_{2n-1}$  (компаративный способ). В этом случае  $T_{\text{общ}}$  в (12) постоянно, а с изменением потерь изменяется число множителей в (12). Вследствие этого построение градуировочного графика заключается в наборе такого числа  $T_m$  при заданном  $k_{21}^D$ , пока  $T_{\text{общ}}$  не станет наиболее близко по величине к заданному значению. Здесь следует иметь в виду, что поскольку  $m$  целое, точное равенство может не соблюдаться.

В заключение отметим, что точность определения оптической плотности методом пассивного резонатора может составлять  $10^{-4}$ . Следовательно, при длине образца 10 см минимальный регистрируемый коэффициент ДФП имеет величину  $10^{-5} \text{ см}^{-1}$ .

Проведенное рассмотрение показывает, что при исследованиях ДФП величиной 1% и менее, необходим отдельный учет линейных потерь в объеме и на поверхности образца.

В случае многоходового внутрирезонаторного метода без активной среды необходим расчет градуировочного графика для конкретных параметров установки, на основании которого по измеренным амплитудам первого и последнего вышедших из резонатора импульсов можно найти сечение ДФП.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бредихин В. И., Галанин М. Д., Генкин В. И.—УФН, 1973, т. 110, с. 3.
2. Бредихин В. И.—ПТЭ, 1975, № 5, с. 187.
3. Воропай Е. С., Саржевский А. М., Севченко А. Н., Торпачев П. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 1, с. 21.
4. Батище С. А., Мостовников В. А., Рубинов А. Н.—Квант. электр., 1976, т. 3, № 11, с. 2516.
5. Бонч-Бруевич А. М., Разумова Т. К., Старобогатов И. О.—Опт. и спектр., 1974, т. 36, с. 692.
6. Kleinsteuber W., Rühle K.—Exp. Tech. d. Phys., 1977, v. 25, № 4, p. 335.
7. Воропай Е. С., Саржевский А. М., Севченко А. Н., Торпачев П. А.—Рукопись деп. в ВИНТИ. № 316-78. Деп. от 26.01.78.
8. Teets R., Hänsch J. E., Hänsch T. W.—Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 760.
9. Корниенко Л. С., Скуйбин Б. Г.—Опт. и спектр., 1976, т. 40, № 3, с. 571.
10. Басов И. Г., Грасюк А. З., Зубарев И. Г. и др.—ЖЭТФ, 1966, т. 23, с. 366.

Поступила в редакцию  
15.09.79.

Кафедра общей физики,  
НИИ ПФП

УДК 535.44; 868.4

А. П. ХАПАЛЮК

### ПОЛНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРЕ

В последнее время достаточно хорошо и подробно изучен лазерный эффект, или резонансное излучение электромагнитных волн, когда помещенная в резонатор активная (усиливающая) среда вступает в полное резонансное взаимодействие с электромагнитным полем в виде собственных типов колебаний (мод) резонатора. В предлагаемой работе изучается иное явление полного резонансного взаимодействия электромагнитного поля в виде мод резонатора с обычным поглощающим веществом. Сущность его сводится к следующему. Обычное поглощающее вещество, помещенное в резонатор, в определенных условиях (полное резонансное поглощение) вступает во взаимодействие с собственными электромагнитными модами резонатора. При этом энергия волн переходит в энергию вещества. Так как оба процесса (резонансное излучение

и поглощение) являются существенно резонансными, их важнейшие особенности оказываются аналогичными.

Нами изучаются условия полного резонансного поглощения электромагнитных волн в бесконечно длинном круговом цилиндре. Вещество цилиндра радиуса  $\rho_0$  будем характеризовать комплексным показателем преломления  $N = n - ik$ . Без ограничения общности показатель преломления окружающей цилиндр непоглощающей среды можно считать равным единице. В соответствии с геометрией тела поставленную задачу следует решать в цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$ , ось  $z$  которой совмещена с геометрической осью цилиндра. Предположим, что соответствующие решения уравнений Максвелла не зависят от координаты  $z$  (двумерный случай на плоскости  $\rho, \varphi$ ). Как известно, при этом уравнения Максвелла распадаются на две независимые системы уравнений в соответствии с двумя различными поляризациями волн. Выражения для поперечных составляющих электрического и, соответственно, магнитного векторов можно найти через  $z$ -составляющие по простым формулам (временной множитель  $\exp i\omega t$  опускается):

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{i}{k\rho N^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, & E_\varphi &= \frac{i}{kN^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \\ H_\rho &= \frac{i}{k\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, & H_\varphi &= -\frac{i}{k} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (1)$$

$E_z$  и  $H_z$  — составляющие векторов поля находятся из волновых уравнений, решения которых могут быть записаны через цилиндрические функции.

Рассмотрим вначале волну  $E$ -поляризации, т. е. линейно поляризованную волну, электрический вектор которой направлен вдоль оси  $z$ .

В соответствии с условиями поставленной задачи предположим, что отраженные от цилиндра волны отсутствуют; присутствуют только падающие волны. Эти волны должны распространяться по направлению к цилиндру, и, следовательно, их можно записать через функции Ганкеля первого рода:

$$\begin{aligned} E_m^a(\rho, \varphi) &= A_m H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\varphi}, & H_{m\rho}^a &= \frac{mA_m}{k\rho} H_m^{(1)}(k\rho) e^{im\varphi}, \\ H_{m\varphi}^a &= -\frac{i}{k} A_m \frac{d}{d\rho} [H_m^{(1)}(k\rho)] e^{im\varphi} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2)$$

Для полей внутри цилиндра конечные решения необходимо представлять в виде цилиндрических функций Бесселя первого рода того же порядка  $m$ :

$$\begin{aligned} E_m^i &= B_m J_m(kN\rho) e^{im\varphi}, & H_{m\rho}^i &= -\frac{mB_m}{k\rho} J_m(kN\rho) e^{im\varphi}, \\ H_{m\varphi}^i &= -\frac{i}{k} B_m \frac{d}{d\rho} [J_m(kN\rho)] e^{im\varphi} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Постоянные  $A_m$  и  $B_m$  имеют смысл амплитудных коэффициентов постоянных интегрирования. В дальнейшем для падающей волны ( $A_m$ ) их будем считать заданными величинами.

На поверхности цилиндра должны быть непрерывны тангенциальные составляющие векторов поля (граничные условия). Это требование приводит к двум уравнениям для каждого значения  $m$ :

$$\begin{aligned} A_m H_m^{(1)}(k\rho_0) - B_m J_m(kN\rho_0) &= 0, \\ \frac{d}{d\rho} [A_m H_m^{(1)}(k\rho) - B_m J_m(kN\rho)]|_{\rho=\rho_0} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (4) имеет отличные от нуля решения относительно  $A_m$  и  $B_m$ , если определитель, составленный из коэффициентов при них, равен нулю:

$$J_m(kN\rho_0) \frac{d}{d\rho} H_m^{(1)}(k\rho)|_{\rho=\rho_0} - H_m^{(1)}(k\rho_0) \frac{d}{d\rho} J_m(kN\rho)|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (5, a)$$

Выполнения условий (5, а) необходимо и достаточно для отсутствия отраженной волны, поэтому равенство (5, а) можно считать условием полного резонансного поглощения в цилиндре.

Условие полного резонансного поглощения можно записать в другом виде, если использовать известные выражения для производных цилиндрических функций:

$$J_m(kN\rho_0) H_{m-1}^{(1)}(k\rho_0) - N J_{m-1}(kN\rho_0) H_m^{(1)}(k\rho_0) = 0. \quad (5, в)$$

Уравнения (5) являются комплексными трансцендентными уравнениями, и их решение возможно только приближенными, например, численными методами. Одно комплексное уравнение (5) равносильно двум вещественным, и, следовательно, оно может быть удовлетворено выбором двух вещественных параметров. В принципе такими параметрами могут быть: отношение радиуса цилиндра к длине волны (параметр  $k\rho_0$ ), комплексный показатель преломления (два параметра  $n, \kappa$ ) и пространственная структура падающей волны (целое число  $m$ ). С точки зрения экспериментатора трудности реализации необходимых параметров различны, что, впрочем, имеет место и в более простом случае плоскопараллельного слоя [1] и в процессах генерации. По-видимому, практически наиболее легко изменять параметр  $k\rho_0$ .

По существу условиям полного резонансного поглощения в цилиндре присуща далеко идущая аналогия с разобранными ранее условиями полного поглощения в плоскопараллельном слое [1]. Как и для плоского слоя, уравнения (5) для каждого значения  $m$  имеют бесконечный счетный набор решений. Это утверждение вытекает из основных свойств целых функций (теоремы Пикара), в частности, цилиндрических функций. В отличие от плоскопараллельного слоя случай цилиндра относится к двумерной задаче. Условия полного резонансного поглощения поэтому приводят к двухпараметрическому бесконечному счетному набору собственных типов колебаний. Одним из этих параметров является целое число  $m$ , а вторым — номер корня уравнения (5) для каждого значения  $m$ .

Как отмечалось, разрешимость уравнений (5) вытекает из основных свойств целых функций, однако получить сколько-нибудь точные значения этих корней в общем случае затруднительно. В частных случаях малого или большого значения параметра  $k\rho_0$  для приближенного решения можно воспользоваться известными асимптотическими представлениями цилиндрических функций.

В коротковолновом приближении, которое для оптики, по-видимому, представляет наибольший интерес, можно воспользоваться следующим асимптотическим приближением цилиндрических функций [2]:

$$J_m(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \left\{ (-i)^m e^{-i\frac{\pi}{4} + iu} \left( 1 + i\frac{4m^2 - 1}{8u} - \dots \right) + \right. \\ \left. + (i)^m e^{i\frac{\pi}{4} - iu} \left( 1 - i\frac{4m^2 - 1}{8u} + \dots \right) \right\}, \quad (6)$$

$$H_m(u) = \frac{2(-i)^m}{\sqrt{2\pi u}} e^{-i\frac{\pi}{4} + iu} \left( 1 + i\frac{4m^2 - 1}{8u} - \dots \right).$$

В асимптотическом разложении (6) многочлены с точностью до  $1/u$  необходимо сохранить, чтобы учесть специфическую зависимость условия полного резонансного поглощения от индекса  $m$ . В противном случае эта зависимость исчезает, и собственные типы колебаний вырождаются. При этом условие полного поглощения в цилиндре фактически ничем не отличается от условия полного поглощения в слое, имеющем толщину, равную радиусу цилиндра.

Подставляя (6) в (5), получаем условие полного резонансного поглощения с точностью до членов порядка  $1/(k\rho_0)^2$  в виде

$$\frac{N-1}{N+1} \left( 1 + i \frac{4m^2-1}{4Nk\rho_0} \right) = (-1)^m e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-2iNk\rho_0}. \quad (7)$$

Приравнивая модули и аргументы обеих частей комплексного равенства (7), получаем два вещественных трансцендентных уравнения:

$$\sqrt{\frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}} \left[ 1 - \frac{(4m^2-1)\kappa}{4k\rho_0(n^2 - \kappa^2)} \right] = e^{-2k\rho_0 \kappa}, \quad (8)$$

$$\operatorname{arctg} \left[ \frac{2\kappa}{|N|^2 - 1} - \frac{n(4m^2-1)}{4k\rho_0|N|^2 - \kappa(4m^2-1)} \right] = 2nk\rho_0 - \pi(2s - m),$$

где  $s$  — любое целое число.

Из первого уравнения (8), которое можно назвать энергетическим условием полного резонансного поглощения, следует, что полное поглощение, так же, как и в слое, возможно только при условии  $\kappa > 0$ . В прозрачных средах ( $\kappa = 0$ ) и, тем более, в средах с отрицательным поглощением ( $\kappa < 0$ ) уравнения (8) (а также точные уравнения (5)) не имеют решения. Второе уравнение в (8) естественно назвать фазовым, или интерференционным условием полного резонансного поглощения. Оно определяет дискретный двухпараметрический  $(m, s)$  ряд решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих условию полного резонансного поглощения в цилиндре.

Вообще говоря, условия полного поглощения равносильны двум условиям относительно пяти независимых параметров ( $k\rho_0$ ,  $n$ ,  $\kappa$ ,  $m$  и  $s$ ). Однако учитывая, что параметры  $m$  и  $s$  принимают только целочисленные значения, из трех оставшихся параметров полностью свободным может считаться только один.

Для слабопоглощающих сред ( $\kappa \ll n$ ) возможны дальнейшие упрощения формул (8), которые после этого становятся легко разрешимыми. При этом

$$\kappa \approx - \frac{\ln r}{4k\rho_0} \left[ 1 + \frac{4m^2-1}{8(kn\rho_0)^2} \right], \quad (9, a)$$

а параметр  $k\rho_0$  определяется из уравнения

$$(2kn\rho_0) \operatorname{ctg}(2kn\rho_0) = \frac{(-1)^m}{2} \left( 1 - 4m^2 - \frac{\ln r}{n-1} \right), \quad (9, b)$$

которое имеет бесконечный дискретный набор решений. В (9)  $r = \left( \frac{n-1}{n+2} \right)^2$  совпадает с энергетическим коэффициентом отражения Френеля на границе цилиндра.

Из уравнений (9) следует, что так же, как и для слоя, условия полного резонансного поглощения в цилиндре являются довольно жесткими. При заданных свойствах среды ( $n$  и  $\kappa$ ) вряд ли всегда можно выбрать параметры ( $k\rho_0$ ,  $m$ ,  $s$ ) так, чтобы удовлетворить условиям полного резонансного поглощения. Процесс характеризуется пороговым значением коэффициента поглощения.

Легко показать, что в длинноволновом приближении ( $k\rho_0 \ll 1$ ) уравнения (5) не имеют решений. Это объясняется тем, что для волн, длина которых намного больше радиуса цилиндра, не существует собственных мод, они «не помещаются» в цилиндре.

Аналогично можно изучить условие полного резонансного поглощения для волн другой поляризации, когда магнитный вектор направлен вдоль оси цилиндра. В этом случае условие полного резонансного поглощения запишется в виде

$$N^2 J_m(kN\rho_0) \frac{d}{d\rho} H_m^{(1)}(k\rho) \Big|_{\rho=\rho_0} - H_m^{(1)}(k\rho_0) \frac{d}{d\rho} J_m(kN\rho) \Big|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad (10)$$

который отличается множителем  $N^2$  в первом слагаемом по сравнению с условием (5) для волны  $E$ -поляризации. Однако все основные выкладки и качественные выводы практически остаются прежними. В частно-

сти, можно утверждать, что уравнение (10) обязательно имеет бесконечный дискретный ряд решений. В коротковолновом асимптотическом приближении условие полного резонансного поглощения для волн  $H$ -поляризации запишем в виде

$$\frac{N-1}{N+1} \left[ 1 + i \frac{2m}{k\rho_0} + i \frac{4(m-1)^2 - 1}{4Nk\rho_0} \right] = -i(-1)^m e^{-2iNk\rho_0}. \quad (11)$$

Из сравнения формул (7) и (11) видно различие между условиями полного резонансного поглощения для одной и другой поляризации. Отсюда следует, что в общем случае для заданного цилиндра нельзя одновременно для обеих поляризаций удовлетворить условиям полного резонансного поглощения.

Нетрудно рассчитать распределение потока и плотности энергии внутри цилиндра при выполнении условия полного резонансного поглощения. Однако точные выражения этих величин, записанные через цилиндрические функции, не дают наглядного представления о характере их изменения вдоль радиуса. Для этого воспользуемся асимптотическими представлениями цилиндрических функций. Для области вблизи поверхности цилиндра достаточно коротковолнового приближения (6), для области оси цилиндра следует воспользоваться длинноволновым приближением:

$$J_m(u) \approx \frac{1}{2^m} \frac{u^m}{m!}.$$

В этих приближениях радиальная составляющая потока энергии  $P_\rho$  и плотность энергии  $W$ , вычисленные по обычным формулам, с точностью до величин  $1/(k\rho)^2$  для обеих поляризаций имеют одинаковый вид. Для области вблизи поверхности цилиндра зависимость от радиуса имеет вид:

$$P_\rho \sim \frac{\text{sh } 2\kappa k\rho}{2\kappa k\rho}, \quad W \sim \frac{\text{ch } 2\kappa k\rho}{2\kappa k\rho}. \quad (12)$$

Вблизи оси цилиндра зависимость от радиуса иная:

$$P_\rho \sim (2|N|k\rho)^{2m-3}, \quad W \sim (2|N|k\rho)^{2m-2} \quad (m > 3). \quad (13)$$

В этом приближении азимутальная составляющая потока энергии равна нулю (на поверхности цилиндра она пропорциональна  $1/(k\rho)^2$ ).

Поглощение энергии в цилиндре можно подсчитать по формуле  $2Q = -\sigma EE^*$ . Эта величина приблизительно пропорциональна плотности суммарной энергии и может быть оценена из формул (12)–(13). В основном результаты оценок сводятся к следующему. Цилиндрические моды с номерами  $m=0, 1$  имеют вблизи оси цилиндра, где они по преимуществу и поглощаются, большую плотность энергии, чем вблизи поверхности цилиндра. Для мод с высоким индексом  $m$  плотность энергии больше вблизи поверхности цилиндра и меньше в его середине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хапалюк А. П.— Докл. АН БССР, 1962, т. 6, № 5, с. 301.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М., 1966.

Поступила в редакцию  
23.09.79.

НИИ ПФП

УДК 621.373.5

О. И. ЛАППО, Н. Н. ШАВЕЛЬ, Л. С. ЩОРС

### ИСТОЧНИК ИМПУЛЬСОВ НАКАЧКИ ИНЖЕКЦИОННЫХ ПКГ ДЛЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЦИФРОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ СВЯЗИ

Одной из достаточно сложных и важных задач, возникающих при создании широкополосных оптических линий связи (ОЛС) на полупроводниковых лазерах, предназначаемых для передачи информации в

цифровом виде со скоростью в несколько десятков Мбит/с, является разработка генератора импульсов тока для возбуждения ПКГ. Этот генератор должен обладать высоким быстродействием и иметь достаточную для возбуждения лазера амплитуду импульсов тока.

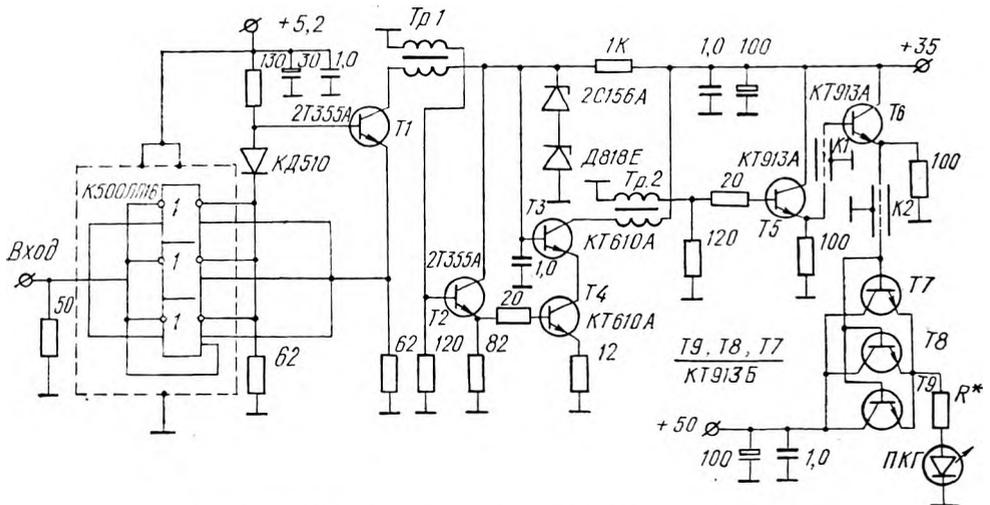
Мощность излучения полупроводниковых квантовых генераторов и рассеиваемая ими тепловая мощность ограничены [1, 2], что не позволяет значительно увеличивать скорость передачи ОЛС непосредственно за счет увеличения средней частоты импульсов накачки ПКГ. Поддерживая среднюю мощность излучения в пределах ее допустимых значений, удается при заданной средней частоте импульсов накачки увеличивать скорость передачи информации путем применения дискретной фазово-импульсной модуляции [3, 4]. В этом случае резко возрастают требования к быстродействию узлов оптической линии связи и в особенности — генератора накачки [5].

Описанные в работах [6—10] схемы источников импульсов тока накачки лазеров не полностью удовлетворяют требованиям высокоскоростных ОЛС с дискретной фазово-импульсной модуляцией. В одних случаях генераторы накачки имеют сравнительно большое время восстановления или недостаточно короткие фронт, спад и длительность формируемых импульсов, в других — относительно малую амплитуду импульсов тока.

В данной работе описан формирователь наносекундных импульсов (см. рисунок), при разработке которого использован принцип последовательного усиления — ограничения амплитуды формируемого импульса [11].

Первый каскад устройства выполнен по схеме переключателя тока, образованного тремя соединенными параллельно дифференциальными усилителями микросхемы К500ЛП16 и транзистором  $T_1$ . Исходное состояние характеризуется наличием более высокого потенциала (логической единицы) на инвертирующих выходах микросхемы. При этом транзистор  $T_1$  заперт и ток (около 60 мА), задаваемый сопротивлением  $R_1$ , полностью распределяется между указанными выходами микросхемы. При подаче на вход импульса (логической единицы) состояние выходов микросхемы изменяется на противоположное с одновременным переключением тока в транзисторе  $T_1$ .

Описанная комбинация транзистор — микросхема позволила относительно просто согласовать вход формирователя с выходом источника информации, имеющего логические уровни эмиттерно-связанной логики и одновременно получить коэффициент усиления по напряжению около



Принципиальная схема источника импульсов накачки ПКГ:  
 $R^*$  — сопротивление, задающее амплитуду тока накачки ПКГ

10 при длительности времени нарастания и спада импульсов на выходе  $T_1$  не более  $1,5 \cdot 10^{-9}$  с. В дальнейшем полученный импульс напряжения усиливается по току транзистором ( $T_2$ ) и поступает на вход следующего каскада усиления, составляемого транзисторами  $T_3, T_4$  в каскадном включении.

Исходя из требований формирования коротких наносекундных импульсов для накачки инжекционных лазеров в широкополосных ОЛС, связь транзистора  $T_1$  с  $T_2$  и  $T_3$  с  $T_5$  осуществляется с помощью инвертирующих импульсных трансформаторов  $Tr_1$  и  $Tr_2$  [11, 12], что позволило реализовать источник импульсов тока накачки на транзисторах одного типа проводимости. Импульсные трансформаторы-инверторы выполнены на отрезке коаксиального кабеля (5—10 см) диаметром 2 мм с волновым сопротивлением 100 Ом. С целью увеличения длительности передаваемых импульсов отрезок кабеля (4 витка) наматывался на высокочастотном ферритовом кольце с внешним диаметром 10, внутренним — 6 и высотой 5 мм. Трансформаторы-инверторы позволили передавать импульсы длительностью до 60 нс без заметного скола вершины и без ухудшения их фронта и спада.

Используя свойство увеличения амплитуды импульсов напряжения на конце коаксиальной линии передачи в случае, когда величина импеданса нагрузки больше ее волнового сопротивления, и сочетая такую линию (в данном случае отрезки  $K_1$  и  $K_2$  коаксиального кабеля) с эмиттерным повторителем ( $T_6, T_7—T_9$ ), осуществлено дальнейшее усиление — ограничение формируемых импульсов. Причем транзисторы  $T_6$  и  $T_7—T_9$  работают в режиме эмиттерного ключа с ограничением амплитуды напряжения входного импульса. Подобный ключ обладает наибольшим быстродействием [13]. Величина включаемых отрезков коаксиального кабеля выбирается из следующего условия: длительность двойного времени прохождения по ней электрического сигнала должна быть не менее половины длительности сформированных импульсов, но не должна превышать период их следования, что является частичным недостатком схемы.

Описанный источник наносекундных импульсов разработан и использован для открытого канала цифровой оптической линии связи с дискретной фазово-импульсной модуляцией со скоростью передачи информации в несколько десятков Мбит/с при средней частоте следования оптических импульсов в единицы МГц. Сохраняя допустимые мощностные режимы транзисторов  $T_6—T_9$ , проводили проверку данного формирователя на постоянной частоте, вплоть до 100 МГц, при длительности импульсов около  $5 \cdot 10^{-9}$  с. Проверка показала высокое быстродействие, а также стабильность временных и энергетических параметров устройства.

Время восстановления формирователя не превышает  $5 \cdot 10^{-9}$  с. Длительность фронта и спада выходных импульсов составляет около  $10^{-9}$  с. Амплитуда импульсов достигает 50 В на нагрузке не менее 10 Ом. Формирователь позволяет работать на емкостную нагрузку величиной до 30—50 пФ.

Разработанный источник импульсов может быть использован в ряде устройств наносекундной импульсной техники и физическом эксперименте, в частности, для исследования характеристик быстродействия светодиодов и полупроводниковых квантовых генераторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Грибковский В. П. Теория поглощения и испускания света в полупроводниках.— Минск, 1975.
2. Алферов Ж. И. и др.— ЖТФ, 1976, т. 46, № 11, с. 2398.
3. Паоли, Риппер.— ТИИЭР, 1970, т. 58, № 10, с. 59.
4. Данилов В. А. и др.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1974, № 1, с. 55.
5. Щелкунов К. Н. и др.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 6, с. 1143.

6. Дьяконов В. П. Лавинные транзисторы и их применение в импульсных устройствах.— М., 1973.  
 7. Дьяконов В. П., Профатилов В. И.— ПТЭ, 1978, № 3, с. 134.  
 8. Брюханов А. С. и др.— ПТЭ, 1976, № 2, с. 72.  
 9. Скляр О. К.— ПТЭ, 1976, № 1, с. 135.  
 10. Латушкин С. Т. и др.— ПТЭ, 1976, № 2, с. 143.  
 11. Моругин Л. А., Глебович Г. В. Наносекундная импульсная техника.— М., 1964.  
 12. Мейтик.— ТИИЭР, 1968, т. 56, № 1, с. 57.  
 13. Степаненко И. П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем.— М., 1977.

Поступила в редакцию  
01.10.79.

НИИ ПФЛ

УДК 535.37

### Н. К. КРИВОШЕЕВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ

## ПРИМЕНЕНИЕ ДРОССЕЛЬНОГО СВЧ ПЕРЕХОДА В КРИОСТАТЕ

В криогенных системах, предназначенных для исследования ЭПР, конструкция которых предусматривает охлаждение резонатора, тракт СВЧ является одним из основных конструктивных элементов, подводющим тепло к хладагенту [1, 2]. Этот тепловой поток уменьшают, изготавливая волновод из нейзильбера или нержавеющей стали и увеличивая его длину, что накладывает определенные ограничения на габариты и стоимость криогенной системы и приводит к дополнительным потерям мощности СВЧ.

В технике СВЧ распространены дроссельные волноводные переходы, обеспечивающие электрическое соединение при отсутствии прямого механического контакта [3]. Очевидно, что использование в конструкции тракта СВЧ такого перехода, находящегося в вакуумном объеме криостата, должно улучшить его тепловые свойства. В работе проведены

оценки эффективности использования дроссельных переходов в качестве элемента волновода с повышенным тепловым сопротивлением, обусловленным излучательным характером теплопереноса через них. Оценки проводились для волноводов с внутренним сечением  $23 \times 10$  мм по общепринятой методике [4]. Основой для сравнения служил волновод из нержавеющей стали с толщиной стенок 0,5 мкм.

На рис. 1 показана зависимость отношения тепловых потоков через равные по длине ( $l = 30$  мм) дроссельный переход, изготовленный из латуни ( $\lambda = 120$  Вт/м·град), и отрезок волновода из нержавеющей стали (коэффициент теплопроводности  $\lambda = 15$  Вт/м·град) для двух типов дроссельных переходов: стандартного (площадь теплообмена  $1,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>) и модифицированного ( $1,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>) и для поверхностей с различными излучательными свойствами — окисленной и полированной латуни (степень черноты  $\epsilon = 0,6$  и  $\epsilon = 0,028$  [4]), в зависимости от температуры, поддерживаемой на «холодном» конце волновода (температура второго конца — комнатная). Эффективность использования дроссельных переходов существенно возрастает с увеличением разности

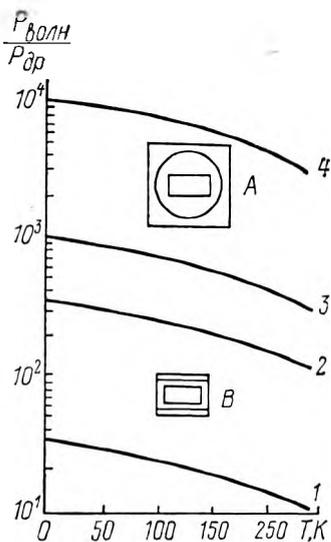


Рис. 1. Сравнительные характеристики тепловых потоков через дроссельные переходы:

- 1 — стандартный дроссельный переход,  $\epsilon = 0,6$ ; 2 — модифицированный дроссельный переход,  $\epsilon = 0,6$ ; 3 — стандартный дроссельный переход,  $\epsilon = 0,028$ ; 4 — модифицированный дроссельный переход,  $\epsilon = 0,028$ ; А — стандартный, В — модифицированный дроссельные переходы

температур, т. е. их целесообразно использовать в криогенных системах с большими температурными градиентами. Тепловые свойства охлаждаемого тракта СВЧ с дроссельными переходами зависят от вида перехода (площади теплообмена) и от излучательных характеристик поверхности; улучшить их можно путем серебрения и тщательной полировки торцов дроссельных переходов.

Таким образом, имеется возможность замены волноводов из нержавеющей стали на стандартные латунные, высокая теплопроводность которых компенсируется повышенным тепловым сопротивлением дроссельных переходов. Однако преимущества латунного волноводного тракта с дроссельным переходом перед волноводом из нержавеющей стали теряются с увеличением длины тракта СВЧ. Целесообразность применения дроссельного перехода в сочетании со стандартным латунным волноводом определяется длиной тракта, при которой тепловой поток через него оказывается равным потоку через равный по длине волновод из нержавеющей стали. На рис. 2 показана зависимость эквивалентной длины от температуры «холодного» конца латунного тракта СВЧ с дроссельным переходом, т. е. длины, при которой латунный волновод оказывается эквивалентным в тепловом отношении волноводу из нержавеющей стали (для стандартного дроссельного перехода с площадью теплообмена  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$  и степенью черноты его поверхности  $\epsilon = 0,6$ ).

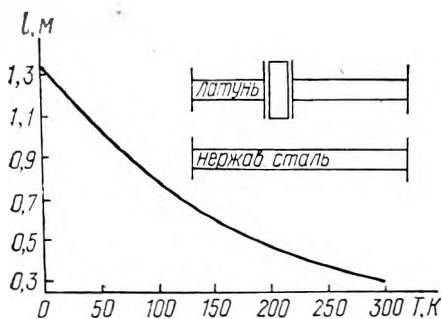


Рис. 2. Оценка эффективности применения латунного волноводного тракта СВЧ с дроссельным переходом

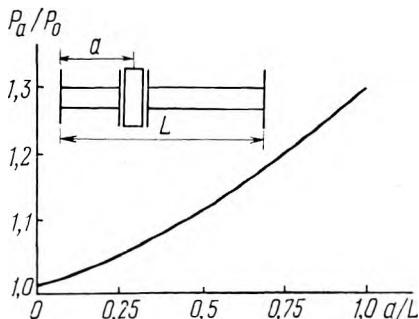


Рис. 3. Влияние расположения дроссельного перехода на тепловой поток через волноводный тракт

В области азотных температур эквивалентная длина оказывается равной  $\sim 1 \text{ м}$  (см. рис. 2). Таким образом, использование дроссельного перехода позволяет повысить эффективность малогабаритных криогенных систем. Проведенные оценки для дроссельных переходов модифицированного типа с улучшенными излучательными свойствами поверхности показывают, что их использование эффективно во всех криогенных системах, типичных для техники ЭПР.

При выборе местоположения дросселя следует отдавать предпочтение размещению его вблизи ванны с хладагентом. На рис. 3 показана зависимость отношения теплового потока через волноводный тракт с дроссельным переходом, расположенным на расстоянии  $a$  от ванны с хладагентом, к потоку при расположении дроссельного перехода непосредственно у ванны, от относительного расположения перехода ( $L$  — длина тракта).

Выполненные оценки позволяют сделать вывод о целесообразности применения в криогенных системах дроссельных переходов СВЧ, позволяющих уменьшить геометрические размеры системы и теплоприток по тракту СВЧ, а также применить более доступные латунные волноводы вместо волноводов из нержавеющей стали.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабанко В. П., Рябченко С. М., Селькова Е. Н.—ПТЭ, 1966, № 1, с. 222.

2. Эндрус Р. А., Ким Я. В.— ПНИ, 1966, № 4, с. 22.  
 3. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П. Справочник по элементам волноводной техники.— М., 1963, с. 63.  
 4. Уайт Г. К. Экспериментальная техника в физике низких температур.— М., 1961.

Поступила в редакцию  
01.10.79.

Кафедра физики полупроводников

УДК 537.531:535

Х. А. МУРТАДА, [Г. А. ГУМАНСКИЙ], В. В. УГЛОВ

## ОТРАЖЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ КРЕМНИЯ С РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ ШЕРОХОВАТОСТИ

Повышенный интерес в последние годы к зеркальному отражению рентгеновского излучения обусловлен попытками применения этого явления к изучению тонких приповерхностных слоев твердых тел: определению степени шероховатости поверхности [1], плотности тонких слоев на поверхности [2], структуры этих слоев методом рентгеновской дифракции в предельно-асимметричном брэгговском положении [3]. Однако четкой картины зависимости отражения от рельефа поверхности не получено.

В данной работе проведено экспериментальное исследование зеркального отражения и рассеяния на углы, близкие к  $90^\circ$ , характеристического рентгеновского излучения кобальта ( $\lambda = 1,789 \text{ \AA}$ ) от образцов эпитаксиального кремния с зеркальной и шероховатой поверхностями. Шероховатость поверхности создавалась путем шлифовки зеркального кремния алмазной пастой с размером зерна 1 мкм в течение 10 (образец № 1), 60 (образец № 2) и абразивным порошком 000 в течение 30 с (образец № 3). Образцы устанавливались на столике переоборудованного гониометра ГС-5 с двухщелевыми коллиматорами. Против держателя образца на столике гониометра устанавливался счетчик СБТ-7, предназначенный для относительного измерения излучения, рассеянного в

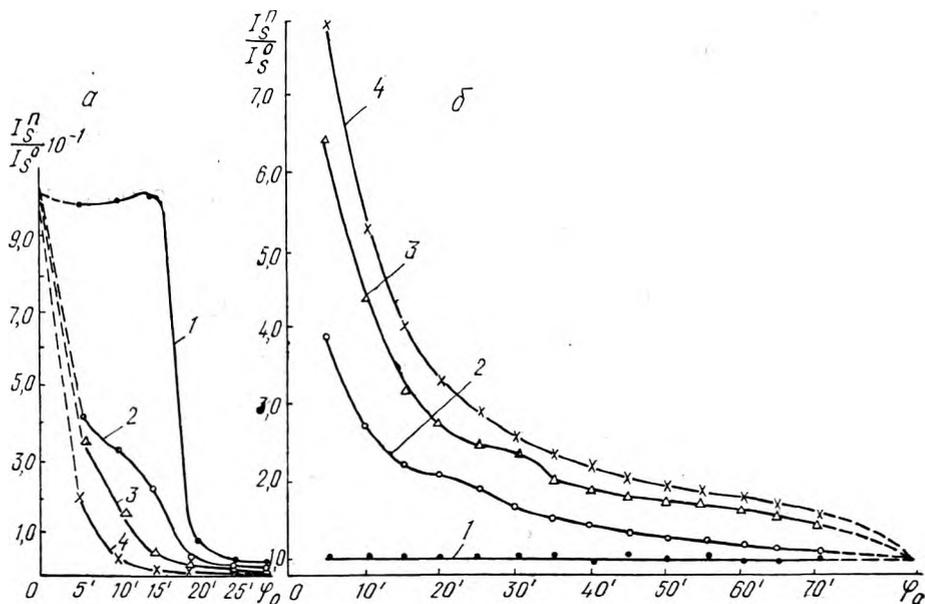


Рис. 1. Зависимость эффективного коэффициента отражения (а) и относительной интенсивности рассеяния (б) от угла скольжения первичного пучка рентгеновского излучения для образцов эпитаксиального кремния с различной степенью обработки поверхности:

1 — зеркальной; 2 — шероховатой, 1; 3 — шероховатой, 2; 4 — шероховатой, 3

интервале углов  $90 \pm 10^\circ$  образцом при малых углах скольжения первичного пучка. Измерения проводились в пределах угла скольжения  $\varphi_0$  от 0 до  $70'$ . Интенсивность отражения определялась с помощью детектора, установленного в коллиматоре алидады, который поворачивался на угол  $2\varphi_0$ ; одновременно измерялась интенсивность рассеяния.

Результаты измерений преобразовывались в относительный эффективный коэффициент отражения  $R_{эф}$  по формуле:

$$R_{эф}(\varphi_0) = \frac{I_n(\varphi_0)}{I_0(\varphi_0)},$$

где  $I_n(\varphi_0)$  — интенсивность отражения образцов 1, 2 и 3;  $I_0(\varphi_0)$  — интенсивность отражения зеркального образца.

Степень зеркальности исходного материала оценивалась по величине измеренного угла полного внешнего отражения, теоретическое значение которого составляет  $18,9'$ , а экспериментально определенное —  $18 \pm 0,5'$ . Таким образом, исходный материал отличался совершенной зеркальной поверхностью.

Относительная интенсивность рассеяния определялась по формуле:

$$I_s(\varphi_0) = \frac{i_{sn}(\varphi_0)}{i_{s0}(\varphi_0)},$$

где  $i_{sn}(\varphi_0)$  — интенсивность рассеяния от образцов,  $n=1, 2, 3$ ;  $i_{s0}(\varphi_0)$  — интенсивность рассеяния исходного материала.

Интенсивность рассеяния от зеркальной поверхности прямо пропорциональна углу скольжения  $\varphi_0$ , следовательно,  $i_{s0}(\varphi_0)/\varphi_0 = \text{const}$ .

Как видно из кривых отражения (рис. 1, а) а также из литературных данных [1, 4], отражательная способность резко падает с увеличением неровностей поверхности, однако количественная связь пока не установлена. Представляется целесообразным использовать для этой цели результаты теории рассеяния электромагнитных волн на статистически неровных поверхностях. Условиям рассеяния рентгеновского излучения на шероховатой поверхности, неровности которой значительно больше длины волны излучения, удовлетворяет модель Исаковича [5], согласно которой коэффициент отражения может быть представлен в виде:

$$R_{эф}(\varphi_0) = R_0(\varphi_0) \exp \left[ -2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \sigma \sin \varphi_0 \right)^2 \right],$$

где  $R_0(\varphi_0)$  — коэффициент отражения по формуле Френеля с учетом затухания;  $\lambda$  — длина волны;  $\sigma$  — средняя характеристическая высота неровности.

Определив угол  $\varphi_0$ , соответствующий полувысоте кривых отражения, можно оценить среднестатистическую величину  $\sigma$  для образцов с различной степенью шероховатости (см. таблицу).

На рис. 1, б представлены кривые относительной интенсивности рассеяния в зависимости от угла скольжения первичного пучка рентгеновского излучения. Обращает на себя внимание необычный ход зависимости рассеяния в области малых значений  $\varphi_0$ . Качественно это можно объяснить рассеянием в вершинах неровностей поверхности, где поглощение и самопоглощение рассеянного первичного излучения много меньше, чем в слое под ровной поверхностью. Имеет значение и общее увеличение поверхности шероховатых образцов. В пользу первого предположения говорит тенденция к слиянию всех кривых рассеяния в области больших углов скольжения первичного пучка.

Возникновение рассеяния на неровностях можно показать на следующей простейшей модели. Рассмотрим рельеф в виде протяженных выступов треугольного сечения, периодически повторяющихся (рис. 2).

Номер образца	$\varphi_{0,5}$	$\sigma, \text{ \AA}$
1	12,5	35
2	6,5	65
3	2	210

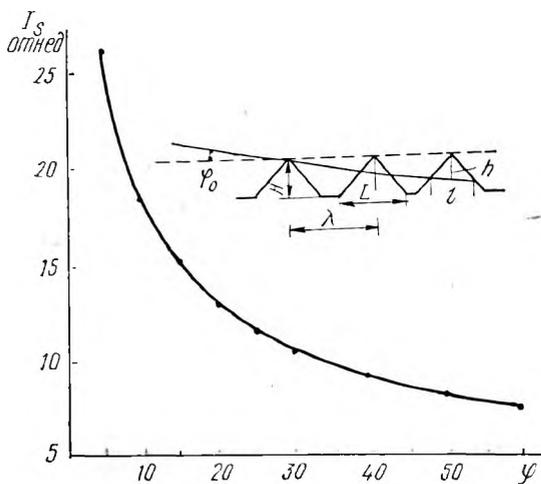


Рис. 2. Интенсивность рассеяния бесконечно протяженной поверхности, состоящей из выступов треугольного сечения

Рассеяние излучения будет происходить в вершинах выступов, причем каждый из них частично экранируется предшествующим. Самопоглощением рассеянного излучения, а также интерференцией волн, рассеянных отдельными выступами, пренебрегаем. Тогда интенсивность рассеяния от  $n$ -ого выступа будет определяться интенсивностью падающего на него излучения  $i_n$ , рассеивающим объемом  $v_n$  и коэффициентом рассеяния  $\Sigma$ :

$$i_n^s = i_n \Sigma v_n N,$$

где  $N$  — число атомов в единице объема рассеивателя:

$$i_n = I_0 \exp \left[ -\mu \frac{n^2}{2} \Lambda \frac{L}{H} \operatorname{tg} \varphi \right];$$

$$v_n = \frac{n^2}{2} \Lambda^2 \frac{L}{H} \operatorname{tg}^2 \varphi;$$

$\mu$  — линейный коэффициент ослабления;  $\Lambda$  — расстояние между выступами;  $H$  — высота выступа;  $L$  — длина выступа.

Полагая  $n \rightarrow \infty$ , в виду малости самих неровностей и бесконечной протяженности рассеивающей поверхности, заменяем суммирование по  $n$  интегралом и, согласно [6], получаем:

$$I_s = \frac{I_0 \Sigma N}{2} \left( \frac{2\pi \left( \frac{H}{L} \right)^3}{\mu \Lambda \operatorname{tg} \varphi} \right)^{1/2}$$

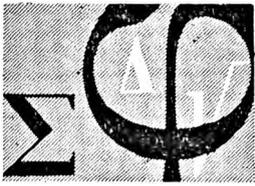
Вид кривой, рассчитанной для интервала углов  $0-60'$ , в относительных единицах показан на рис. 2. Сравнение рис. 1, б и 2 свидетельствует о хорошем качественном совпадении, что, по-видимому, подтверждает правильность исходных предположений, однако предельная упрощенность модели не позволяет произвести количественного сравнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ровинский Б. М.—В сб.: Аппараты и методы рентгеновских исследований.— Л., 1971.
2. Мельник Б. А.—Заводская лаборатория, 1979, т. 45, № 5.
3. Grüttner, Höche, Nieber.—Phys. st. solidi (a), 1976, v. 33, p. 587.
4. Grüttner, Höche.—Kristall und Technik, 1977, B. 15, S. 141.
5. Исакович М. А.—ЖЭТФ, 1952, т. 23, № 3, с. 305; см. также: Басс, Фукс Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.— М., 1972, с. 190.
6. Градштейн, Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М., 1963, с. 351.

Поступила в редакцию  
07.12.79.

Кафедра физики твердого тела



УДК 62-50

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, О. И. КОСТЮКОВА

## МОДИФИКАЦИЯ АДАПТИВНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Рассмотрим общую  $m \times n$ -задачу линейного программирования [1]:

$$c'x \rightarrow \max, Ax = b, d_* \leq x \leq d^*. \quad (1)$$

В [2] предложен адаптивный метод решения задачи (1), который состоит в последовательном преобразовании опорных планов  $\{x, A_{оп}\}$  и основан на принципе уменьшения оценки субоптимальности:

$$\beta(x, A_{оп}) = \sum_{j \in J_n, \Delta_j > 0} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_n, \Delta_j < 0} \Delta_j (x_j - d_j^*),$$

где  $\Delta = A'u - c$ ,  $u' = c_{оп}' A_{оп}^{-1}$ .

В классическом симплекс-методе [1] мера успешности итерации определяется приращением целевой функции  $c'x$ . Эта мера зависит только от текущего базисного плана  $x$  и поэтому симплекс-метод «буксует» всякий раз, когда на итерации не увеличивается  $c'x$ . Подобные явления наблюдаются [1] почти во всех прикладных задачах и связаны с вырожденностью планов. Мера успешности итерации адаптивного метода в силу указанного принципа определяется уменьшением оценки субоптимальности. Последняя зависит [2] как от плана, так и от опоры:

$$\beta(x, A_{оп}) = \beta(x) + \beta(A_{оп}).$$

Адаптивный метод поэтому в отличие от симплекс-метода имеет две «ведущие оси»: опорный план улучшается и за счет замены плана, и за счет изменения опоры.

Цель настоящей работы — модифицировать метод [2] на случай, когда он на опорном плане не приводит к уменьшению оценки субоптимальности. Известные модификации [1] симплекс-метода для вырожденных базисных планов направлены только на предупреждение заикливания и не учитывают непосредственно исходной цели оптимизации. Изложенный далее подход основан на том убеждении, что вырождение — один из признаков внутренней специфики задачи, поэтому следует не «бояться» (избегать) вырожденных планов, а напротив, приспособить к ним метод оптимизации с учетом дополнительной информации.

Пусть  $\{x, A_{оп}\}$  — опорный план, оценка субоптимальности которого превосходит заданную точность приближения к оптимальному значению целевой функции:  $\beta(x, A_{оп}) > \varepsilon$ . Следуя [2], построим направление  $l = l(J)$  в точке  $x$ :

$$l_{оп} = -A_{оп}^{-1} A_n l_n; \quad l_j = d_j^* - x_j \quad \text{при} \quad \Delta_j < 0; \quad l_j = d_{*j} - x_j \quad \text{при} \quad \Delta_j > 0; \\ l_j \in [d_{*j} - x_j, d_j^* - x_j] \quad \text{при} \quad \Delta_j = 0, \quad j \in J_n. \quad (2)$$

\* Для определенности обычно полагают  $l_j = 0$  при  $\Delta_j = 0, j \in J_n$ .

Предположим, что как величина  $\Theta$  прямого шага [2] вдоль  $l$ , так и величина  $\sigma$  двойственного шага [2] при замене опоры  $A_{\text{оп}}$  равны нулю:  $\Theta = \sigma = 0$ . Поскольку  $\beta(x, A_{\text{оп}}) > \epsilon$ , то, по крайней мере, один из элементов  $x, A_{\text{оп}}$  не является оптимальным. Чтобы не пропустить случай, когда среди  $x, A_{\text{оп}}$  есть оптимальные, нужно, очевидно, построить процедуру проверки их на оптимальность. Оставляя в качестве упражнения случай с  $x$ , рассмотрим вопрос об оптимальности  $A_{\text{оп}}$ .

Пусть  $\Delta = \Delta(J)$  — сопровождающий базисный коплан [2] опоры  $A_{\text{оп}}$ . Известно [2], что  $A_{\text{оп}}$  — оптимальная опора тогда и только тогда, когда совместна относительно  $l_j, j \in J_{\text{но}} = \{j \in J_{\text{н}} : \Delta_j = 0\}$ , линейная система

$$\begin{aligned} d_{*i} - x_i &\leq - \sum_{j \in J_{\text{но}}} x_{ij} l_j - \alpha_i \leq d_i^* - x_i, \quad i \in J_{\text{оп}}; \\ d_{*j} - x_j &\leq l_j \leq d_j^* - x_j, \quad j \in J_{\text{но}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha(J_{\text{оп}}) = A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{н}^*}) l(J_{\text{н}^*})$ ,  $J_{\text{н}^*} = J_{\text{н}} \setminus J_{\text{но}}$ ;  $l(J_{\text{н}^*})$  определено согласно (2),  $\{x_{ij}, j \in J_{\text{но}}\} = A_{\text{оп}}^{-1}(i, I) A(I, J_{\text{но}})$ .

Проверку системы (3) на совместность можно осуществить с помощью разнообразных экстремальных задач.

Предположим, что система (3) совместна и  $l^0(J_{\text{но}})$  — ее решение. Тогда  $x^0 = x + l^0$ , где  $l^0 = \{l^0(J_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{но}}) l^0(J_{\text{но}}) - \alpha(J_{\text{оп}}), l^0(J_{\text{но}}), l(J_{\text{н}^*})\}$ , — оптимальный план задачи (1). Решение задачи (1) прекращается.

Предположим, что система (3) несовместна. Тогда существуют такие числа  $\psi(J_{\text{оп}})$ , что

$$- \sum_{j \in J_{\text{оп}}} \alpha_j \psi_j + \sum_{j \in J_{\text{оп}} \cup J_{\text{но}}} (d_j^* - x_j) \xi_j - \sum_{j \in J_{\text{оп}} \cup J_{\text{но}}} (d_{*j} - x_j) \zeta_j < 0, \quad (4)$$

$$\psi(J_{\text{оп}}) + \xi(J_{\text{оп}}) - \zeta(J_{\text{оп}}) = 0, \quad \psi'(J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{но}}) + \xi(J_{\text{но}}) - \zeta(J_{\text{но}}) = 0, \\ \xi(J_{\text{оп}} \cup J_{\text{но}}) \geq 0, \quad \zeta(J_{\text{оп}} \cup J_{\text{но}}) \geq 0.$$

Положив  $\varphi' = \psi' A_{\text{оп}}^{-1}$ ,  $\gamma' = \varphi' A$ , из (4) получим

$$b' \varphi + \sum_{j \in J} d_j^* \xi_j - \sum_{j \in J} d_{*j} \zeta_j < 0, \quad (5)$$

где  $\xi_j = 0, \zeta_j = \gamma_j$  при  $\gamma_j \geq 0$ ;  $\xi_j = -\gamma_j, \zeta_j = 0$  при  $\gamma_j < 0, j \in J_{\text{оп}} \cup J_{\text{но}}$ ;  $\xi_j = 0, \zeta_j = \gamma_j$  при  $\Delta_j > 0$ ;  $\xi_j = -\gamma_j, \zeta_j = 0$  при  $\Delta_j < 0, j \in J_{\text{н}^*}$ . Неравенство (5) означает, что построенный вектор  $\gamma$  составляет подходящее направление для коплана  $\Delta$ , сопровождающего опоры  $A_{\text{оп}}$ , т. е. опоры  $A_{\text{оп}}$  не является оптимальной.

Построим новый коплан  $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma \gamma$ , где  $\sigma = \sigma_{j^*} > 0, j^* \in J_{\text{н}^*}$ . Нетрудно показать, что числа  $\psi(J_{\text{оп}})$ , удовлетворяющие (4), можно подобрать так, что коплан  $\bar{\Delta}$  будет базисным, т. е. существует такое подмножество  $J_{\text{оп}} \subset J$ , что  $\det A(I, J_{\text{оп}}) \neq 0$  и  $\bar{\Delta}_j = 0, j \in J_{\text{оп}}$ . В этом случае коплан  $\bar{\Delta}$  совпадает с копланом, сопровождающим опоры  $\bar{A}_{\text{оп}} = A(I, J_{\text{оп}})$ . Новую итерацию адаптивного метода начинаем с опорного плана  $\{x, \bar{A}_{\text{оп}}\}$ , для которого  $\beta(\bar{A}_{\text{оп}}) < \beta(A_{\text{оп}})$ .

2. «Чисто» вырожденный случай, рассмотренный в п. 1, представляет только теоретический интерес и удобен для объяснения идеи предлагаемой модификации метода [2]. Внедрение последней в практические расчеты связано с  $v$ -модификацией,  $v = \{v_x \geq 0, v_{\Delta} \geq 0\}$ , которая основана на понятии квазивырожденности.

Пусть  $J_{\text{оп}}^* = J_{\text{оп}}^*(v_x) = \{j \in J_{\text{оп}} : x_j \geq d_j^* - v_x\}$ ,  $J_{\text{оп}^*} = J_{\text{оп}^*}(v_x) = \{j \in J_{\text{оп}} : x_j \leq d_{*j} + v_x\}$ ,  $J_{\text{но}} = J_{\text{но}}(v_{\Delta}) = \{j \in J_{\text{н}} : |\Delta_j| \leq v_{\Delta}\}$ . Копланом,  $v_{\Delta}$  — сопровождающим опоры  $A_{\text{оп}} = A(I, J_{\text{оп}})$ , назовем коплан  $\Delta$  задачи (1), для которого  $|\Delta_j| \leq v_{\Delta}, j \in J_{\text{оп}}$ . (Такие копланы естественно назвать  $v_{\Delta}$ -базисными копланами).

*Определение.* Опорный план  $\{x, A_{\text{оп}}\}$  с  $v_{\Delta}$ -сопровождающим копланом  $\Delta$  называется  $v$ -вырожденным,  $v = \{v_x, v_{\Delta}\} \geq 0$ , если

$$J_{\text{оп}}(v_x) \cup J_{\text{оп}*}(v_x) \neq \emptyset, J_{\text{н0}}(v_{\Delta}) \neq \emptyset.$$

Пусть  $\{x, A_{\text{оп}}\}$  —  $v$ -вырожденный опорный план задачи (1),  $\Delta$  —  $v_{\Delta}$ -сопровождающий коплан. Паре  $\{x, \Delta\}$  поставим в соответствие оценку субоптимальности  $\beta(x, \Delta)$ :

$$\beta(x, \Delta) = \sum_{j \in J_0, \Delta_j > 0} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_0, \Delta_j < 0} \Delta_j (x_j - d_j^*).$$

Оценка вклада в оценку субоптимальности  $\beta(x, \Delta)$  переменных  $x_j, \Delta_j, j \in J_0 = J_0(v_{\Delta}) = J_{\text{оп}} \cup J_{\text{н0}}(v_{\Delta})$ , имеет вид:

$$\sum_{j \in J_0, \Delta_j > 0} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_0, \Delta_j < 0} \Delta_j (x_j - d_j^*) \leq v_{\Delta} \sum_{j \in J_0} \max\{x_j - d_{*j}, d_j^* - x_j\}.$$

Предположим, что на опорном плане  $\{x, A_{\text{оп}}\}$  выполняется неравенство

$$v_{\Delta} \sum_{j \in J_0} \max\{x_j - d_{*j}, d_j^* - x_j\} \leq \varepsilon/2. \quad (6)$$

Если неравенство (6) не имеет места, то следует уменьшить параметр  $v_{\Delta}$  и построить новое множество  $J_0(\bar{v}_{\Delta})$ . Заметим, что неравенство (6) будет иметь место для любого опорного плана  $\{x, A_{\text{оп}}\}$ , если  $v_{\Delta} \leq \varepsilon/2$ :

$$: \sum_{j \in J} (d_j^* - d_{*j}).$$

По предположению, рассматривается случай  $\beta(x, \Delta) > \varepsilon$ . По опорному плану  $\{x, A_{\text{оп}}\}$  и коплану  $\Delta$  построим направление  $l(J)$ :

$$l(J_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} A_{\text{н}} l(J_{\text{н}}); \quad l_j = d_j^* - x_j \quad \text{при} \quad \Delta_j < -v_{\Delta}, \quad l_j = d_{*j} - x_j, \quad \text{при} \\ \Delta_j > v_{\Delta}, \quad l_j \in [d_{*j} - x_j, d_j^* - x_j] \quad \text{при} \quad |\Delta_j| \leq v_{\Delta}, \quad j \in J_{\text{н}}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что в случае  $J_{\text{н0}}(v_{\Delta}) \neq \emptyset$  направление  $l(J)$  строится неоднозначно. Для определенности положим  $l_j = 0, j \in J_{\text{н0}}(v_{\Delta})$ , и осуществим одну итерацию адаптивного метода.

Интерес представляет случай, когда 1) прямой шаг  $\Theta = \Theta_{j_0} < 1$  достигается на переменной  $x_{j_0}, j_0 \in J_{\text{оп}}^*(v_x)$ , при  $l_{j_0} > 0$  или на переменной  $x_{j_0}, j_0 \in J_{\text{оп}*}(v_x)$ , при  $l_{j_0} < 0$ ; 2) двойственный шаг  $\sigma = \sigma_{j^*}$  достигается на переменной  $\Delta_{j^*}, j^* \in J_{\text{н0}}(v_{\Delta})$ . В этом случае следование методу [2] может привести к весьма малым шагам  $\theta$  и  $\sigma$ .

По аналогии с п. 1 проверим на совместность систему (3) с  $J_{\text{н0}} = J_{\text{н0}}(v_{\Delta})$ . Проводя рассуждения, аналогичные п. 1, можно показать, что в случае совместности системы (3) легко построить  $\varepsilon$ -оптимальный план задачи (1), а в случае несовместности системы (3) — новый опорный план  $\{x, \bar{A}_{\text{оп}}\}$  с  $v_{\Delta}$ -сопровождающим копланом  $\bar{\Delta}$ , для которого  $\beta(x, \bar{\Delta}) < \beta(x, \Delta)$ .

С целью построения упрощенных методов исследования системы (3) на совместность заменим ее на «ослабленную» систему:

$$- \sum_{i \in J_{\text{н0}}(v_{\Delta})} x_{ij} l_j - \alpha_i \begin{cases} \geq d_{*i} - x_i, & i \in J_{\text{оп}*}(v_x), \\ \leq d_i^* - x_i, & i \in J_{\text{оп}}^*(v_x), \end{cases} \quad (8) \\ d_{*j} - x_j \leq l_j \leq d_j^* - x_j, \quad j \in J_{\text{н0}}(v_{\Delta}),$$

где  $\alpha(J_{\text{оп}}) = A_{\text{оп}}^{-1} A(I, J_{\text{н}*}(v_{\Delta})) l(J_{\text{н}*}(v_{\Delta}))$ ,  $J_{\text{н}*} = J_{\text{н}*}(v_{\Delta}) = J_{\text{н}} \setminus J_{\text{н0}}(v_{\Delta})$ ,  $l(J_{\text{н}*}(v_{\Delta}))$  определено согласно (7).

Ясно, что совместность (3) влечет совместность системы (8); из несовместности системы (8) следует аналогичное свойство для (3). (В данном пункте, когда речь идет о (3), всегда предполагается, что  $J_{\text{н0}} = J_{\text{н0}}(v_{\Delta})$ ).

Опишем один из методов проверки на совместность системы\* (8). На первом шаге положим  $J^{(1)} = \emptyset$ ,  $J_{H0}^{(1)} = J_{H0}(v_\Delta)$ ,  $J_{H*}^{(1)} = J_{H*}(v_\Delta)$ ,  $\bar{l}_j = d_{*j} - x_j$  при  $\Delta_j > v_\Delta$ ,  $\bar{l}_j = d_j^* - x_j$  при  $\Delta_j < -v_\Delta$ ,  $j \in J_{H*}^{(1)}$ ;  $l_j^{(1)} = 0$ ,  $j \in J_{H0}^{(1)}$ .

Пусть на  $s$ -ом шаге имеются множества  $J^{(s)} \subset J_{оп*} \cup J_{оп}^*$ ,  $J_{H0}^{(s)} \subset J_{H0}(v_\Delta)$ ,  $J_{H*}^{(s)} = J_{H*} \setminus J_{H0}^{(s)}$  и векторы  $\bar{l}(J_{H*}^{(s)})$ ,  $l^{(s)}(J_{H0}^{(s)})$ . Положим  $l^{(s)}(J_{оп}) = -A_{оп}^{-1}(A(I, J_{H0}^{(s)})l^{(s)}(J_{H0}^{(s)}) + A(I, J_{H*}^{(s)})\bar{l}(J_{H*}^{(s)}))$ . Если

$$l_j^{(s)} \geq d_{*j} - x_j, j \in J_{оп*}; l_j^{(s)} \leq d_j^* - x_j, j \in J_{оп}^* \quad (9)$$

то система (8) совместна и вектор  $\{l^{(s)}(J_{H0}^{(s)}), \bar{l}(J_{H*}^{(s)} \setminus J_{H*}^*)\}$  — ее решение.

По решению системы (8) построим вектор  $l^*(J) = \{l^{(s)}(J_{оп}), l^{(s)}(J_{H0}^{(s)}), \bar{l}(J_{H*}^{(s)})\}$ . Ясно, что  $l^*(J)$  принадлежит множеству (7) и, следовательно, является подходящим направлением для плана  $x$  в задаче (1). Перейдем к новому плану  $\bar{x} = x + \theta l$ , где  $\theta = \min\{1, \theta_{j_0}\}$  — максимально допустимый шаг [2] вдоль  $l^*$ . Используя (9), нетрудно показать, что  $\theta > M_x v_x$  и при  $\theta = \theta_{j_0} < 1$  индекс  $j_0 \in \{j \in J_{оп*} : l_j < 0\} \cup \{j \in J_{оп}^* : l_j > 0\}$ . Здесь  $M_x$  — положительное число, определяемое параметрами задачи (1). Новую итерацию адаптивного метода начинаем с нового опорного плана  $\{\bar{x}, A_{оп}\}$ , для которого  $\beta(\bar{x}, \Delta) < \beta(x, \Delta)$ .

Пусть условия (9) не выполняются, т. е. существует такой индекс  $j_s \in J_{оп*}$ ,  $j_s \neq j_k$ ,  $k = \bar{1}, s - \bar{1}$ , что  $l_{j_s}^{(s)} < d_{*j_s} - x_{j_s}$  или  $j_s \in J_{оп}^*$ ,  $j_s \neq j_k$ ,  $k = \bar{1}, s - \bar{1}$ ,  $l_{j_s}^{(s)} > d_{j_s}^* - x_{j_s}$ . В этом случае продолжаем исследование системы (8) на совместность;  $v$ -модификацией,  $\bar{v} = \{v_x, 0\}$ , адаптивного метода решим задачу (s):

$$l_{j_s} = \max_{i \in J_{H0}^{(s)}} k \left( - \sum_{j \in J_{H0}^{(s)}} x_{j_s j} l_j - \alpha_{j_s}^{(s)} \right),$$

$$- \sum_{j \in J_{H0}^{(s)}} x_{ij} l_j - \alpha_i^{(s)} \begin{cases} \geq d_{*i} - x_i & \text{при } i \in J^{(s)} \cap J_{оп*}, \\ \leq d_i^* - x_i & \text{при } i \in J^{(s)} \cap J_{оп}^*, \end{cases} \quad (s)$$

$d_{*i} - x_j \leq l_j \leq d_j^* - x_j$ ,  $j \in J_{H0}^{(s)}$ , где  $\alpha_i^{(s)} = \sum_{j \in J_{H*}^{(s)}} x_{ij} \bar{l}_j$ ;  $k = 1$  при  $j_s \in J_{оп*}$ ,

$k = -1$  при  $j_s \in J_{оп}^*$ , взяв в качестве начального опорного плана опорный план, на котором было остановлено решение задачи  $(s - 1)$ .

Решение задачи (s) прекращаем на опорном плане  $\{l^{(s+1)}(J_{H0}^{(s)}); J_{(оп)}^{(s)}, J_{H0(оп)}^{(s)}\}$ ,  $J_{(оп)}^{(s)} \subset J^{(s)}$ ,  $J_{H0(оп)}^{(s)} \subset J_{H0}^{(s)}$ , в следующих случаях;

а) если  $l_{j_s}^{(s+1)} = - \sum_{j \in J_{H0}^{(s)}} x_{j_s j} l_j^{(s+1)} - \alpha_{j_s}^{(s)} > d_{*j_s} - x_{j_s}$  при  $k = 1$  или  $l_{j_s}^{(s+1)} < d_{j_s}^* - x_{j_s}$  при  $k = -1$ ;

б) если  $\{l^{(s+1)}(J_{H0}^{(s)}); J_{оп}^{(s)}, J_{H0(оп)}^{(s)}\}$  — оптимальный план задачи (s) и  $l_{j_s}^{(s+1)} = d_{*j_s} - x_{j_s}$  при  $k = 1$  или  $l_{j_s}^{(s+1)} = d_{j_s}^* - x_{j_s}$  при  $k = -1$ ;

в) если значение двойственной целевой функции задачи (s) на двойственном плане  $\psi^{(s)}(J^{(s)})$ , сопровождающем опору  $\{J_{(оп)}^{(s)}, J_{H0(оп)}^{(s)}\}$ , при  $k = 1$  меньше, чем  $d_{*j_s} - x_{j_s}$  или при  $k = -1$  больше, чем  $d_{j_s}^* - x_{j_s}$ .

В случае а) полагаем  $J^{(s+1)} = J^{(s)} \cup j_s$ ,  $J_{H0}^{(s+1)} = J_{H0}^{(s)}$  и переходим к  $(s + 1)$ -ому шагу.

В случае б) полагаем  $J^{(s+1)} = J^{(s)}$ ,  $J_{H0}^{(s+1)} = J_{H0}^{(s)} \setminus J_{H0}^{(s)}$ .

\* Аналогичный метод можно использовать для проверки на совместность системы (3).

$$\bar{l}_j = \begin{cases} d_j^* - x_j, & \text{если } \gamma_j^{(s)} < 0, \\ d_{*j} - x_j, & \text{если } \gamma_j^{(s)} > 0, \end{cases} \quad j \in J_{n0}^{(s)} = \{j \in J_{n0}^{(s)} : \gamma_j^{(s)} \neq 0\},$$

и переходим к  $(s+1)$ -ому шагу. Здесь  $\gamma^{(s)}(J_{n0}^{(s)})$  — коплан, сопровождающий опору  $\{J_{\text{оп}}^{(s)}, J_{n0(\text{оп})}^{(s)}\}$ .

Случай в) означает, что система (8) несовместна. Следовательно, несовместна и система (3) и опора  $A_{\text{оп}}$  не является оптимальной. Легко проверить, что вектор  $\gamma = \gamma(J) = \{\gamma_j = 0, j \in J_{\text{оп}} \setminus (J^{(s)} \cup j_s), \gamma_{j_s} = k, \gamma_j = \psi_j^{(s)}, j \in J^{(s)}, \gamma_j = \sum_{i \in J^{(s)}} x_{ij} \psi_i^{(s)} + k x_{j_s j}, j \in J_n\}$  задает подходящее на-

правление для коплана  $\Delta$ ,  $v_\Delta$  — сопровождающего опору  $A_{\text{оп}}$ , причем максимально допустимый шаг [2] вдоль  $\gamma$  равен  $\sigma = \sigma_{j_*} > M_\Delta v_\Delta, j_* \in J_{n*}(v_\Delta)$ . Здесь  $M_\Delta$  — положительное число, определяемое параметрами задачи (1).

По построению,  $\det A(I, \bar{J}_{\text{оп}}) \neq 0, \bar{J}_{\text{оп}} = ((J_{\text{оп}} \setminus J_{\text{оп}}^{(s)}) \cup J_{n0(\text{оп})}^{(s)}) \setminus j_s \cup j_*$ , и

$$\gamma_j = 0, j \in (J_{\text{оп}} \setminus J_{\text{оп}}^{(s)}) \cup J_{n0(\text{оп})}^{(s)} \setminus j_s. \quad (10)$$

Следовательно, коплан  $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma \gamma$  является  $v_\Delta$ -сопровождающим копланом для опоры  $\bar{A}_{\text{оп}} = A(I, \bar{J}_{\text{оп}})$ . Новую итерацию адаптивного метода начинаем с опорного плана  $\{x, \bar{A}_{\text{оп}}\}$  и коплана  $\bar{\Delta}$ , для которых справедливо неравенство  $\beta(x, \bar{\Delta}) < \beta(x, \Delta)$ .

**З а м е ч а н и е.** Для решения задачи (s) можно было бы воспользоваться  $\bar{v} = \{\bar{v}_x \geq 0, \bar{v}_\Delta \geq 0\}$ -модификацией адаптивного метода. Однако при такой модификации в общем случае вместо (10) выполняются условия  $\gamma_j = 0, j \in (J_{\text{оп}} \setminus J_{\text{оп}}^{(s)}) \setminus j_s, |\gamma_j| \leq \bar{v}_\Delta, j \in J_{n0(\text{оп})}^{(s)}$ , из которых следует, что  $|\bar{\Delta}_j| \leq v_\Delta + \sigma \bar{v}_\Delta, j \in J_{n0(\text{оп})}^{(s)}$ , т. е. новый коплан  $\bar{\Delta}$  может оказаться не  $v_\Delta$ -базисным. Если это произойдет, то для того, чтобы продолжить решение задачи (10) адаптивным методом, нужно по правилам двойственного опорного метода [2] перейти от опорного коплана  $\{\bar{\Delta}, \bar{A}_{\text{оп}}\}$  к  $v_\Delta$ -базисному коплану  $\{\tilde{\Delta}, \tilde{A}_{\text{оп}}\}$ , который по значению двойственной целевой функции не хуже  $\bar{\Delta}$ .

**3. Конечность метода.** Совокупность операций, связанных с построением нового опорного плана задачи (1), назовем итерацией  $v$ -модифицированного адаптивного метода. Итерацию назовем простой, если при переходе к новому опорному плану не использовалась процедура проверки на совместность системы (8). В противном случае итерацию назовем сложной.

**Теорема.** Для решения задачи (1)  $v$ -модифицированным,  $v = \{v_x > 0, v_\Delta \geq 0\}$ , адаптивным методом требуется осуществить лишь конечное число операций.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы основано на следующих леммах.

**Лемма 1.** При  $v_x > 0$  задача (1)  $v$ -модифицированным адаптивным методом решается за конечное число итераций.

**Лемма 2.** Для осуществления одной сложной итерации  $v$ -модифицированного,  $v = \{v_x > 0, v_\Delta \geq 0\}$ , адаптивного метода требуется конечное число операций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения.— М., 1964.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.— Докл. АН БССР, 1978, № 3.

## ОЦЕНКА КОВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ КРАМЕРА И ПЕРЕМЕШИВАНИЮ «ПО ИБРАГИМОВУ»

Оценки ковариаций случайных величин используются при доказательстве центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин [1] и при оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме [2].

*Определение 1.* Величину

$$\beta = \sup_{A \in F_\xi, B \in F_\eta} |P(A/B) - P(A)| \quad (1)$$

назовем коэффициентом перемешивания «по Ибрагимову» случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ , где  $F_\xi, F_\eta$  —  $\sigma$ -алгебры, порожденные соответственно случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$ .

Соотношение (1) равносильно следующему (см. [1]):

$$\beta = \sup_{A \in F_\xi} [\text{vrai sup}_\omega |P(A/F_\eta) - P(A)|], \quad (2)$$

$\text{vrai sup}_\omega \xi(\omega) = C$  означает, что  $P(\xi > C) = 0$  и для любого  $\varepsilon > 0$   $P(\xi > C - \varepsilon) > 0$ .

*Определение 2.* Случайная величина  $\xi$  называется удовлетворяющей условию Крамера  $K(a, C)$ , если  $M \exp\{a|\xi|\} \leq C, a > 0$ .

**Теорема 1.** Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  с коэффициентом перемешивания  $\beta$  удовлетворяют условию  $K(a, C)$ . Тогда

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{8C}{a^2} \beta (1 + |\ln \beta|). \quad (3)$$

*Доказательство.* Введем случайные величины

$$\xi_N = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leq N \\ 0, & |\xi| > N \end{cases}, \quad \bar{\xi}_N = \xi - \xi_N.$$

Используя неравенство Шварца, имеем

$$\begin{aligned} |\text{cov}(\xi, \eta)| &= |M\xi\eta - M\xi M\eta| \leq |M\xi_N\eta - M\xi_N M\eta| + M|\bar{\xi}_N\eta| + \\ &+ M|\bar{\xi}_N| M|\eta| \leq M|\eta| |M(\xi_N|\eta) - M\xi_N| + 2M^{\frac{1}{2}} \bar{\xi}_N^2 M^{\frac{1}{2}} \eta^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть  $\xi_N = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ ,  $|a_i| \leq N$ , события  $A_i$  образуют полную группу событий, тогда

$$|M(\xi_N|\eta) - M\xi_N| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \{P(A_i|\eta) - P(A_i)\} \right| \leq N \sum_{i=1}^n |P(A_i|\eta) - P(A_i)|. \quad (5)$$

Положим  $B_i = \{\omega: [P(A_i|\eta) - P(A_i)] > 0\}$ . События  $B_i$  могут быть совместны. Рассмотрим несовместные события  $C_j$ , такие, что каждое  $B_i$  можно представить в виде конечной суммы событий  $C_j$ . Таких событий  $C_j$  можно выбрать не более  $2^n$ , тогда

$$\sum_{i=1}^n |P(A_i|\eta) - P(A_i)| = \sum_{i=1}^n [P(A_i|\eta) - P(A_i)] \chi_{B_i} - \sum_{i=1}^n [P(A_i|\eta) - P(A_i)] \chi_{B_i}.$$

Используя события  $C_j$ , получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [P(A_i/\eta) - P(A_i)] \chi_{B_i} = \sum_{i=1}^n [P(A_i/\eta) - P(A_i)] \sum_{j: (C_j \subset B_i)} \chi_{C_j} = \\ & = \sum_j \chi_{C_j} \sum_{i: (B_i \supset C_j)} [P(A_i/\eta) - P(A_i)] = \sum_j \chi_{C_j} [P(\bigcup_{i: (B_i \supset C_j)} A_i/\eta) - P(\bigcup_{i: (B_i \supset C_j)} A_i)]. \end{aligned}$$

Из условия (2) следует

$$\text{vrai sup}_{\omega} |P(\bigcup_{i: (B_i \supset C_j)} A_i/\eta) - P(\bigcup_{i: (B_i \supset C_j)} A_i)| \leq \beta.$$

Следовательно,

$$\text{vrai sup}_{\omega} \sum_{i=1}^n [P(A_i/\eta) - P(A_i)] \chi_{B_i} \leq \beta.$$

Аналогичным образом получим

$$\text{vrai sup}_{\omega} \left| \sum_{i=1}^n [P(A_i/\eta) - P(A_i)] \chi_{\bar{B}_i} \right| \leq \beta.$$

Из этих неравенств имеем

$$\text{vrai sup}_{\omega} \sum_{i=1}^n |P(A_i/\eta) - P(A_i)| \leq 2\beta.$$

Тогда из (5) следует, что

$$\text{vrai sup}_{\omega} |M(\xi_N/\eta) - M\xi_N| \leq 2N\beta. \quad (6)$$

Эта оценка справедлива для любых простых случайных величин  $\xi_N$ , поэтому она будет справедлива и для произвольных случайных величин  $\xi_N$ . Так как для любых  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$  справедливо неравенство  $x^k \leq \frac{k!}{a^k} \exp\{ax\}$ , то, заменяя в этом неравенстве  $x$  на  $|\eta|$  и используя свойства математического ожидания, получаем

$$M|\eta| \leq \frac{1}{a} M \exp\{a|\eta|\} \leq \frac{C}{a}, \quad M\eta^2 \leq \frac{2}{a^2} M \exp\{a|\eta|\} \leq \frac{2C}{a^2}. \quad (7)$$

Из условия  $K(a, C)$  следует

$$\begin{aligned} C & \geq M \exp\{a|\xi|\} \geq M \exp\{a|\bar{\xi}_N|\} \geq M \exp\left\{\frac{a}{2} |\bar{\xi}_N|\right\} \times \\ & \times \exp\left\{\frac{a}{2} |\bar{\xi}_N|\right\} \chi_{(\bar{\xi}_N=0)} \geq \exp\left\{\frac{a}{2} N\right\} M \exp\left\{\frac{a}{2} |\bar{\xi}_N|\right\} \chi_{(\bar{\xi}_N=0)}, \end{aligned}$$

отсюда

$$M\bar{\xi}_N^2 \leq \frac{8}{a^2} M \exp\left\{\frac{a}{2} |\bar{\xi}_N|\right\} \chi_{(\bar{\xi}_N=0)} \leq \frac{8C}{a^2} \exp\left\{-\frac{a}{2} N\right\}. \quad (8)$$

Используя неравенства (4), (6) — (8), получаем

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{2C}{a} N\beta + \frac{8C}{a^2} \exp\left\{-\frac{a}{4} N\right\}.$$

Так как это неравенство справедливо при любом  $N$ , то, полагая  $N = \frac{a}{4} |\ln \beta|$ , получаем

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \frac{8C}{a^2} \beta (1 + |\ln \beta|),$$

что требовалось доказать.

Данная оценка, как асимптотическая формула, по  $\beta$  неулучшаема, так как справедлива

**Теорема 2.** Для любого  $\beta \leq \frac{1}{2}$  справедлива оценка

$$\sup_{\xi, \eta} |\text{cov}(\xi, \eta)| \geq \frac{\ln(2C-1)}{2a^2} \beta \ln \frac{C-1+\beta}{\beta}, \quad (9)$$

где точная верхняя грань берется по всем случайным величинам  $\xi$  и  $\eta$ , удовлетворяющим условию  $K(a, C)$ , коэффициент перемешивания «по Ибрагимову» случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  равен  $\beta$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , имеющие распределение при  $\beta \leq \frac{1}{2}$ :

$$P(\xi = C_1, \eta = C_2) = \beta, \quad P(\xi = C_1, \eta = 0) = 0, \\ P(\xi = 0, \eta = C_2) = 0,5 - \beta, \quad P(\xi = 0, \eta = 0) = 0,5.$$

Коэффициент перемешивания «по Ибрагимову» случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  равен  $\beta$ . Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  будут удовлетворять условию  $K(a, C)$ , если положить

$$C_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{C-1+\beta}{\beta}, \quad C_2 = \frac{1}{a} \ln(2C-1),$$

тогда

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \frac{\ln(2C-1)}{2a^2} \beta \ln \frac{C-1+\beta}{\beta}.$$

Теорема доказана.

Скорость сходимости к нулю оценок (3), (9) при  $\beta \rightarrow 0$  отличается только постоянным множителем. Отсюда следует асимптотическая неулучшаемость оценки (3) по  $\beta$ .

В работе [3] приводится оценка ковариаций случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  при их более слабой зависимости (перемешивание «по Розенблатту»). В этой работе показана асимптотическая неулучшаемость этой оценки по коэффициенту перемешивания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М., 1965.
2. Сунклодас И.— Литовский матем. сб., 1977, т. 17, № 3, с. 41, 194.
3. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Литовский матем. сб., 1975, т. 15, № 1, с. 111.

Поступила в редакцию  
24.04.80.

Кафедра теории вероятностей  
и математической статистики

УДК 517.917

Б. С. КАЛИТИН

### К УСТОЙЧИВОСТИ РАЗРЫВНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДВУМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Детальное исследование систем дифференциальных уравнений, подверженных действию импульсных возмущений на заданных множествах фазового пространства, проведено в работах [1, 2]. К примерам конкретных представителей таких систем можно отнести теорию часов с ударами [3], движение осциллятора под действием мгновенной силы [4]. Во всех случаях рассматриваемые процессы описываются дифференциальными системами второго порядка. В частности, ставятся задачи существования единственности и устойчивости разрывных периодических режимов.

Следует отметить, что, если речь идет о разрывных системах, классические методы исследования предельных циклов непосредственно применить нельзя. Здесь существенную роль играют метрические элементы кусков траекторий, причем всякое невырожденное (даже линейное) пре-

образование не гарантирует сохранения интересующих свойств особых точек и периодических движений.

В настоящей статье в достаточно общей постановке рассматривается задача устойчивости разрывного предельного цикла при условии его существования.

1. Пусть имеется дифференциальная система второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где функции  $P$  и  $Q$  непрерывно дифференцируемы по каждой из переменных  $x$  и  $y$  в некоторой области  $D$ . Смысл области  $D$  будет уточнен несколько позднее.

Будем предполагать, что любая траектория  $\{x(t), y(t)\}$  системы (1), попадая в конечный момент времени  $t=t_0$  на прямую  $x=x_0$  в какой-либо точке  $y=y_0$ , терпит разрыв. Величина скачка этой траектории задается следующими условиями:

$$x(t_0) = x(t_0-0) = x_0; \quad y(t_0) = F[y(t_0-0)]; \quad F(y) \neq y, \quad (2)$$

где  $F(y)$  — непрерывно дифференцируемая функция для  $(x_0, y) \in D$ . Пусть

$$x = x(t, x_0, y_1); \quad y = y(t, x_0, y_1), \quad (3)$$

траектория системы (1) с начальными значениями  $x(0, x_0, y_1) = x_0$ ,  $y(0, x_0, y_1) = y_1$  в области  $D$ .

**Определение 1.** Если траектория (3) не имеет особых точек системы (1) при  $0 \leq t \leq \tau$  ( $\tau > 0$ ) и выполняются условия:

а)  $x(\tau, x_0, y_1) = x_0$ ; б)  $F[y(\tau, x_0, y_1)] = y_1$ ; в)  $x(\bar{t}, x_0, y_1) = x_0$  для  $0 < \bar{t} \leq \tau$  только при  $F[y(\tau, x_0, y_1)] = y(\tau, x_0, y_1)$ , то (3) будем называть периодическим движением системы (1), (2) с одним скачком на периоде.

После сделанных высказываний под областью  $D$  будем понимать область, содержащую кусок  $L$  траектории (3) при  $0 \leq t \leq \tau$  и отрезок  $[y_1, y_2]$  ( $y_2 = y(\tau, x_0, y_1)$ ) вертикальной прямой  $x = x_0$  вместе с некоторой открытой окрестностью.

Пусть  $z(t) = \{x(t), y(t)\}$  — вектор-решение системы (1) с начальным условием  $z(0) = z_0 = \{x(0), y(0)\}$ . Известно следующее

**Определение 2.** Движение  $z(t)$  системы (1) называется устойчивым, если по любому числу  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что при условии  $\|z(0) - \eta(0)\| < \delta$  выполняется неравенство  $\|z(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$  для  $t \geq 0$ , где  $\eta(t)$ , как и  $z(t)$ , — решения системы (1), определенные для  $0 \leq t < +\infty$ .

Обозначим через  $M$  траекторию  $\eta(t)$ , а через  $\rho(z_1, z_2)$  — расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$  фазового пространства  $xy$ .

**Определение 3.** Движение  $z(t)$  системы (1) называется орбитально устойчивым, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется положительное число  $\delta > 0$  такое, что при условии  $\rho(z(0), \eta(0)) < \delta$  справедливо неравенство  $\rho(z(t), M) < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$ .

**Теорема 1.** Периодическое движение  $L$  системы (1), (2) неустойчиво в смысле определения 2.

Действительно, предположим, что верно обратное утверждение, т. е. для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что из неравенств

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta, \quad |y_1 - \bar{y}| < \delta \quad (4)$$

следуют соотношения  $|x(t, x_0, y_1) - x(t, \bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon$ ,  $|y(t, x_0, y_1) - y(t, \bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon$ .

Выберем  $\varepsilon > 0$  настолько малым, чтобы в этом случае выполнялось условие

$$\varepsilon \leq \frac{|y_1 - y_2|}{3}. \quad (5)$$

Пусть

$$x = x(t, \bar{x}, \bar{y}), \quad y = y(t, \bar{x}, \bar{y}) \quad (6)$$

такое решение системы (1), для которого имеет место соотношение (4) с некоторым  $\delta(\varepsilon) > 0$ .

Предположим, что  $x(\tau, \bar{x}, \bar{y}) \neq x_0$ . Тогда траектории (3) и (6) терпят разрыв не одновременно и существует момент времени  $t = \tau_1$ , при котором одна из кривых уже попала на прямую скачков, а вторая еще нет.

В силу (5) будем иметь  $|x(\tau_1, x_0, y_1) - x(\tau_1, \bar{x}, \bar{y})| > \varepsilon$ , что соответствует состоянию неустойчивости.

Если же  $x(\tau, \bar{x}, \bar{y}) = x_0$ , то в окрестности  $t = 0$  можно указать точку  $t = t_1$  ( $t_1 > 0$ ) такую, что  $|\bar{x} - x_0| < \delta$ ,  $|\bar{y} - y_1| < \delta$ , где  $\bar{x} = x(t_1, \bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{y} = y(t_1, \bar{x}, \bar{y})$ . Поэтому для решения  $x = x(t, \bar{x}, \bar{y})$ ,  $y = y(t, \bar{x}, \bar{y})$  с учетом предыдущего имеем неравенство  $x(\tau, \bar{x}, \bar{y}) \neq x_0$  и, следовательно, снова существует момент времени  $t = \tau_2$ , при котором  $|x(\tau_2, x_0, y_1) - x(\tau_2, \bar{x}, \bar{y})| > \varepsilon$ . Теорема доказана.

Таким образом, периодическое движение со скачками на заданных множествах не может быть устойчивым в смысле определения 2. В этой связи наблюдается аналогия с непрерывными системами, например, в случае особой точки типа неизохронного центра. Естественно возникает вопрос об устойчивости в смысле определения 3 для разрывных предельных циклов, включая в эти движения лишь непрерывные участки при  $0 \leq t < \tau$ .

**2. Функция последования.** Предположим, что в соответствии с определением 1 выполнены соотношения

$$P(x_0, y_1) \neq 0, P(x_0, y_2) \neq 0. \quad (7)$$

По непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных данных на прямой  $x = x_0$  существует окрестность  $Y \subset \rho\tau_y D$  точки  $y = y_1$ , выходя из которой, все траектории этой системы вновь пересекут вертикаль  $x = x_0$ .

Пусть

$$x = x(t, x_0, \bar{y}), y = y(t, x_0, \bar{y}), \bar{y} \in Y, \quad (8)$$

решение системы (1) в области  $D$ . При возрастании времени траектория (8) при  $t = \tau$  снова попадает на прямую скачков  $x = x_0$  в некоторой точке  $\bar{y}$ , которая с помощью отображения (2) переходит в  $F(\bar{y})$ . Следовательно, можно говорить о функции

$$\Phi(\bar{y}) = F(\bar{y}), \bar{y} \in Y, \quad (9)$$

ставящей в соответствие каждой точке  $y = \bar{y}$  окрестности  $Y$  значение  $F(\bar{y})$ . В частности, для периодического движения  $L$  имеем  $\Phi(y_1) = F(y_2) = y_1$ , т. е. преобразование  $\Phi(y)$  обладает неподвижной точкой. Если в определении 1 функция скачка  $F(y) \equiv y$ , периодическое движение  $L$  оказывается непрерывным. В этом случае функция  $\Phi(y)$  совпадает с обычным определением функции последования [6].

Используя понятие функции соответствия [6, гл. II] легко показать, что введенная функция последования  $\Phi(y)$  является дифференцируемой в области  $\rho\tau_y D$ . Согласно предположению о непрерывной дифференцируемости функции  $F(y)$ , можем записать

$$\frac{d\Phi(\bar{y})}{d\bar{y}} = \frac{dF(\bar{y})}{dy} \cdot \frac{dy}{d\bar{y}}.$$

Вычислим производную  $d\bar{y}/d\bar{y}$ , используя правые части системы (1). Пусть  $\bar{y}_1 \in Y$ . Выпустим из точки  $(x_0, \bar{y}_1)$  траекторию  $\{x(t, x_0, \bar{y}_1), y(t, x_0, \bar{y}_1)\}$  системы (1). Обозначим через  $t = \tau_1$  первый момент времени для  $t > 0$ , при котором  $x(\tau_1, x_0, \bar{y}_1) = x_0$  и положим  $\bar{y}_2 = y(\tau_1, x_0, \bar{y}_1)$ .

По определению производной

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{y}} = \lim_{\bar{y}_1 \rightarrow \bar{y}} \frac{\bar{y} - \bar{y}_2}{\bar{y}_1 - \bar{y}_1} = \lim_{\bar{y}_1 \rightarrow \bar{y}_1} \frac{y(\tau_1, x_0, \bar{y}) - y(\tau_1, x_0, \bar{y}_1)}{y - y_1}.$$

Разлагая по теореме о среднем, будем иметь

$$\frac{y(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) - y(\bar{\tau}_1, x_0, \bar{y}_1)}{y - y_1} = \frac{\partial}{\partial t} y(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) \cdot \frac{\bar{\tau} - \bar{\tau}_1}{y - y_1} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} y(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) + o_1(|\bar{\tau} - \bar{\tau}_1|) + o_2(|\bar{y} - \bar{y}_1|).$$

С другой стороны, по построению  $x(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) - x(\bar{\tau}_1, x_0, \bar{y}_1) = 0$  и аналогично предыдущему справедливо разложение

$$\frac{\partial}{\partial t} x(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) \cdot \frac{\bar{\tau} - \bar{\tau}_1}{y - y_1} = \frac{\partial}{\partial y} x(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) + o_3(|\bar{\tau} - \bar{\tau}_1|) + O_4(|\bar{y} - \bar{y}_1|).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\bar{\tau} - \bar{\tau}_1}{y - y_1} = - \frac{\frac{\partial x}{\partial y} + o_3(|\bar{\tau} - \bar{\tau}_1|) + O_4(|\bar{y} - \bar{y}_1|)}{\frac{\partial x}{\partial t}}$$

Следовательно,

$$\frac{y(\bar{\tau}, x_0, \bar{y}) - y(\bar{\tau}_1, x_0, \bar{y}_1)}{y - y_1} = \frac{\frac{\partial y}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + o_3(|\bar{\tau} - \bar{\tau}_1|) + O_4(|\bar{y} - \bar{y}_1|) + \\ + o_1(|\bar{\tau} - \bar{\tau}_1|) + O_2(|\bar{y} - \bar{y}_1|)}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \\ = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial t}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} + o(|\bar{\tau} - \bar{\tau}_1|) + O_0(|\bar{y} - \bar{y}_1|).$$

Используя формулу (11) [5] для  $n = 2$ , в пределе получим

$$\frac{d\bar{y}(\bar{y})}{d\bar{y}} = \frac{P(x_0, y_1)}{P(x_0, y_2)} \exp \int_0^{\bar{y}} [P'_x(x(t, x_0, \bar{y}), y(t, x_0, \bar{y})) + \\ + Q'_y(x(t, x_0, \bar{y}), y(t, x_0, \bar{y}))] dt.$$

**Определение 4.** Характеристическим показателем предельного цикла  $L$  будем называть величину

$$\chi = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (P'_x(x(t, x_0, y_1), y(t, x_0, y_1)) + Q'_y(x(t, x_0, y_1), y(t, x_0, y_1))) dt + \\ + \ln \left| F'(y_1) \cdot \frac{P(x_0, y_1)}{P(x_0, y_2)} \right|.$$

Отметим, что при условии непрерывности  $L$ , т. е. при выполнении равенства  $F'(y_1) P(x_0, y_1) = P(x_0, y_2)$ , величина  $\chi$  совпадает с обычным определением характеристического показателя [6].

**3. Устойчивость разрывных предельных циклов.** Пусть изображающая точка фазовой плоскости системы (1), (2) начинает свое движение в некоторой окрестности  $L$  области  $D$ . Обозначим через  $y^k$ ,  $k=1, 2, \dots$  последовательность ординат, фиксирующих положение движущейся точки после каждого скачка, начиная с положения  $(x_0, y^1)$  для малых отклонений модуля разности  $|y^1 - y_1|$ .

По предположению п. 2 имеем  $y^2 = \Phi(y^1), \dots, y^k = \Phi(y^{k-1}), \dots$  Тогда для неподвижной точки  $y_1$  преобразования  $\Phi(y)$  из теоремы Кенигса [3, гл. 3] вытекает следующий результат.

**Теорема 2.** Разрывный предельный цикл  $L$  системы (1), (2) орбитально асимптотически устойчив, если  $\chi < 0$  и орбитально неустойчив, если  $\chi > 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Имеют место следующие соотношения:

1) если  $0 < \Phi'(y_1) < 1$ , то  $y^1 > y^2 > y^3 > \dots > y_1$  для  $y^1 > y_1$  и  $y^1 < y^2 < y^3 < \dots < y_1$  для  $y^1 < y_1$ ;

2) если же  $-1 < \Phi'(y_1) < 0$ , то  $y^1 > y^3 > y^5 > \dots > y_1 > \dots > y^4 > y^2$  для  $y^1 > y_1$  и  $y^1 < y^3 < y^5 < \dots < y_1 < \dots < y^4 < y^2$  для  $y^1 < y_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рожко В. Ф.—Математические исследования.— Кишинев, 1969, вып. 3, с. 67.
2. Сибирский К. С., Чиркова И. Л.—Известия АН Молд. ССР, 1963, № 11, с. 42.
3. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М., 1958.
4. Самойленко А. М., Стрижак Т. Г. Труды семинара по матем. физике и нелинейным колебаниям.— Киев, 1968, т. 1, вып. 2.
5. Калитин Б. С.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 1, с. 65.
6. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.— М., 1968.

Поступила в редакцию  
26.09.78.

Кафедра МОУ

УДК 517.983.248

В. А. ЕРОВЕНКО

## АЛГЕБРАИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НЕГИПОНОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим ограниченные линейные операторы, определенные на гильбертовом пространстве  $H$ . В работе [1] для классификации почти всех классов операторов, не являющихся нормальными, предложены следующие три категории (см. также работу [2]): а) алгебраически определенные классы (квазинормальные,  $k$ -гипонормальные, гипонормальные и т. д.); б) классы, определяемые спектральными множествами (спектроидные, нумероидные, транслоидные и т. д.); в) классы, определяемые условиями роста ( $(G_1)$ ,  $(H_1)$ , конвексоидные и т. д.).

Понятие алгебраически определенных операторов введено в [3].

*Определение 1.* Пусть  $\varphi$ —абстрактное свойство операторов и  $T$ —оператор на  $H$ . Свойство  $\varphi$  называется алгебраически определенным (полуопределенным), если существует семейство  $G$  полиномов от операторов  $T$  и  $T^*$  таких, что  $T \in \varphi$  тогда и только тогда, когда  $g(T) = 0$  (соответственно  $g(T) \geq 0$ ) для всех  $g \in G$ .

В работе [1] определено новое алгебраическое (полу)определенное свойство:

*Определение 2.* Пусть  $\varphi$ —алгебраически определенное (полуопределенное) свойство, связанное с семейством полиномов  $G$ . Оператор  $T$  удовлетворяет квази- $\varphi$  свойству, если  $g(T)T = 0$  (соответственно  $T^*g(T)T \geq 0$ ) для каждого  $g \in G$ .

Очевидно, что если  $\varphi$ —алгебраически (полу)определенное свойство, то таким же является и квази- $\varphi$ . Например, класс квазинормальных операторов  $T$  (таких операторов  $T$ , что  $T$  коммутирует с  $T^*T$ ,  $T(T^*T) = (T^*T)T$ ) совпадает с операторами, удовлетворяющими квази- $\varphi$  свойству, где  $\varphi$ —алгебраически определенное свойство с  $g(T) = [T] = T^*T - TT^*$  (класс нормальных операторов  $T$ , для которых  $T^*T - TT^* = 0$ ). Аналогично квази- $\varphi$  класс, соответствующий алгебраически полуопределенному классу гипонормальных операторов, определяемому полиномом  $g(T) = [T]$  (условием  $T^*T - TT^* \geq 0$ ), есть семейство квазигипонормальных операторов, а именно: для этих операторов имеет место неравенство  $T^{*2}T^2 - (T^*T)^2 \geq 0$  [4].

*Определение 3.* Пусть  $\varphi$ —алгебраически (полу)определенное свойство с семейством полиномов  $G$ . Будем говорить, что оператор  $T$  удовлетворяет коквази- $\varphi$  свойству, если  $g(T)T^* = 0$  (соответственно  $Tg(T)T^* \geq 0$ ) для каждого  $g \in G$ .

Из определения следует, что коквази- $\varphi$  свойство является алгебраически (полу)определенным, если таким является  $\varphi$ -свойство. В соответствии с определением 3 оператор  $T$  называется коквазигипонормальным,

если  $(TT^*)^2 \geq T^2T^{*2}$  или, что эквивалентно, для всех  $x \in \mathbf{H}$ ,  $\|T^{*2}x\| \leq \|TT^*x\|$ .

Рассмотрим некоторые свойства квазигипонормальных и коквазигипонормальных операторов. Из определения этих операторов непосредственно следует, что каждый гипонормальный оператор принадлежит указанным классам.

**Теорема 1.** Пусть  $T$  — оператор, определенный на гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}$ . Тогда подпространство  $\{x \in \mathbf{H} : g(T)Fx = |g(T)|Fx, F \in \Omega\}$ , где  $g(T) = (TT^*)^2 - T^2T^{*2}$ ,  $|S| = (S^*S)^{1/2}$ ,  $\Omega$  — множество всех конечных произведений  $T$  и  $T^*$ , есть коквазигипонормальная часть оператора  $T$ .

**Доказательство** непосредственно следует из теоремы 1 работы [1], там же доказана аналогичная теорема для квазигипонормального оператора с  $g(T) = T^{*2}T^2 - (T^*T)^2$ .

Известно [4], что обратимый квазигипонормальный оператор гипонормален. Покажем, что это справедливо и для коквазигипонормального оператора.

**Теорема 2.** Если  $T$  — обратимый коквазигипонормальный оператор, то  $T$  гипонормален.

**Доказательство.** Так как  $T$  — ограниченный обратимый оператор, существует  $T^{-1} = (T^{-1})^*$  и  $T^*(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ , следовательно, для любого  $y \in \mathbf{H}$  найдется  $x \in \mathbf{H}$  такое, что  $y = T^*x$ . Из того, что для коквазигипонормального оператора  $T$  имеет место неравенство  $\|T^{*2}x\| \leq \|TT^*x\|$  для всех  $x \in \mathbf{H}$ , следует, что  $\|T^*y\| \leq \|Ty\|$ , для любого  $y \in \mathbf{H}$ , т. е. оператор  $T$  гипонормален.

**Следствие 1.** Если  $T$  — негипонормальный коквазигипонормальный оператор, то он не обратим.

**Следствие 2.** Если  $T$  — обратимый коквазигипонормальный оператор, то  $T^{-1}$  гипонормален.

Это следует из того, что обратный (если он существует) к гипонормальному оператору гипонормален [5].

**Следствие 3.** Если для любых скаляров  $\alpha$  и  $\beta$  оператор  $\alpha T + \beta I$  коквазигипонормален, то  $T$  — гипонормальный оператор.

Очевидно, что можно выбрать  $\alpha$  и  $\beta$  так, что оператор  $P = \alpha T + \beta I$  будет обратим, и, следовательно, по теореме 2 оператор  $P$  гипонормален, поэтому и гипонормален оператор  $T = \frac{1}{\alpha}(P - \beta I)$  [5].

Если для квазигипонормального оператора  $T$ ,  $N(T^*) \subset N(T)$  ( $N(T) = \{x \in \mathbf{H} : Tx = 0\}$ ), то  $T$  гипонормален [6]. Рассмотрим случай коквазигипонормального оператора.

**Теорема 3.** Если  $T$  — коквазигипонормальный оператор и  $N(T) \subset N(T^*)$ , то  $T$  гипонормален.

Любой элемент  $x \in \mathbf{H}$  можно представить в виде  $x = y + z$ , где  $y \in N(T)$ ,  $z \in \overline{T^*(\mathbf{H})}$ . В силу условий теоремы имеем  $\|T^*x\| = \|T^*z\| \leq \|Tz\| = \|Tx\|$ , для любых  $x \in \mathbf{H}$ , т. е.  $T$  гипонормален.

**Следствие 4.** Если  $T$  и  $T^*$  — коквазигипонормальные операторы и  $N(T) = N(T^*)$ , то  $T$  — нормальный оператор.

**Теорема 4.** Если оператор  $T^2$  — гипонормален и  $T^*$  — квазигипонормален и коквазигипонормален, то  $T$  гипонормален.

**Доказательство.** По условию теоремы для оператора  $T$  имеют место неравенства  $(TT^*)^2 \leq T^2T^{*2}$  и  $T^{*2}T^2 \leq (T^*T)^2$ . Так как оператор  $T^2$  гипонормален, то из соотношения  $T^2T^{*2} \leq T^{*2}T^2$  и предыдущих неравенств имеем, что для  $T$  справедливо соотношение  $(TT^*)^2 \leq (T^*T)^2$  т. е. оператор  $T$  2-гипонормален. Теорема доказана (так как каждый 2-гипонормальный оператор гипонормален [7]).

**З а м е ч а н и е.** Теорема 4 остается верной, если всюду в ее формулировке оператор  $T$  заменить на оператор  $T^*$ .

**Теорема 5.** Для гипонормальных, квазигипонормальных и коквазигипонормальных классов операторов имеют место собственные включения:

$$\{\text{гипонормальные операторы}\} \subset \{\text{квазигипонормальные операторы}\},$$

{гипонормальные операторы}  $\subset$  {коквазигипонормальные операторы}.

В силу изложенного для доказательства достаточности построить пример (ко)квазигипонормального оператора, не являющегося гипонормальным. Пусть  $\mathbf{H}$ -гильбертово пространство вида  $\mathbf{H} = K_1 \dot{+} K_2 \dot{+} \dots$ , где  $K_i = K$  — гильбертово пространство размерности 2, со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n), \text{ где } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2 < \infty, x_n, y_n \in K.$$

По заданным положительным операторам  $A$  и  $B$  определим оператор  $T_{AB}$  на  $\mathbf{H}$ :

$$T_{AB}(x_1, x_2, \dots) = (0, Ax_1, \dots, Ax_n, Bx_{n+1}, Bx_{n+2}, \dots).$$

Прямыми вычислениями нетрудно показать, что оператор  $T_{AB}$  гипонормален тогда и только тогда, когда  $B^2 \geq A^2$ , квазигипонормален тогда и только тогда, когда  $AB^2A \geq A^4$  и коквазигипонормален тогда и только тогда, когда  $B^4 \geq BA^2B$ . Пример квазигипонормального не гипонормального оператора  $T_{AB}$  строится с помощью матриц  $A$  и  $B$  вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы построить пример коквазигипонормального не гипонормального оператора  $T_{AB}$  можно рассмотреть  $A$  и  $B$  вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти примеры показывают, что ни класс квазигипонормальных операторов, ни класс коквазигипонормальных операторов не содержатся друг в друге.

**Теорема 6.** Пусть  $T$  — коквазигипонормальный оператор. Если подпространство  $M$  гильбертова пространства  $\mathbf{H}$  приводит оператор  $T$ , то  $T/M$  — коквазигипонормальный оператор. Если, кроме того,  $T^*(M) = M$ , то  $T/M$  — гипонормальный.

Доказательство очевидно. Эта теорема справедлива и для квазигипонормального оператора  $T$  [4], если вместо условия  $T^*(M) = M$  положить  $T(M) = M$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kubo F.—Math. Japonicae, 1976, v. 21, № 1, p. 23.
2. Kato Y., Nishitani I.—Math. Japonicae, 1976, v. 21, № 2, p. 121.
3. Fujii M., Kajiwara M., Kato Y., Kubo F. Ibid., p. 117.
4. Sheth I. H.—Rev. roum. math. pures et appl., 1974, v. 19, № 8, p. 1049.
5. Stampfli J. G.—Pacif. J. Math., 1962, v. 12, p. 1453.
6. Shah N. C., Sheth I. H.—J. Indian Math. Soc., 1975, v. 39, p. 285.
7. Fujii M., Nakatsu Y.—Proc. Japan Acad., 1975, v. 51, № 4, p. 243.

Поступила в редакцию  
13.06.79.

Кафедра функционального анализа

УДК 681.3.01

С. П. АНТОНОВИЧ, А. П. ГРИШАНОВИЧ,  
Т. И. КОЛЕСНИК, Н. И. ОРЕХОВ

#### МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Циклические и медленно меняющиеся систематические составляющие временного ряда, иначе тренды, в общем виде могут быть описаны конечной суммой синусоидальных компонент. Интервалограмма электрокардиосигнала, взятая как дискретная реализация хронотропной функции сердца, представляет собой сумму трендов различной частоты и случайной составляющей, значениями которой могут быть погрешности измерения, ошибки обработки и т. д. Выделение этих трендов и определе-

ние их параметров позволит оценить влияние различных функциональных ритмов организма и его систем на работу сердца.

Одним из конкретных способов выделения скрытого гармонического тренда является сглаживание дискретного временного ряда с последующим построением автокорреляционной функции (АКФ) [1].

Сглаживание, или цифровая фильтрация, обычно производится методом скользящего среднего, основанном на преобразовании [2]:

$$Y_k(t, N) = \frac{1}{2M+1} \sum_{s=-M}^M X_{k-s}(t), \quad (1)$$

где  $Y_k$  — сглаженный ряд;  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-M)$ ;  $X_k$  — исходный ряд;  $n$  — число дискретных отсчетов  $X_k$ ;  $N=2M+1$  — величина пробного периода, заданная в интервалах ряда.

Влияние процесса сглаживания на частоту выявляемого тренда временного ряда определяется частотной характеристикой преобразования:

$$R(\omega, N) = \frac{\sin\left(\omega N \frac{\Delta t}{2}\right)}{N \sin\left(\omega \frac{\Delta t}{2}\right)}, \quad (2)$$

где  $\omega$  — циклическая частота тренда;  $\Delta t$  — длительность интервала отсчета.

Последовательно вычитая сглаженные ряды из исходного, выделяем колебания с частотами, лежащими внутри выбранных нами полос пропускания цифровых фильтров. Чтобы определить точную частоту выделенных трендов, для каждого отфильтрованного временного ряда обычно строится нормированная АКФ. Если на интервалограмме отфильтрованного ряда имеются скрытые колебания, то АКФ значительно усиливает их. Период колебания АКФ равен периоду тренда.

К сожалению, АКФ не может быть использована при анализе нестационарных процессов, к которым принадлежит абсолютное большинство ритмограмм сердца. Практически любой отрезок ритмограммы включает в себя нестационарные процессы нескольких типов. При наложении некоторых ограничений периодические тренды нестационарного процесса можно рассматривать как относительно периодические [3]. Более строгие ограничения на изменчивость статистических характеристик дают почти периодические тренды или периодические тренды квазистационарного процесса, и, наконец, совсем жесткие ограничения позволяют считать процесс стационарным, а тренд — периодическим. Для анализа нестационарных процессов без наложения ограничений нами разработан метод скользящей корреляционной функции (СКФ) и создана программа для ЭВМ ЕС-1022.

Идея метода заключается в построении корреляционной функции, использующей «окно», скользящее вдоль интервалограммы с постоянным лагом в один интервал отсчета. Для каждого сдвига окна относительно начала интервалограммы вычисляется серия коэффициентов корреляции между отрезком интервалограммы, заключенным в пределах окна, и отрезком внутри того же окна, но сдвигающегося на последовательно возрастающее число интервалов. Каждый коэффициент корреляции возводится в квадрат и фиксируется относительно номера интервала.

Число корреляционных серий будет:  $P=M-N$ , где  $M$  — общее число интервалов;  $N$  — ширина окна в интервалах отсчета.

В дальнейшем квадраты коэффициентов корреляции, принадлежащие разным сериям, но фиксированные относительно одного номера интервала, суммируются и усредняются. Для каждого номера интервала коэффициент корреляции будет пробегать все значения от минимума до максимума. Величина суммарного коэффициента корреляции будет пропорциональна степени гармоничности выделяемого тренда.

Вычислим СКФ для правильной синусоиды. Коэффициент корреляции для дискретных рядов вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}) \cdot (Z_i - \bar{Z})}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_z}, \quad (3)$$

где  $\bar{X}$  и  $\bar{Z}$  — оценки математических ожиданий процессов  $X$  и  $Z$ ;  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  — оценки средних квадратических отклонений.

Если дискретный ряд образуется правильной синусоидой, то  $X_i = \sin(t_i)$ ,  $Z_i = \sin(t_i + \varphi_i)$ , где ряд  $Z_i$  получается при сдвиге ряда  $X_i$  на конкретную величину  $\varphi_i$ .

Тогда можно показать, что  $r = a \cdot \cos(\varphi_i)$  или  $R = a \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  пробегает все значения  $\varphi_i$  при изменении  $i$ ;  $a$  — константа, которая тем ближе к единице, чем меньше  $\Delta t$ .

Для нормировки СКФ преобразуем  $R$  к виду:  $R_{\text{норм}} = 2R^2 = 2 \cos^2 \varphi = 2 \cos^2(t + \varphi_0)$ , где  $\varphi_0 = \pi k/n$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Вычислим СКФ, суммируя  $R_{\text{норм}}$ , фиксированные относительно одного номера интервала:  $R_{\text{сум}} = \sum_{k=1}^n R_{\text{норм}} = 2 \sum_{k=1}^n \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right)$ .

$$\text{Преобразуем сумму в два ряда: } R_{\text{сум}} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + 2 \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right).$$

$$\text{Введем } i = k - \frac{n}{2}, \text{ тогда: } R_{\text{сум}} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n/2} \cos^2\left[t + \frac{\pi(i+n/2)}{n}\right] = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n/2} \sin^2\left(t + \frac{\pi i}{n}\right), \text{ где } k = 1, 2, 3 \dots n/2; i = 1, 2, 3 \dots n/2.$$

$$\text{Заменим } i = k: R_{\text{сум}} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \left[ \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + \sin^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) \right] = 2 \sum_{k=1}^{n/2} 1 = n.$$

Усредним  $R_{\text{сум}}$  по  $n$ :  $R_{\text{сред}} = \text{СКФ} = n/n = 1$ .

Таким образом,  $r_{\text{скф}}$  для правильной синусоиды не зависит от ее параметров и равен единице для всех номеров интервалов. В случае, когда исследуемая синусоида медленно меняет частоту, выходя за пределы полосы пропускания сглаживающего фильтра, значения СКФ будут уменьшаться, достигая нуля. Соответственно соседний фильтр зарегистрирует постепенное появление СКФ, ее возрастание до определенного значения и стабилизацию на этом уровне.

Итоговую кривую можно назвать функцией квазипериодичности (ФКП), так как в местах интервалограммы, где характер тренда наиболее близок к периодичному, кривая будет иметь максимум; в местах, где тренд менее периодичен, значения функции будут уменьшаться; и там, где периодичность будет отсутствовать, значения будут равны нулю.

Нестационарность процесса никак не скажется на амплитуде ФКП, поскольку фазовые изменения корреляционной функции нестационарного процесса автоматически стремятся к нулю при сдвиге окна вдоль ряда.

Для определения точного периода тренда достаточно построить корреляционную функцию для окна, в центре которого наблюдается локальный максимум ФКП (фиксированное окно) и окна, скользящего вдоль ряда от начала фиксированного окна до его конца.

На ширину окна должно быть наложено следующее требование:  $N \cdot f_j \gg 1$ , где  $f_j$  — основная (средняя) частота сглаживающего фильтра  $j$ . В общем случае лаг окна не равен лагу корреляционной функции.

Блок-схема программы на языке ФОРТРАН, реализующей метод выделения тренда нестационарных процессов, показана на рис. 1.



Рис. 1. Блок-схема выделения тренда нестационарного процесса

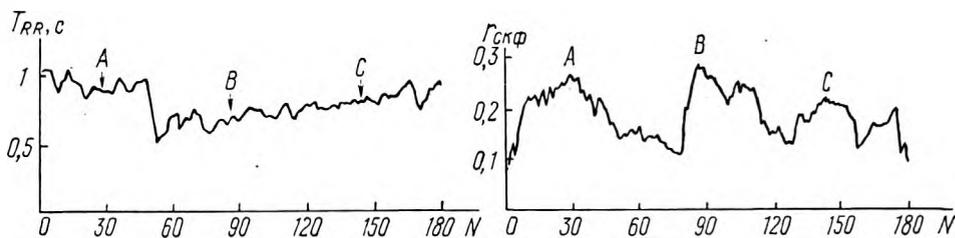


Рис. 2. Интервалограмма ритма сердца:

A, B, C — участки наибольшей гармоничности дыхательного ритма

Рис. 3. Кривая ФКП для фильтра дыхательных частот:

A, B, C — точки локальных максимумов

На рис. 2 показан пример исходного ряда длительностей интервалов кардиосигнала ( $T$ ), характеризующегося выраженной дыхательной аритмией на фоне переходного процесса.

На рис. 3 изображена кривая ФКП для цифрового фильтра с полосой пропускания от 1 до 0,15 Гц. Ширина окна для этого фильтра выбрана равной 20 интервалам, точный период тренда — 5,4 с. Общее машинное время выполнения программы 50 с.

Анализ метода СКФ и пример его применения позволяет сделать следующие выводы.

1. Сглаживание реального временного ряда с последующим вычислением СКФ дает возможность выделить тренды ряда, участки нестационарности и оценить степень этой нестационарности.

2. Описанный метод пригоден для статистической обработки временных рядов физиологических данных, характеризующихся наличием нестационарности.

3. Метод СКФ может быть применен для диагностики некоторых заболеваний, в частности, болезней сердечно-сосудистой системы.

Дальнейшее развитие этого метода предполагает рассмотрение скользящих кросскорреляционной и спектральных функций, а также обобщение метода на многомерный случай.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воскресенский А. Д., Вентцель М. Д.—Проблемы космической биологии, 1974, т. 26.
2. Численные методы анализа случайных процессов.— М., 1976.
3. Чернышев М. К. Резонансно-поисковые методы анализа скрытых колебательных процессов в живых системах. Теоретические и прикладные аспекты анализа временной организации биосистем.— М., 1976.

Поступила в редакцию  
15.11.79.

Вычислительный центр

УДК 517.9

А. А. ЛЕВАКОВ

### НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть  $E$  — сепарабельное банахово пространство;  $T = [t_0, t_1]$  — отрезок в  $R$ ;  $\mu$  — мера Лебега на  $T$ ;  $S(x_0, r)$  — открытый шар в  $E$  радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ . Через  $\kappa$  обозначим множество всех непустых замкнутых (не обязательно выпуклых и компактных) подмножеств  $E$ , а через  $\alpha(A, B)$  — отклонение по Хаусдорфу множеств  $A \in \kappa$  и  $B \in \kappa$ .

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x \in S(x_0, r)$ ,  $F: T \times S(x_0, r) \rightarrow \kappa$  — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $(t, x)$  множество  $F(t, x) \in \kappa$ . Решением задачи (1) считаем всякую абсолютно непрерывную функцию  $x(\cdot)$ , определенную на некотором отрезке  $[t_0, t^*] = T_1 \subset T$  и удовлетворяющую со-

отношению  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\mu$ , где  $v(\cdot)$  — интегрируемая по Бохнеру

на  $T_1$  функция такая, что  $v(t) \in F(t, x(t))$  почти при всех  $t \in T_1$ .

Укажем условия, при которых существует решение задачи (1).

**Теорема 1.** Пусть отображение  $F: T \times S(x_0, r) \rightarrow \kappa$  удовлетворяет условиям:

- а) измеримо по  $t$  при каждом  $x$  [1];
- б) существует интегрируемая по Лебегу функция  $k(\cdot): T \rightarrow R$  такая, что  $\alpha(F(t, x), F(t, y)) \leq k(t) \|x - y\|$  для всех  $t \in T$ ,  $x \in S(x_0, r)$ ,  $y \in S(x_0, r)$  ( $\|\cdot\|$  — норма в  $E$ );
- в) функция  $t \rightarrow \rho(0, F(t, x_0))$  интегрируема по Лебегу на  $T$  ( $0$  — нулевой элемент  $E$ ,  $\rho$  — расстояние в  $E$ ).

Тогда задача (1) имеет решение.

В следующей теореме устанавливаются условия, при которых решения задачи (1) непрерывно зависят от начальных условий и правой части дифференциального включения. Наряду с задачей (1) рассмотрим возмущенную задачу

$$\dot{x} \in F_1(t, x), \quad x(t_0) = x'_0, \quad (2)$$

$$\alpha(F_1(t, x), F(t, x)) \leq \delta, \quad t \in T, \quad x \in S(x_0, r), \quad \|x_0 - x'_0\| \leq \delta.$$

**Теорема 2.** Пусть  $x(\cdot): T_1 \rightarrow E$  решение задачи (1). Предположим, что отображение  $F_1$  удовлетворяет условиям а), б). Тогда существует  $\delta_0 > 0$  такое, что для любого  $\delta \leq \delta_0$  существует решение  $x_1(\cdot): T_1 \rightarrow E$  задачи (2), удовлетворяющее условиям  $\|x(t) - x_1(t)\| \leq \delta L$ ,  $t \in T_1$ ,  $\|\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq (k(t)L + 1)\delta$  почти при всех  $t \in T_1$ ;

здесь

$$L = e^{t_0} \int_{t_0}^{t^*} k(\cdot) d\mu + \int_{t_0}^{t^*} e^{\cdot} \int_{t_0}^{t^*} k(s) d\mu d\mu.$$

Доказательство теорем 1 и 2 в основном аналогично доказательству предложения 1 из [5] и следствия из этой же работы. Далее

устанавливается связь между решениями задачи (1) и следующей задачи:

$$\dot{x} \in \overline{\text{co}} \nabla F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

где  $\overline{\text{co}} \nabla F(t, x)$  — замкнутая выпуклая оболочка множества  $F(t, x)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\bar{x}(\cdot) : T_1 \rightarrow E$  — решение задачи (3). Предположим, что отображение  $F : T \times S(x_0, r) \rightarrow X$  удовлетворяет условиям а), б) и  $\|v\| \leq M$  для всех  $v \in F(t, x)$ ,  $t \in T$ ,  $x \in S(x_0, r)$ . Тогда существует последовательность решений  $(x_n(\cdot))$  задачи (1), равномерно сходящаяся на  $T_1$  к  $\bar{x}(\cdot)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим задачу о минимуме интеграла  $I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^*} (u(\tau) + x(\tau)) d\mu$  на совокупности пар  $(x(\cdot), u(\cdot))$ , где  $x(\cdot) : T_1 \rightarrow E$  и  $u(\cdot) : T_1 \rightarrow E$  — соответственно сильно непрерывная и измеримая функции, удовлетворяющие условиям  $\dot{x}(t) = u(t)$  и  $u(t) \in F(t, \tilde{x}(t))$  почти при всех  $t \in T_1$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Сформулированная задача является частным случаем задачи (2.11)–(2.14) [4]. Согласно лемме 2.2 [4], существует последовательность  $(u_n(\cdot))$  функций такая, что  $\|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t u_n(\tau) d\mu\| \rightarrow 0$  равномерно на  $T_1$ ,  $u_n(t) \in F(t, \tilde{x}(t))$  почти при всех  $t \in T_1$ . Пусть  $\tilde{x}_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t u_n(\tau) d\mu$ . Тогда  $\|\tilde{x}_n(t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0$  равномерно на  $T_1$ .

Для каждой функции  $\tilde{x}_n(\cdot)$  существует решение  $x_n(\cdot)$  задачи (1) такое, что

$$\|x_n(t) - \tilde{x}_n(t)\| \leq \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s k(s) ds} k(\tau) \|\tilde{x}(\tau) - \tilde{x}_n(\tau)\| d\mu. \quad (4)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2. Из (4) следует, что  $\|x_n(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0$  равномерно на  $T_1$ . Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что пространство  $E^*$ , сопряженное к  $E$ , является сепарабельным.

**Теорема 4.** Пусть последовательность  $(x_n(\cdot))$  решений задачи (1) равномерно сходится на  $T_1$  к функции  $\bar{x}(\cdot)$ . Предположим, что множество  $Q = \{v \in E \mid v \in F(t, x(t)), t \in T_1\}$  относительно слабо компактно и многозначное отображение  $F$  удовлетворяет условию: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что при каждом  $t \in T_1$  и при каждом  $y$ ,  $\|y - x(t)\| \leq \delta$ , выполняется соотношение  $[F(t, x(t))]_\varepsilon \supset F(t, y)$  ( $[A]_\varepsilon$  — замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность множества  $A$ ).

**Доказательство.** Покажем, что  $(x(\cdot))$  имеет почти при всех  $t \in T_1$  слабую производную. Из условий теоремы и из теоремы 2.9.1 [3] вытекает существование постоянной  $M$  такой, что  $\|x_n(t_2) - x_n(t_1)\| \leq M \cdot |t_2 - t_1|$  для всех  $t_1, t_2 \in T_1$  и всех достаточно больших  $n$ . Отсюда следует, что функции  $x^*(x(\cdot))$  абсолютно непрерывны при всех  $x^* \in N$ , где  $N$  счетное всюду плотное подмножество  $E^*$ . Существует множество

$P$ ,  $\mu(P) = \mu(T_1)$ , что для всех  $\tilde{t} \in P$  существует предел  $\lim_{t \rightarrow \tilde{t}} \frac{x^*(x(t)) - x^*(\tilde{t})}{t - \tilde{t}}$

для всех  $x^* \in N$ . Возьмем последовательность  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_i > 0$ . Так как  $x_n(\cdot)$  — решение задачи (1), то легко видеть, что при каждом  $i$

$\frac{x_n(t) - x_n(\tilde{t})}{t - \tilde{t}} \in \overline{\text{conv}} [Q]_{E_t}$  для всех достаточно больших  $n$ . Отсюда выте-

кает соотношение  $\frac{x(t) - x(\tilde{t})}{t - \tilde{t}} \in \overline{\text{conv}} Q$ . Возьмем последовательность

$t_m \rightarrow \tilde{t}$ ,  $t_m > \tilde{t}$ . В силу теоремы 2.9.5 [3] множество  $\overline{\text{conv}} Q$  слабо ком-

пактно. Поэтому из последовательности  $\frac{x(t_m) - x(\tilde{t})}{t_m - \tilde{t}}$  можно извлечь

подпоследовательность  $\frac{x(t_{m_k}) - x(\tilde{t})}{t_{m_k} - \tilde{t}}$ , слабо сходящуюся к некоторому

пределу  $y(\tilde{t})$ . Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{t}} \frac{x^*(x(t) - x(\tilde{t}))}{t - \tilde{t}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^*(x(t_{m_k}) - x(\tilde{t}))}{t_{m_k} - \tilde{t}} = x^*(y(\tilde{t})) \quad (5)$$

для всех  $x^* \in N$ . Из (5) следует, что функция  $t \rightarrow \begin{cases} y(t), & t \in P, \\ 0, & t \in \bar{T}_1 \setminus P, \end{cases}$  почти при всех  $t \in T_1$  является слабой производной функции  $x(\cdot)$ . Согласно теореме 3.8.6 [3],

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(\tau) d\mu. \quad (6)$$

Покажем, что

$$y(t) \in \overline{\text{conv}} F(t, x(t)) \text{ почти при всех } t \in T_1. \quad (7)$$

Допустим, что существует множество  $W$  положительной меры, на котором соотношение (7) не выполняется. Тогда из теоремы Хана — Банаха следует, что для каждого  $t \in W$  существует элемент  $x^* \in N$  такой, что  $x^*(y(t)) > \sup_{a \in \overline{\text{conv}} F(t, x(t))} x^*(a)$ . Отсюда вытекает существование подмножеств

$W_1 \subset W$ ,  $\mu(W_1) > 0$  натурального числа  $k_0$  и элемента  $\bar{x}^* \in N$  таких, что  $\bar{x}^*(y(t)) > \bar{x}^*(x_n(t)) + \frac{1}{k_0}$ ,  $t \in W_1$ , для всех достаточно больших  $n$ .

Отсюда имеем  $\int_{W_1} \bar{x}^*(y(t)) d\mu > \int_{W_1} \bar{x}^*(x_n(t)) d\mu + \frac{1}{k_0} \mu(W_1)$ , что противоречит равномерной сходимости  $x_n(\cdot)$  к  $x(\cdot)$ . Из соотношений (6), (7) следует, что  $x(\cdot)$  решение задачи (3).

**З а м е ч а н и е.** Результаты работы примыкают к исследованиям, приведенным в статье [6]. Теоремы 1—4 пересекаются с теоремами 1.1, 2.1, 3.1 [6], однако, не следуют из них. Основное отличие состоит в том, что в заметке не предполагается компактность множества  $F(t, x)$  при каждом  $(t, x)$ , что существенно используется в работе [6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Д., Левин В. Л.— Труды Моск. мат. об-ва, 1972, т. 26, с. 3.
2. Филиппов А. Ф.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., 1967, № 3, с. 16.
3. Халле Э., Филипп Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М., 1962.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.— УМН, 1968, т. 23, вып. 6, с. 51.
5. Леваков А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2, с. 33.
6. Толстоногов А. А.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 1, с. 42.

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Решение смешанных контактных задач для полосы, опирающейся на жесткое основание, представляет большие математические трудности. Развитию приближенных методов решения таких задач посвящены работы многих авторов. Достаточно полная библиография по этому вопросу содержится в работах [1—3]. Предлагаемый в настоящей статье подход позволяет получить решение ряда контактных задач для полосы в более простой форме.

Пусть упругая изотропная полоса занимает в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  область  $S^- (-h < y < 0)$ ;  $L (y = 0)$  и  $L_1 (y = -h)$  — верхняя и нижняя границы области  $S^-$ ;  $S^+ (0 < y < h)$  — область, симметричная с  $S^-$  относительно оси  $x$ . Предположим, что полоса своей нижней стороной опирается без трения на гладкое жесткое основание. Со стороны контура  $L$  в полосу вдавливается силой  $P$  штамп с гладким плоским основанием. Трение на участке  $L' (|x| \leq a)$  контакта штампа с полосой и внешняя нагрузка на остальной части  $L'' (|x| > a)$  контура  $L$  отсутствуют. Штамп, внедряясь в полосу, перемещается поступательно.

Для решения задачи воспользуемся формулами [4]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (3)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  — компоненты напряжений;  $u$  и  $v$  — проекции смещений на оси координат  $x$  и  $y$ ;  $\mu$  и  $\kappa$  — упругие постоянные материала полосы;  $\Phi(z)$  — кусочно-голоморфная функция, определенная в областях  $S^-$  и  $S^+$ .

В нашем случае необходимо удовлетворить условиям:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \text{ на } L'' \text{ и } \tau_{xy} = 0, v = \text{const на } L'; \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = v = 0 \text{ на } L_1. \quad (5)$$

При этом будем считать, что функция  $\Phi(z)$  на концах отрезка  $L'$  имеет особенность порядка

$$|\Phi(z)| = c|z \pm a|^{-1/2} + O(1), \quad c > 0. \quad (6)$$

Очевидно, что условия (4) и (5) выполняются, если функция  $\Phi(z)$  удовлетворяет условиям:

$$\Phi^-(t_0) - \Phi^+(t_0) = 0 \text{ на } L'',$$

$$\text{Im} [\Phi^-(t_0) - \Phi^+(t_0)] = 0 \text{ на } L', \quad (7)$$

$$\text{Im} [\kappa\Phi^-(t_0) + \Phi^+(t_0)] = 0 \text{ на } L';$$

$$\text{Im} [\Phi(t) - \Phi(\bar{t}) - 2ih\overline{\Phi'(t)}] = 0 \text{ на } L_1, \quad (8)$$

$$\text{Im} [\kappa\Phi(t) + \Phi(\bar{t}) + 2ih\overline{\Phi'(t)}] = 0 \text{ на } L_1,$$

где  $\Phi^-(t_0)$  и  $\Phi^+(t_0)$  — предельные значения функции  $\Phi(z)$  на  $L$  со стороны областей  $S^-$  и  $S^+$  соответственно,  $t_0 = x$ ,  $t = x - ih$ ,  $\bar{t} = x + ih$ .

Предположим, что

$$\Phi(z) = C_0 \left[ \frac{i\gamma}{X_0(z)} + \Omega_0(z) \right] (z \in S^-),$$

$$\Phi(z) = C_0 \left[ \frac{i\gamma}{X_0(z)} + \Omega_0(z) + \Omega_1(z) \right] (z \in S^+), \quad (9)$$

где  $\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\gamma\varphi(\tau) d\tau}{i \text{th} \gamma(\tau - z)}$ ,  $\Omega_1(z) = -\frac{X_0(z)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma\psi(\tau) d\tau}{N(\tau) \text{th} \xi}$ ,

$$X_0(z) = \sqrt{\operatorname{sh} \gamma(z+a) \operatorname{sh} \gamma(z-a)}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2h},$$

$$N(\tau) = \sqrt{\operatorname{ch} \gamma(\tau+a) \operatorname{ch} \gamma(\tau-a)}, \quad \xi = \gamma(\tau - z + ih),$$

$\varphi(\tau)$  и  $\psi(\tau)$  — произвольные вещественные функции, удовлетворяющие условию Гельдера;  $C_0$  — произвольная вещественная постоянная.

Поскольку  $X_0(z)$  многозначная функция, зафиксируем ту ее ветвь, для которой

$$X_0^+(x) = -X_0^-(x) = iR_1(x) \text{ на } L',$$

$$X_0^+(x) = X_0^-(x) = R_2(x) \text{ на } L'',$$

где  $R_1(x) = \sqrt{\operatorname{sh} \gamma(a+x) \operatorname{sh} \gamma(a-x)}$ ,  $R_2(x) = \varepsilon \sqrt{\operatorname{sh} \gamma(x+a) \operatorname{sh} \gamma(x-a)}$ ,  $\varepsilon = 1$  для  $x > a$  и  $\varepsilon = -1$  для  $x < a$  ( $a > 0$ ).

При этом в точках  $z = t = x - ih$  на  $L_1$

$$X_0(t) = -X_0(\bar{t}) = -iN(x).$$

Нетрудно убедиться, что выражения (9) удовлетворяют всем условиям (7), если

$$\varphi(x) = -\frac{R_2(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \psi(\tau) d\tau}{N(\tau) \operatorname{ch} \gamma(\tau-x)}. \quad (10)$$

При  $z \rightarrow t$  на  $L_1$  выражения  $\xi$  и  $\bar{\xi}$  стремятся к  $\tau - x$  на некоторой вещественной оси со стороны их положительной и отрицательной мнимых частей. Следовательно, применяя к функции  $\Omega_1(z)$  формулы Сохоцкого, имеем

$$\Phi(t) = C_0 \left[ -\frac{\gamma}{N(x)} + I_1(x) \right], \quad (11)$$

$$\Phi(\bar{t}) = C_0 \left[ \frac{\gamma}{N(x)} + I_1(x) + i\psi(x) - I_2(x) \right],$$

где

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{L'} \frac{\gamma \varphi(\lambda) d\lambda}{\operatorname{ch} \gamma(\lambda-x)}, \quad I_2(x) = \frac{N(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \psi(\tau) d\tau}{N(\tau) \operatorname{th} \gamma(\tau-x)}. \quad (12)$$

Требую, чтобы выражения (11) удовлетворяли условиям (8), получим

$$\psi(x) + 2h \frac{d}{dx} I_1(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\pi}{N(x)} \right). \quad (13)$$

С учетом (10) и (12) равенство (13) представляет собой интегральное уравнение относительно функции  $\psi(x)$ . Зная ее выражение, значения  $\sigma_y$  на  $L_1$  и  $L'$  найдем по формулам:

$$\sigma_y = C_0 \left[ -\frac{2\gamma}{N(x)} + I_2(x) \right] \text{ на } L_1,$$

$$\sigma_y = -C_0 \left[ \frac{2\gamma}{R_1(x)} - \frac{R_1(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \psi(\tau) d\tau}{N(\tau) \operatorname{ch} \gamma(\tau-x)} \right] \text{ на } L'.$$

Постоянная  $C_0$  определяется из условия равновесия штампа:  $\int_{-a}^a \sigma_y dx = -P$ .

Если в формулах (9) положить  $\Omega_1(z) = \frac{-X_0(z)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \psi(\tau) d\tau}{N(\tau) \operatorname{sh} \xi}$ , то уравнение (13) преобразуется к виду:

$$\frac{N(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \psi(\tau) d\tau}{N(\tau) \operatorname{sh} \gamma(\tau-x)} - 2h \frac{d}{dx} I_1(x) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\pi}{N(x)} \right).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М., 1974.
2. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости.— М., 1977.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости.— М., 1953.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— Изд. 5-е.— М., 1966.

Поступила в редакцию  
13.12.79.

Кафедра теоретической механики

УДК 517.5

А. С. ГАХОВИЧ

### ОРИГИНАЛЫ ЛАПЛАСА — ЭЙЛЕРА СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ЦЕЛОГО ТИПА В НУЛЕ

Формальное видоизменение метода Лапласа — Эйлера на случай функций со степенной особенностью в нуле позволило упростить процедуру получения изображения [1]. Это вполне естественно, поскольку для сравнительно узкого класса функций можно построить преобразование, которое наиболее полно соответствует данному классу и не претендует на более широкое использование. Между тем предложенное преобразование оказалось непригодным при работе с оригиналами со степенной особенностью целого типа в нуле. Это приводит к необходимости искать новые модификации преобразования Лапласа — Эйлера, способные справиться с возникшей трудностью. Оказывается, привлечение дополнительных соображений, использующих, например, понятие регуляризации по Адамару, позволяет расширить сферу приложения операционного исчисления за счет указанных функций.

Пусть функция  $f(t)$  имеет вид:

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t^n} \ln^k t \quad (k = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$  — аналитическая в нуле функция. Для функций вида (1) рассмотрим интеграл  $F(z, s) = \int_0^{\infty} t^s f(t) e^{-zt} dt$ . В данном случае изображение Лапласа—Эйлера функции  $f(t)$  нельзя определить как предел  $\lim_{s \rightarrow 0} F(z, s)$ , поскольку функция  $F(z, s)$  не аналитична по переменной  $s$  в окрестности нуля [1], точнее, имеет полюс  $k + 1$ -го порядка, поэтому здесь необходим иной подход.

*Определение 1.* Изображением Лапласа—Эйлера функции  $f(t)$  вида (1) назовем функцию комплексного переменного  $F(z)$ :  $F(z) = \lim_{s \rightarrow 0} F_{(0)}(z, s) + F_1(z) = F_0(z) + F_1(z)$ , где  $F_{(0)}(z, s)$  означает регулярную часть функции  $F(z, s)$  по переменной  $s$  в окрестности нуля, а  $F_1(z)$  — произвольная функция, на которую ниже будут наложены определенные условия.

*З а м е ч а н и е.* Предложенный прием получения изображения является модификацией адамаровского метода регуляризации расходящихся интегралов применительно к расходящемуся интегралу вида

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt.$$

Из определения 1 следует существование изображения Лапласа — Эйлера любой функции рассматриваемого класса. Остается открытым лишь вопрос относительно выбора функции  $F_1(z)$ . Очевидно, правило выбора  $F_1(z)$  должно гарантировать ее единственность и удовлетворять каким-то естественным требованиям, вытекающим из природы исследуемого предмета.

Для обоснования правила выбора функции  $F_1(z)$  рассмотрим функ-

ции, преобразуемые по Лапласу (класс  $O_k$ ), и напомним определенные закономерности, присущие данному классу. Пусть  $f(t) \in O_k$  и такова, что операция деления на  $t$  не выводит из  $O_k$ . Так как операции деления и умножения оригинала на  $t$  перестановочны, то этому же условию удовлетворяют соответствующие операции в пространстве изображений  $\hat{O}_k$ , индуцированные из пространства оригиналов. Действительно,

$$-\frac{d}{dz} \int_z^{\infty} F(\xi) d\xi = \int_z^{\infty} -\frac{d}{d\xi} F(\xi) d\xi = F(z).$$

В случае оригиналов со степенной особенностью в нуле указанные операции заведомо замкнуты в  $L_c$ . Так как желательно распространить обычные операционные правила и на исследуемые функции, необходимо потребовать перестановочность операций дифференцирования и интегрирования в пространстве соответствующих изображений. Для выполнения последнего условия необходимо в качестве результата операции интегрирования выбрать функцию из семейства первообразных, соответствующую нулевой аддитивной постоянной. В классе  $\hat{O}_k$  условие перестановочности рассматриваемых операций выполнялось за счет того, что  $F(\infty) = 0$  в правой полуплоскости. В рассматриваемой ситуации изображения Лапласа — Эйлера в общем случае этому условию удовлетворять не будут, поэтому приходится принимать меры для сохранения необходимого требования.

Из приведенных рассуждений становится понятной процедура определения функции  $F_1(z)$ . Пусть  $f(t) \in L_c$  и  $f(t) \div F_0(z) + F_1(z)$ , согласно определению 1. Умножением  $f(t)$  на соответствующую степень  $t^n$  получаем классический оригинал  $f_k(t)$ . Тогда можно записать

$$t^n f(t) = f_k(t) \div \left(-\frac{d}{dz}\right)^n (F_0(z) + F_1(z)) = F_k(z). \quad (2)$$

Из (2) для определения  $F_1(z)$  получаем дифференциальное уравнение  $F_1^{(n)}(z) = (-1)^n F_k(z) - F_0^{(n)}(z)$ , в качестве решения которого выбираем функцию из семейства первообразных  $n$ -го порядка, соответствующую нулевым аддитивным постоянным.

Проиллюстрируем метод построения изображения на простейшем примере функций вида (1), а именно, когда  $f(t) = \frac{1}{t^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). На первом этапе находим функцию  $F_0(z)$ , фигурирующую в определении 1. Начнем с  $n = 1$ , т. е.  $f(t) = \frac{1}{t}$ . Соответствующая  $F(z, s)$  при  $z > 0$

$$\text{имеет вид } F(z, s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-zt} dt = \frac{1}{z^s} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du = \frac{1}{z^s} \Gamma(s).$$

Используя аналитическое продолжение гамма-функции в левую полуплоскость, получаем следующее выражение для  $F_{(0)}(z, s)$ :

$$F_{(0)}(z, s) = \frac{1}{z^s} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \right).$$

Тогда  $F_0(z) = \lim_{s \rightarrow 0} F_{(0)}(z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma$ , где  $\gamma$  — постоянная Эйлера. Несложно получить общее выражение для  $F_0(z)$  в случае произвольного  $n$ :  $F_0(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} z^{n-1} \psi(n)$ , в котором  $\psi(z)$  — логарифмическая производная от гамма-функции.

Определим теперь  $F_1(z)$ . Снова начнем с  $n = 1$ :  $\frac{1}{t} \div -\gamma + F_1(z)$ . Умножением оригинала на  $t$  переходим в область классических оригиналов  $1 \div \frac{1}{z} = -F_1'(z)$ . Для определения  $F_1(z)$  получаем уравнение  $F_1'(z) =$

$= -\frac{1}{2}$ , в качестве решения которого, согласно сказанному ранее, выбираем  $F_1(z) = -\ln z$ . Можно убедиться, что для произвольного  $n$  функция  $F_1(z)$  принимает вид  $F_1(z) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} z^{n-1} \ln z$ . Тогда искомое операционное соответствие запишется следующим образом:

$$\frac{1}{t^n} \div \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} z^{n-1} (\psi(n) - \ln z). \quad (3)$$

Следует отметить, что операционное соотношение (3) полностью совпадает с аналогичным соотношением, полученным авторами, например, работ [2, 3]. В первой работе, в частности, выражение  $\left\{\frac{1}{t^n}\right\}$  понимается как «особый» оригинал, соответствующий определенной функции комплексного переменного в пространстве изображений, другими словами, ход получения соотношения (5) совершенно отличен от предложенного, точнее — обратный, а конечный результат один и тот же.

Относительно операционных правил в рассматриваемом классе функций необходимо отметить следующее. В силу выбора функции  $F_1(z)$ , входящей в определение 1, операционные правила умножения и деления оригинала на  $t$  выглядят следующим образом:

$$tf(t) \div -\frac{d}{dz} F(z), \quad (4)$$

$$\frac{1}{t} f(t) \div -\int F(z) dz \quad (5)$$

при условии, что  $f(t) \div F(z)$  и под интегралом в (5) понимаем первообразную, соответствующую нулевой аддитивной постоянной. Иначе говоря, для (4) и (5) имеем почти полную аналогию с классическим операционным исчислением. Однако эта аналогия не будет иметь места в других случаях. Например, операционное правило дифференцирования оригиналов вида  $f(t) = \frac{\varphi(t)}{t^n}$  будет иметь вид  $f'(t) \div zF(z) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \varphi(0)z^n$  при условии, что  $f(t) \div F(z)$ . Этот пример убеждает нас в том, что применение операционного исчисления в классе функций с неинтегрируемой особенностью целого типа в нуле не лишено определенных трудностей.

В заключение отметим, что вопрос обращения преобразования в данном случае решается точно так же, как и для класса функций со степенной особенностью нецелого типа в нуле. Изложение этого вопроса можно найти в работе [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1979, № 3, с. 46.
2. Амербаев В. М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра.— М., 1974.
3. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций.— М., 1977.

# Краткие сообщения

УДК 512.733

А. В. ПРАСОЛОВ

## О ТЕОРЕМЕ ГЕРСТЕНА ДЛЯ ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

Герстен [1, теорема 5] вычислил  $K$ -функторы от градуированного кольца  $A$  (ассоциативного с единицей) в случае, когда  $A[t]$  — когерентное регулярное кольцо. Цель настоящей статьи — вычисление групп  $K_i A$  для произвольного  $A$ . Это удастся сделать с помощью развитой в [2]  $K$ -теории предаdditивных категорий.

Пусть  $C$  — малая предаdditивная категория с множеством объектов  $I$ ,  $\alpha: C \rightarrow C$  — автоморфизм.

**Определение.** Назовем  $\alpha$  — *закрученным полиномиальным расширением (лорановским расширением)* предаdditивной категории  $C$  универсально отталкивающим объектом в категории троек вида  $(B, f, t)$ , где  $B$  — предаdditивная категория,  $f: C \rightarrow B$  — аддитивный функтор, а  $t: f \circ \alpha \rightarrow f$  — функторный морфизм (изоморфизм).

Категорию  $B$ , определенную таким образом, обозначим через  $C_\alpha[t]$  в случае полиномиального расширения и через  $C_\alpha[t, t^{-1}]$  в случае полиномиального лорановского расширения. Когда множество  $I$  состоит из одного элемента, т. е. когда  $C$  — кольцо,  $C_\alpha[t]$  ( $C_\alpha[t, t^{-1}]$ ) — обычное кольцо  $\alpha$ -закрученных многочленов (лорановских многочленов).

Через  $NIL(\alpha^{\pm 1}, C)$  обозначим категорию  $\alpha^{\pm 1}$ -линейных нильпотентных эндоморфизмов [3]. Положим  $Nil_i(\alpha^{\pm 1}, C) = \ker(K_i NIL(\alpha^{\pm 1}, C) \rightarrow K_i C)$ . В [3] вычислены  $K$ -функторы от кольца  $\alpha$ -закрученных лорановских многочленов. Этот результат легко обобщается на предаdditивные категории:

**Теорема 1.** Для всех  $i \geq 1$  а)  $K_i C_{\alpha^{\pm 1}}[t] \simeq K_i C \dot{+} Nil_{i-1}(\alpha^{\pm 1}, C)$ ;  
б)  $K_i C_\alpha[t, t^{-1}] \simeq X_i \dot{+} Nil_{i-1}(\alpha, C) \dot{+} Nil_{i-1}(\alpha^{-1}, C)$ , причем  $X_i$  включается в точную последовательность

$$K_i C \xrightarrow{\varphi_i} K_i C \rightarrow X_i \rightarrow K_{i-1} C \xrightarrow{\varphi_{i-1}} K_{i-1} C,$$

где  $\varphi_* = Id - K_* \alpha$ .

Пусть  $A = A_0 \dot{+} A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots$  — градуированное кольцо. Через  $PGR(A)$  обозначим категорию конечно порожденных проективных градуированных левых  $A$ -модулей, а через  $NGR(A)$  — категорию пар вида  $(P, f)$ , где  $P \in PGR(A)$ , а  $f$  — нильпотентный эндоморфизм степени 1. Пусть  $Ngr_i A = \ker K_i(NGR(A) \rightarrow PGR(A))$ .

**Теорема 2.** Для всех  $i \geq 1$

$$K_i A \simeq K_i A_0 \dot{+} Ngr_{i-1} A.$$

**Доказательство.** Пусть  $C = gr(A)$  — предаdditивная категория с множеством объектов  $Z$ , множествами морфизмов  $C(m, n) = A_{m-n}$  при  $m \geq n$  и композицией, индуцированной умножением в кольце  $A$ . Тогда левые  $C$ -модули — это  $Z$ -градуированные левые  $A$ -модули, а морфизмы  $C$ -модулей — градуированные гомоморфизмы степени 0. Пусть

$\alpha: C \rightarrow C$  — автоморфизм сдвига ( $n \rightarrow n+1$ ). Имеют место аддитивные эквивалентности категорий  $C_\alpha[t, t^{-1}] \simeq A$ ,  $C_\alpha[t] \simeq gr(A[t])$ , где  $A[t]$  — градуированное кольцо многочленов от переменной  $t$  степени 1. Категория  $NIL(\alpha, C)$  эквивалентна категории  $NGR(A)$ , поэтому группы  $Nil_i(\alpha, C)$  и  $Ngr_i A$  изоморфны. Далее, по [4, с. 107]  $K_i(gr(A[t])) \simeq K_i(gr(A)) \simeq K_i A_0 \times {}_Z Z[t, t^{-1}]$  (тензорно), поэтому по теореме 1  $Nil_i(\alpha^{-1}, C) = 0$ ,  $K_i A \simeq X_i \dot{+} Ngr_{i-1} A$ , причем  $X_i = \text{oker}(Id - \text{«сдвиг»}) \simeq K_i A_0$ , откуда и следует утверждение теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gersten S.— *Commutative Algebra*, 1974, v. 1, № 1, p. 39.
2. Прасолов А. В.— *УМН*, 1977, т. 32, № 5, с. 195.
3. Прасолов А. В.— XV Всесоюзная алгебр. конф.— Красноярск, 1979, ч. 1, с. 124.
4. Quillen D.— *Lecture Notes Math.*, 1973, v. 341, p. 85.

Поступила в редакцию  
24.01.80.

Кафедра высшей математики

УДК 681.142.01

М. К. БУЗА

### О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ПЕРЕПОЛНЕНИИ В КОДЕ ВЫЧЕТОВ

Расширение сферы использования системы кодирования данных с помощью вычетов (СКВ) во многом зависит от эффективности методов обработки информации. Ниже предлагается один метод определения мультипликативного переполнения в СКВ.

Основные обозначения:  $P_1, P_2, \dots, P_n$  — основания СКВ;  $r_A$  — ранг числа  $A$ ;  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — веса ортогональных базисов;  $b_i = b_i - P_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Построим метод мультипликативного переполнения применительно к безранговой СКВ (БСКВ) [1]. Система оснований  $P_1, P_2, \dots, P_n$  будет безранговой, т. е. любое  $A \in [0, M)$  допускает расширенное представление нулевого ранга (РПНР), если  $r_A = \sum_{j \in N} m_j$ ; где  $N$  — множество номеров, которые образуют индексы весов ортогональных базисов [2].

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что РПНР чисел  $A$  и  $B$  соответственно:  $A' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} - P_{m+1}, \dots, \alpha_j - P_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$  и  $B' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l, \beta_{l+1} - P_{l+1}, \dots, \beta_k - P_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$ , т. е.  $r_A = \sum_{i=m+1}^l m_i$ ,  $r_B = \sum_{i=l+1}^k m_i$  в соответствующей классической СКВ [3].

Пусть  $A' B'$  в коде вычетов есть  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ , где

$$\gamma_i = \alpha_i \beta_i - \left[ \frac{\alpha_i \beta_i}{P_i} \right] P_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  «разряды» чисел  $A'$  и  $B'$  в БСКВ.

Число  $A' B'$  не всегда будет иметь РПНР. Чтобы выяснить, возможно ли его представить в РПНР, необходимо вычислить поразрядные переполнения  $n_i = l_i + k_i$ , где  $l_i = \left[ \frac{\alpha_i \beta_i}{P_i} \right]$ ;  $k_i$  — число переполнений, потерянных при умножении по формуле (1);  $i = \overline{1, n}$ .

Схема предлагаемого метода сводится к следующему:

- 1) определение поразрядных переполнений  $n_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
- 2) вычисление величины корректировки  $Q$ ;
- 3) выяснение возможности представления  $A' B'$  в РПНР. Если это

возможно, то произвести корректировку  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ , если нет — выдать сигнал о переполнении.

Так как  $l_i, i = \overline{1, n}$  можно получить из (1), то для определения  $Q$  необходимо вычислить  $k_i, i = \overline{1, n}$ .

Пусть  $\left[\frac{B}{P_i}\right] = S_i, i = \overline{1, n}$ . Представим  $S_i$  в виде

$$S_1 = \{\beta_{1n}^1, \beta_{1n}^2, \dots, \beta_{1n}^{N_1}\}, S_2 = \{\beta_{2n}^1, \beta_{2n}^2, \dots, \beta_{2n}^{N_2}\}, \dots, S_n = \{\beta_{nn}^1, \beta_{nn}^2, \dots, \beta_{nn}^{N_n}\},$$

где  $\beta_{in}^1 = s_i - \left[\frac{s_i}{P_n}\right] P_n, \beta_{in}^2 = \Theta_i^1 - \left[\frac{\Theta_i^1}{P_n}\right] P_n, \dots;$

$$\beta_{in}^{N_i-1} = \Theta_{N_i-2}^i - \left[\frac{\Theta_{N_i-2}^i}{P_n}\right] P_n, \beta_{in}^{N_i} = \Theta_{N_i-1}^i \Theta_i^1 = \left[\frac{s_i}{P_n}\right], \dots;$$

$$\Theta_{N_i-1}^i = \left[\frac{\Theta_{N_i-2}^i}{P_n}\right], \Theta_{N_i-1}^i < P_n.$$

Оценим величину  $N_i$  для основания  $P_i$ . Пусть  $R$  — целое, такое что  $P_i P_n^{N_i-1} < R < P_i P_n^{N_i}$ , тогда  $N = \left\lfloor \frac{\ln \frac{R}{P_i}}{\ln P_n} \right\rfloor$ . Умножив каждое из  $s_i, i = \overline{1, n}$  на  $A'$ , получим.

$$(\sigma_{in}^1, \sigma_{in}^2, \dots, \sigma_{in}^{N_i}) = \{\beta_{in}^1, \beta_{in}^2, \dots, \beta_{in}^{N_i}\} \alpha_i, i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{in}^k = \beta_{in}^k \alpha_i - a_k P_n, a_k = \left\lfloor \frac{\beta_{in}^k \alpha_i}{P_n} \right\rfloor, k = \overline{1, N_i}; i = \overline{1, n}$ . В каждой из  $N_i$  компонент в (2), начиная с первой, выделяем переполнения и переносим в следующую. Получим

$$\{\zeta_{1n}^1, \zeta_{1n}^2, \dots, \zeta_{1n}^{N_1}\}, \{\zeta_{2n}^1, \zeta_{2n}^2, \dots, \zeta_{2n}^{N_2}\}, \dots, \{\zeta_{nn}^1, \zeta_{nn}^2, \dots, \zeta_{nn}^{N_n}\}, \quad (3)$$

где  $\zeta_{in}^k = \zeta_{in}^{k-1} + a_{k-1} - b_k P_n, b_k = \left\lfloor \frac{\sigma_{in}^k + a_{k-1}}{P_n} \right\rfloor; \zeta_{in}^{k+1} = \sigma_{in}^{k+1} + a_k + b_k - b_{k+1} P_n, b_{k+1} = \left\lfloor \frac{\sigma_{in}^{k+1} + a_k + b_k}{P_n} \right\rfloor, k = \overline{1, N_i}$ .

Отсюда

$$k_i = \{[(\zeta_{in}^{N_i} P_n) + \zeta_{in}^{N_i-1}] P_n + \zeta_{in}^{N_i-2}\} P_n + \dots + \zeta_{in}^1. \quad (4)$$

Теперь можем определить

$$Q = \sum_{i=1}^n (k_i + l_i) m_i. \quad (5)$$

Ясно, что величина  $Q$  коррекции числа  $A'B'$  равна  $\sum_{i=1}^n n_i m_i$ .

При этом, если

$$Q = \sum_{j \in N} m_j, \quad (6)$$

то  $A'B'$  имеет РПНР в виде  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{j+l}, \gamma_{j+l+1}, \dots, \gamma_n)$ , где  $j+1, j+2, \dots, j+l$  индексы  $m_j$ , вошедших в (6). Если же условие (6) не выполняется, т. е. корректировка  $A'B'$  невозможна, то при определении  $A'B'$  произошло мультипликативное переполнение.

Подсчитаем количество модульных операций, необходимых для выполнения операции мультипликативного переполнения. Для вычисления

разрядов  $\beta_{in}^N$  потребуется  $2 + \log_2(k - 1)$  модульных операций, для получения выражений (2) — 1 модульная операция, для выражения (3) —  $\log_2 N$  модульных операций, для (4) —  $2N - 2$  и для (5) —  $1 + \log_2 n$  модульных операций. Итого:  $2 + \log_2(k - 1) + 2N + \log_2 N + 2 \log_2 n$  модульных операций, где  $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ ;  $k$  — разрядность  $s_t$ .

Следует отметить, что предложенный метод определения мультипликативного переполнения легко перенести как на классическую, так и на нормированную СКВ и систему типа Сасаки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буза М. К. — В сб.: Вопросы кибернетики и математики. — Минск, 1970.
2. Буза М. К., Поснов Н. Н. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. мех., 1970, № 3, с. 23.
3. Торгашев В. А. Система остаточных классов и надежность. — М., 1973.

Поступила в редакцию  
25.01.79.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 518:512.25

Л. М. ГОРОДЕЦКИИ

### КВАЗИОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть  $L_k$  — некоторое  $k$ -мерное подпространство линейного пространства, элементами которого являются векторы-столбцы размерности  $n$ , и  $A$  — невырожденная  $n \times n$ -матрица.

Обозначим через  $M_k$  множество невырожденных матриц  $H_k$ , удовлетворяющих соотношениям

$$(AH_k - I)F_k = 0, (H_k A - I)F_k = 0, \quad (1)$$

где  $F_k$  — матрица размерности  $n \times k$ , столбцы которой образуют базис пространства  $L_k$ . Очевидно, что множество  $M_k$  не зависит от выбора базиса в  $L_k$  и содержит, по крайней мере, матрицу  $A^{-1}$ .

Элементы множества  $M_k$  назовем квазиобратными матрицами к  $A$  над пространством  $L_k$ . В свою очередь, матрица  $A$  является квазиобратной к любой  $H_k \in M_k$ , т. е. введенное соотношение симметрично.

**Теорема 1.** Если матрица  $A_k$  квазиобратна над  $L_k$  к некоторой  $H_k \in M_k$ , то она является квазиобратной к любой матрице из  $M_k$ .

Таким образом, операция квазиобращения разбирает все множество невырожденных матриц на пары подмножеств со взаимно квазиобратными элементами.

Пусть  $L_k^+ = \{x: x^T y = 0, \forall y \in L_k\}$  и  $AL_k = \{x: x = Ay, y \in L_k\}$ .

**Теорема 2.** Для того, чтобы невырожденная матрица  $H_k$  являлась квазиобратной к  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица  $W_k$ , столбцы которой ортогональны проекции  $AL_k$  на  $L_k^+$ , такая что

$$H_k = A^{-1} + W_k^T (I - F_k F_k^+). \quad (2)$$

Здесь через  $F_k^+$  обозначена псевдообратная [1] к  $F_k$  матрица.

Если  $AL_k = L_k$ , то множество  $M_k$  соответствует множеству невырожденных линейных операторов, сужение которых на  $L_k$  совпадает с  $A^{-1}$  и, в силу этого [2], все квазиобратные матрицы имеют, по крайней мере,  $k$  одинаковых собственных значений.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - H_k f_k, \quad f_k = f(x_k) \quad (3)$$

решения системы линейных уравнений

$$f(x) = Ax - b = 0. \quad (4)$$

Если невырожденные матрицы  $H_k$  удовлетворяют условиям

$$H_0 = I, \quad H_k \Delta f_j = \Delta x_j, \quad 0 \leq j < k \leq n, \quad (5)$$

где  $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$ ,  $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ , то такой процесс называется квазиньютоновским [3] и приводит к решению системы уравнений (4), по крайней мере, за  $n+1$  шаг при условии линейной независимости векторов  $\Delta f_j$ . Кроме того,  $H_n = A^{-1}$ . Далее нас будет интересовать возможность получить решение уравнения (4) менее, чем за  $n+1$  шаг.

**Лемма 1.** Если точка  $x_{k+1}$  найдена с помощью квазиньютоновского метода (3), (5), то при любом  $j \leq k$  справедливо равенство  $x_{k+1} = x_j - H_k f_j$ . В частности,

$$x_{k+1} = x_0 - H_k f(x_0), \quad (6)$$

и указанный метод можно рассматривать как процесс последовательного нахождения матрицы  $H_k$ , совпадающей на векторе  $f_0$  с  $A^{-1}$ .

**Лемма 2.** Произвольный итерационный процесс вида (6) доставляет решение уравнения (4) тогда и только тогда, когда  $(AH_k - I)f(x_0) = 0$ .

**Теорема 3.** Если  $\Delta x_j = \alpha_0 f_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{ij} \Delta f_i$ ,  $j = \overline{0, m} \leq k$ , то, для того чтобы точка  $x_{k+1}$ , полученная в результате квазиньютоновского итерационного процесса (3), (5), являлась решением уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы матрица  $H_k$  была квазиобратной к  $A$  над линейной оболочкой векторов  $f_0, \Delta f_0, \dots, \Delta f_{m-1}$ .

Если для нахождения матриц  $H_k$  используется итерационное соотношение вида

$$H_k = H_{k-1} + \Delta H_{k-1}, \text{ rank } \Delta H_{k-1} = 1, \quad (7)$$

то справедлива

**Теорема 4.** Если минимальный аннулирующий полином матрицы  $A$  относительно вектора  $b$  [2] имеет степень  $k$  и  $x_0 = b$ , то итерационный процесс (3), (5), (7) приводит к решению уравнения (4) не более, чем за  $k+1$  шаг, а матрицы  $H_k$  и  $A^{-1}$  имеют при этом, по крайней мере,  $k$  общих собственных значений.

Доказательство теореме основано на том, что матрица  $\Delta H_{k-1}$  имеет вид  $\Delta H_{k-1} = (\Delta x_{k-1} - H_{k-1} \Delta f_{k-1}) g_{k-1}^T$  [4], и все векторы  $x_j$  находятся в циклическом пространстве, натянутом на векторы  $b, Ab, \dots, A^{k-1}b$ .

Теорема 4 показывает, что квазиньютоновские методы численного интегрирования дифференциальных уравнений [5], построенные на основе неявных линейных методов, могут иметь существенно расширенную область устойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алберт А. Регрессия, псевдонверсия и рекуррентное оценивание.— М., 1977.
2. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.— М., 1969.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М., 1975, с. 204.
4. Dennis J. E., Moré J. J.— SIAM Review, 1977, v. 19, № 1, p. 46.
5. Бобков В. В., Городецкий Л. М.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 1, с. 11.

Поступила в редакцию  
07.02.80.

Вычислительный центр

УДК 518:321

В. Н. ШАЛИМА

### ДВУХШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим на отрезке  $[t_0, T]$  следующую задачу Коши:

$$\overline{\dot{u}} + \Omega \overline{u} = F(t_1, \overline{u}^T), \quad (1)$$

$$\overline{u}(t_0) = \overline{u}_0, \quad \overline{u}'(t_0) = \overline{u}'_0. \quad (2)$$

Здесь  $\bar{u} = [u_1, \dots, u_s]^T$ ;  $\Omega$  — диагональная матрица с элементами  $\omega_k^2$ ,  $\omega_k^2 = \text{const} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ ,  $F(t, \bar{u}^T)$  — вектор-функция, компоненты которой  $f_k(t, \bar{u}^T)$  обладают достаточной гладкостью,  $\bar{u}_0, u_0$  — вектор-столбцы начальных данных.

Непосредственно проверяется, что

$$u_k(t) = u_{k0} \cos \omega_k(t - t_0) + \frac{u_{k0}}{\omega_k} \sin \omega_k(t - t_0) + \frac{1}{\omega_k} \int_{t_0}^t \sin \omega_k(t - \eta) f_k(\eta, \bar{u}^T(\eta)) d\eta \quad (3)$$

удовлетворяет (1), (2).

Выберем на  $[t_0, T]$  сетку  $\omega_\tau = \{t_j = t_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N\}$  и предположим, что вычисления доведены до точки  $t_j, 0 \leq j < N$ .

На основании (3) можно получить

$$u_k(t_{j+1}) = 2u_k(t_j) \cos \Theta_k - u_k(t_{j-1}) + \frac{\tau}{\omega_k} \left[ \int_{-1}^0 S(\omega_k, \beta) d\beta + \int_0^1 S(\omega_k, \alpha) d\alpha \right], \quad (4)$$

где  $S(\omega_k, \beta) = \sin \omega_k(1 + \beta) f_k(t_j + \beta\tau, \bar{u}^T(t_j + \beta\tau))$ ,  $S(\omega_k, \alpha) = \sin \omega_k(1 - \alpha) f_k(t_j + \alpha\tau, \bar{u}^T(t_j + \alpha\tau))$ ,  $\Theta_k = \omega_k \tau$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ .

В зависимости от величин  $\omega_k$  рассмотрим два подхода к построению методов приближенного решения задачи (1), (2).

Пусть  $\omega_k$  невелики. Потребуем, чтобы квадратурные формулы

$$\int_{-1}^0 S(\omega_k, \beta) d\beta \approx \sum_{i=1}^{q_k} B_{ik} S(\omega_k, \beta_{ik}), \quad \int_0^1 S(\omega_k, \alpha) d\alpha \approx \sum_{i=1}^{q_k} A_{ik} S(\omega_k, \alpha_{ik}) \quad (5)$$

имели алгебраическую степень точности  $2q_k - 1$ . Тогда для определения параметров  $A_{ik}, \alpha_{ik}, B_{ik}, \beta_{ik}$  получим следующие системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{q_k} B_{ik} \beta_{ik}^{j-1} = (-1)^{j-1} \frac{1}{j}, \quad \sum_{i=1}^{q_k} A_{ik} \alpha_{ik}^{j-1} = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2q_k - 1. \quad (6)$$

Выбирая узлы и коэффициенты квадратурных формул (5) удовлетворяющими (6), равенства (4) можно заменить с погрешностью порядка  $\tau^{2q_k+1}$  равенствами

$$y_{kj+1} = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{\tau}{\omega_k} \left[ \sum_{i=1}^{q_k} B_{ik} S(\omega_k, \beta_{ik}) + \sum_{i=1}^{q_k} A_{ik} S(\omega_k, \alpha_{ik}) \right], \quad (7)$$

где  $y_{kj} \approx u_k(t_j)$ .

Учитывая наличие множителя  $\tau$  перед суммами в (7), нетрудно построить численные методы решения задачи (1), (2), основанные на принципе последовательного повышения порядка точности [1].

Приведем в качестве примера вычислительное правило, позволяющее находить приближенное значение решения с локальной ошибкой порядка  $\tau^4$ :

$$y_{kj+1}^* = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{2\tau \sin \Theta_k}{\omega_k} f_{kj},$$

$$y_{kj+1} = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{\tau}{12\omega_k} \left[ 16 \sin \Theta_k f_{kj} - \sin 2\Theta_k (f_{kj-1} + f_{kj+1}^*) \right].$$

Здесь  $f_{kj+\gamma} = f_k(t_j + \gamma\tau, \bar{y}_{j+\gamma}^T)$ .

Пусть теперь  $\omega_k$  большие. Тогда из-за присутствия осциллирующих множителей под знаком интегралов в (4) построенные выше методы требуют мелкого шага интегрирования [2]. В этом случае примем три-

гонометрические множители за весовые функции и воспользуемся для приближенного вычисления интегралов результатами работы [3], в предположении, что функции  $f_k(t, \vec{u}^T)$  достаточно хорошо аппроксимируются многочленами на промежутке  $[-1, 1]$ . Аналогично предыдущему тогда можно построить соответствующие методы, позволяющие в случае  $\omega_k \gg 1$  вести вычисления с достаточно большим шагом  $\tau$ .

Примером таких вычислительных правил может служить следующее:

$$y_{kj+1}^* = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{4 \sin^2 0,5\Theta_k}{\omega_k^2} f_{kj},$$

$$y_{kj+1} = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{1}{\omega_k^2} [a_k f_{kj-1} + 2b_k f_{kj} + a_k f_{kj+1}^*],$$

$$a_k = 1 - \frac{\sin \Theta_k}{\Theta_k}, \quad b_k = \frac{\sin \Theta_k}{\Theta_k} - \cos \Theta_k.$$

В заключение заметим, что рассмотренный подход к построению численных методов допускает и другие способы аппроксимации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.—Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1967, № 4, с. 27.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы.—М., 1973, т. 1.
3. Николаева М. В.—Труды Ин-та математики имени В. И. Стеклова, 1949, т. 28, с. 26.

Поступила в редакцию  
15.05.80.

Кафедра вычислительной математики

## АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ\*

УДК 517.948.32

С. В. Рогозин. **О неоднородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом в исключительном случае.** № 424-79. Деп. от 01.02.79.

Рассматривается неоднородная краевая задача Римана с плюсбесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости. Степенной порядок завихрения произволен. Ограниченное решение строится с помощью аналога интерполяционного ряда Лагранжа.

УДК 519.6

В. В. Жуков, Э. С. Рабинович, Ю. Г. Степин. **Создание машинной модели антагонистической игры (на примере «пять в ряд»).** № 789-79. Деп. от 05.03.79.

В результате анализа основных подходов к созданию игровых программ делается попытка построения универсального алгоритма для игр из класса  $P$ . Описывается программная система, реализующая игру «пять в ряд».

УДК 518:517.91/94

П. И. Монастырский, Е. И. Петрушенко, А. И. Азаров, В. А. Басик, Г. И. Листопад, В. А. Радаева, Г. А. Расолько. **Численное решение некоторых специальных задач электродинамики, сводящихся к плохообусловленным граничным задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (обзор и численные эксперименты).** № 1181-79. Деп. от 04.04.79.

Задачи электродинамики такие, как равновесное распределение потенциала, определение пространственного заряда электрического поля и концентраций свободных носителей тока, определение равновесного электрического поля в одномерных электронно-дырочных переходах и т. д. приводят к граничным задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с вполне определенной спецификой: правые части уравнений, как правило, являются резко изменяющимися по абсолютной величине с большими разрывами первого рода. Эти задачи, рассматриваемые как начальные, жестко зависят от малых изменений входных данных.

Дано приложение известных и новых модификаций метода пристрелки, комбинированного метода, основанного на инвариантном погружении, квазилинеаризации и дифференциальной ортогональной прогонке. Рассмотрен ряд задач электродинамики, даны вычисленные схемы для их решения, приводятся результаты нескольких численных экспериментов, выполненных на ЭВМ «Минск-32».

УДК 519.152

Ф. Д. Коршков. **Об оптимальных стратегиях в системе массового обслуживания с частичными отказами.** № 3455-79. Деп. от 01.10.79.

Рассмотрена одноканальная система массового обслуживания с бесконечной очередью и с частичными отказами для случая, когда интенсивность входящего потока превышает интенсивность обслуживания. Указаны условия существования установившегося режима и найдены вероятности состояний в этом режиме. Для случая, когда система массового обслуживания уплачивает штраф за отказ заявки стать в очередь для обслуживания, указана стратегия системы для минимизации штрафа.

\* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комплекс ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

*УДК 532.591*

**А. А. Новик.** К постановке задачи о волнах на поверхности раздела двух бесконечных потоков несжимаемой жидкости. № 3457-79. Деп. от 03.10.79.

Анализируются уравнения, граничные и начальные условия задачи Коши — Пуассона для поверхности раздела двух бесконечных потоков идеальной несжимаемой жидкости, текущих под углом друг к другу. Для вертикальной координаты поверхности раздела выводится дифференциальное уравнение четвертого порядка, а также, в плоском случае, интегро-дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка. Граничные условия для потенциалов скоростей разделяются и приводятся к виду, аналогичному условию Коши — Пуассона на свободной поверхности. Начальные условия формулируются для обоих потенциалов скоростей, вертикальной координаты поверхности раздела и их первых производных по времени отдельно для каждой функции. Разделение граничных и начальных условий упрощает математическую постановку задачи и позволяет отойти от традиционного применения преобразования Фурье.

*УДК 517.925*

**Е. А. Мурашко, С. С. Белявский.** О матричном методе и методе Эйлера решения линейных систем дифференциальных уравнений. № 3532-79. Деп. от 11.10.79.

Предложен способ изложения матричного метода решения линейных стационарных систем дифференциальных уравнений без использования теории элементарных делителей  $\alpha$ -матриц. Установлена также связь между матричным методом и методом Эйлера решения таких систем.

*УДК 621.391*

**В. В. Апанасович.** Получение интенсивности некоторых классов случайных импульсных потоков по распределению первого интервала. № 3754-79. Деп. от 11.10.79.

По распределению первого интервала с учетом аддитивной и независимой помехи получены выражения для нахождения интенсивности следующих потоков: пуассоновского, отрицательно-биномиального, Пальма, Бернулли.

*УДК 530.12:531.51*

**В. И. Кудин, А. В. Минкевич, Ф. И. Федоров.** О пространственно-временных симметриях в калибровочной теории гравитации. № 3794-79. Деп. от 05.11.79.

Исходя из теории изометрий сформулированы условия пространственно-временных симметрий для различных полей в тетрадной теории поля. Эти условия имеют вид требований обращения в нуль суммы дифференциалов Ли относительно векторов Киллинга и вариаций полей, связанных с тетрадными лоренцовыми преобразованиями, определяемыми некоторыми параметрами, зависящими от векторов Киллинга и поля тетрад. Условия симметрии применяются к калибровочной теории гравитации в пространстве с кривизной и кручением. Рассмотрен случай сферически-симметричного пространства — времени, а также сферически-симметричного однородного пространства — времени. Получены соответствующие выражения для тензора кручения и коэффициентов вращения Риччи.

*УДК 621.317*

**В. В. Данилевич, А. В. Потапов, А. Ф. Чернявский.** О механизме образования погрешностей измерений в комбинированных системах временного анализа. № 3795-79. Деп. от 05.11.79.

Для комбинированных систем временного анализа, использующих непрерывно работающие опорные генераторы и интерполяционные преобразователи время — амплитуда — код, проанализирован механизм образования погрешностей измерений. Показано, что систематическая погрешность и дисперсия измерений при двухшкальном кодировании непостоянны в пределах периода опорного генератора. Сформулированы принципы организации метрологических исследований комбинированных анализаторов временных интервалов, учитывающие характер распределения погрешностей измерений по шкале данного типа устройств.

*УДК 621.378.33*

**Ю. П. Макаров, А. Ф. Чернявский.** Способ определения кратковременных флуктуаций частоты ОКГ с пикосекундным временем усреднения. № 3867-79. Деп. от 14.11.79.

Проведен анализ известных методов определения кратковременных флуктуаций частоты ОКГ и показана их низкая эффективность при решении задачи в случае исследования нестабилизированных систем. Предложен метод определения кратковременных флуктуаций частоты ОКГ, позволяющий в принципе простыми средствами достичь времени усреднения пикосекундного диапазона. Приведенные экспериментальные результаты свидетельствуют о высокой эффективности метода.

**УДК 517**

**В. Т. Ерофеевко.** Решение задач электростатики для двух касающихся сфер вырожденного тора в присутствии различных проводников. № 61-80. Деп. от 03.01.80.

Получены новые теоремы сложения, связывающие сферические и бисферические (вырожденные) решения уравнения Лапласа, цилиндрические и бисферические решения, бисферические решения и бисферические решения в сдвинутой системе координат. На основании полученных теорем решена задача электростатики для двух касающихся сфер в присутствии третьей. Проведено полное обоснование решения. Решена также задача электростатики для вырожденного тора в присутствии сферы.

**УДК 681.142.2**

**Л. А. Филиппчук, М. Л. Зильбург, Г. П. Бык.** Об одном варианте обработки перфоленты. № 231-80. Деп. от 15.01.80.

Рассматривается обработка массива данных (кодограмм) с перфоленты, сформированной на установке АРП-1М (АРП-100). При обработке информации осуществляется логический контроль вводимой информации. Массив выходных данных представляет собой набор записей одинаковой длины различной структуры.

**УДК 535.321**

**В. И. Науменко.** Метод определения показателя преломления в «невидимых» областях спектра для сходящихся пучков света. № 232-80. Деп. от 15.01.80.

Предлагается метод повышения точности определения показателя преломления прозрачных сред, призванный обойти трудности, встречаемые при работе на стандартном спектрометрическом оборудовании из-за расходимости пучков света. Суть метода заключается в измерении интегрального отражения в широком диапазоне углов для границы раздела исследуемой среды с оптически более плотной средой, причем со стороны последней. Проведено математическое обоснование метода. Даны таблицы значений измеряемых величин для границ раздела с используемыми в инфракрасной спектроскопии НПВО плотными оптическими материалами.

**УДК 534.1:535.33:541.49**

**В. Г. Попов, А. Б. Ковриков, И. В. Липницкий, Д. С. Умрейко.** Разработка программы и расчет колебательного спектра полимерной цепи комплексного аниона  $[\text{PtCl}_5 \text{OH} (\text{OD})]_n^{2-}$  № 278—80. Деп. от 21.01.80.

Излагается алгоритм программы расчета частот и форм нормальных колебаний полимерных цепей. Приводится расчет полимерной модели, состоящей из комплексных анионов  $[\text{PtCl}_5 \text{OH} (\text{OD})]_n^{2-}$ , связанных водородными связями.

**УДК 539.19**

**Н. Б. Борковский, А. Б. Ковриков, И. В. Липницкий, Д. С. Умрейко.** Оптические спектры и электронное строение хлоргидроксоплатинатов калия. № 279-80. Деп. от 01.02.79.

Приведены результаты расчета электронной структуры ряда соединений общей формулы  $\text{K}_2[\text{PtCl}_{6-n}(\text{OH})_n]$  ( $n=1, 2, \dots, 5$ ). На основе полученных результатов сделано отнесение электронных спектров поглощения. Показано, что расчеты правильно воспроизводят гипсохронный сдвиг, наблюдавшийся в спектрах при замещении атомов Cl группами OH.

**УДК 517.948.32**

**С. В. Рогозин.** Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае. № 423-79. Деп. от 01.02.79.

Рассматривается краевая задача Римана для полуплоскости с бесконечным индексом в случае, когда коэффициент задачи обращается в счетном числе точек, лежащих на вещественной прямой в нуль или бесконечность. Нули и полюса коэффициента являются нулями некоторых целых функций произвольного порядка. Построено общее решение однородной задачи в классе ограниченных функций.

**УДК 621.382**

**Г. М. Дорофеев, А. Ф. Канищев, Г. А. Лисовский, В. М. Ломако, А. Г. Черных.** Изменение быстродействия комплементарных МОП-инверторов, облученных гамма-квантами. № 298-80. Деп. от 22.01.80.

Облучение К/МОП-инверторов гамма-квантами  $^{60}\text{Co}$  приводит к увеличению времени их переключения. При экспозиционных дозах свыше  $2 \cdot 10^5$  рад экспериментальные

значения времени переключения не совпадают с расчетными. Расчет проводился в предположении, что основной причиной изменения быстродействия является процесс накопления в окисле положительного заряда. Для указанных доз основным фактором, определяющим изменение динамических параметров К/МОП-инвертора, становится, по-видимому, изменение подвижности носителей заряда в каналах соответствующих транзисторов.

*УДК 519.853.4*

**А. Я. Кругер, Б. Ш. Мордухович. Обобщенные нормали и производные и необходимые условия экстремума в задачах недифференцируемого программирования. I.** № 408-80. Деп. от 04.02.80.

Работа посвящена систематическому изложению нового подхода к получению необходимых условий экстремума в негладких и невыпуклых задачах оптимизации, в основе которого лежит доказанный во второй части экстремальный принцип — обобщенное уравнение Эйлера. В первой части исследуются понятия сопряженного конуса к произвольному множеству в конечномерном пространстве и несколько модификаций понятия обобщенного дифференциала ( $D$ -производной) произвольной функции. Изучаются свойства данных понятий, устанавливаются некоторые формулы исчисления  $D$ -производных. Приводится сравнение рассматриваемых конструкций с конструкциями Кларка, Варги и др.

*УДК 519.853.4*

**А. Я. Кругер, Б. Ш. Мордухович. Обобщенные нормали и производные и необходимые условия экстремума в задачах недифференцируемого программирования. II.** № 498-80. Деп. от 11.02.80.

Вторая часть работы посвящена необходимым условиям экстремума в негладких задачах оптимизации. Вводятся понятия экстремальной системы множеств и экстремальной точки. Устанавливается характеристика экстремальных точек системы замкнутых множеств — обобщенное уравнение Эйлера. Из этого результата выводятся необходимые условия экстремума в задаче математического программирования с негладкими ограничениями типа равенств и неравенств и произвольными нефункциональными ограничениями. Дается сравнение полученных результатов с результатами других авторов. В последнем параграфе излагается развитие предлагаемого подхода на негладкие задачи оптимизации в бесконечномерном банаховом пространстве. В приложении приводятся некоторые вспомогательные результаты, связанные с локальными аппроксимациями множеств и функций, которые используются при исследовании сопряженных конусов и  $D$ -производных.

## ПАМЯТИ УЧЕНОГО

### АНДРЕЙ КАПИТОНОВИЧ КРАСИН

А. К. Красин пришел в БГУ имени В. И. Ленина в 1962 г. как признанный специалист в области ядерной энергетики, один из создателей первой в мире атомной электростанции, удостоенный за эту работу Ленинской премии.

Академик АН БССР, доктор физико-математических наук, профессор А. К. Красин сразу же стал одним из самых популярных лекторов университета. Глубокие профессиональные знания, большой опыт научной и организационной работы по созданию ядерных энергетических реакторов, опыт преподавания в Томском университете и филиале МИФИ и, наконец, исключительное личное обаяние способствовали сплочению вокруг него талантливой молодежи, аспирантов, студентов.

В 1939 г. А. К. Красин успешно защитил кандидатскую диссертацию по физике диэлектриков. Дальнейшим исследованиям в этой области помешала война. С 1941 г. А. К. Красин в действующей армии, где прошел путь от командира взвода до заместителя начальника радиосвязи всей дальней бомбардировочной авиации.

В 1945 г. А. К. Красин был демобилизован и направлен на должность старшего научного сотрудника в организацию, которую мы знаем сейчас как Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова. Он проводит исследования по замедлителям нейтронов для ядерных реакторов, создает первый в мире критический реактор на металлическом бериллии.

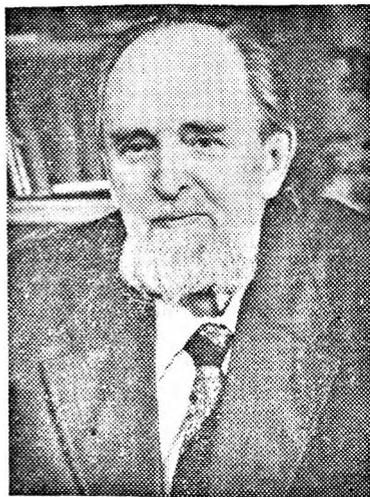
В 1948 г. Физико-энергетический институт в Обнинске (ФЭИ) получает задание разработать энергетический реактор для атомной электростанции. А. К. Красин активно включается в эту работу и как заместитель директора ФЭИ, и как заместитель научного руководителя разработки первой атомной станции. Итог этой работы известен всем: в июне 1954 г. первая атомная дала ток.

Затем были Белоярская АЭС имени И. В. Курчатова, передвижная АЭС, работы по диссоциирующим теплоносителям, по радиационной модификации материалов, по водородной энергетике и многое, многое другое. И при всем обилии научной и организационной работы А. К. Красин всегда читал лекции студентам. Они были интересны и увлекательны. Проблемный характер обучения рационально сочетался с системностью изложения материала, с умением увлечь слушателей.

Заслуги А. К. Красина отмечены наградами за боевые и трудовые успехи. Он награжден орденами Ленина, Октябрьской революции, Отечественной войны 2-й степени, многими медалями, двумя Почетными грамотами Президиума Верховного Совета БССР, ему присвоено звание Заслуженного деятеля науки и техники БССР, присуждена высшая награда общества «Знание» — медаль имени С. И. Вавилова.

Андрей Капитонович Красин умер 28 марта 1981 г., не дожив менее двух месяцев до своего семидесятилетия. Последнюю лекцию он прочел 20 марта 1981 г.

Светлая память об Андрее Капитоновиче Красине — известном советском ученом навсегда сохранится в памяти и сердцах всех, кто знал его.



# СОДЕРЖАНИЕ

## ФИЗИКА

<i>Коляда А. А., Кравцов В. К.</i> О некоторых вопросах реализации арифметики обобщенных СОК . . . . .	3
<i>Прима А. М., Прима В. М.</i> Расчет параметров, определяющих интенсивности ИК полос этилена по модели эффективных зарядов, и взаимосвязь интенсивностей валентных и деформационных частот . . . . .	7
<i>Коляда А. А., Чернявский А. Ф.</i> Быстродействие АУ в обобщенных СОК . . . . .	12
<i>Лаврукович В. И., Сидоренко А. В.</i> Волоконно-оптическая линия связи для передачи СВЧ сигнала по лучу лазера . . . . .	16
<i>Глазков Ю. В., Врублевский А. И., Зотов Н. И., Беляцкая Н. М.</i> ЭПР стабилизированных радикалов в фотореакциях с участием порфиринов . . . . .	18
<i>Воропай Е. С., Саржевский А. М., Торпачев П. А.</i> К вопросу об определении сечений двухфотонного поглощения внутрирезонаторным методом . . . . .	21
<i>Хапалюк А. П.</i> Полное резонансное поглощение электромагнитных волн в цилиндре . . . . .	25
<i>Лаппо О. И., Шавель Н. Н., Щорс Л. С.</i> Источник импульсов накачки инжекционных ПКГ для широкополосных цифровых оптических линий связи . . . . .	29
<i>Кривошеев Н. К., Стельмах В. Ф.</i> Применение дроссельного СВЧ перехода в криостате . . . . .	32
<i>Муртада Х. А., Гуманский Г. А., Углов В. В.</i> Отражение и рассеяние рентгеновского излучения поверхностью кремния с различной степенью шероховатости . . . . .	34

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.</i> Модификация адаптивного метода решения общей задачи линейного программирования . . . . .	37
<i>Зув Н. М.</i> Оценка ковариаций случайных величин, удовлетворяющих условию Крамера и перемешиванию «по Ибрагимову» . . . . .	42
<i>Калитин Б. С.</i> К устойчивости разрывных предельных циклов двумерных автономных систем . . . . .	44
<i>Еровенко В. А.</i> Алгебраически определенные негипонормальные операторы . . . . .	48
<i>Антонович С. П., Гришанович А. П., Колесник Т. И., Орехов Н. И.</i> Метод выделения трендов нестационарного процесса . . . . .	50
<i>Леваков А. А.</i> Некоторые свойства решений дифференциальных включений в банаховом пространстве . . . . .	54
<i>Прусов И. А., Савенков В. А.</i> Интегральное уравнение контактной задачи теории упругости для изотропной полосы . . . . .	57
<i>Гахович А. С.</i> Оригиналы Лапласа—Эйлера со степенной особенностью целого типа в нуле . . . . .	59

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Прасолов А. В.</i> О теореме Герстена для градуированных колец . . . . .	62
<i>Буза М. К.</i> О мультипликативном переполнении в коде вычетов . . . . .	63
<i>Городецкий Л. М.</i> Квазиобратные матрицы и решение систем линейных алгебраических уравнений . . . . .	65
<i>Шалима В. Н.</i> Двухшаговые методы решения систем квазилинейных уравнений второго порядка специального вида . . . . .	66
Аннотации депонированных статей . . . . .	69

## ПАМЯТИ УЧЕНОГО

<b>Андрей Капитонович Красин</b> . . . . .	73
--	----

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2

Редактор *И. П. Стрельчана*  
Художественный редактор *Л. Г. Медведева*  
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 09.02.81. Подписано в печать 08.05.81. АТ 13179. Формат  
70×108<sup>1/8</sup>. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 6,98. Тираж  
955 экз. Заказ 88.

Издательство Белорусского государственного университета имени  
В. И. Ленина. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, ул. Бобруй-  
ская, 7, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП  
Белоруссии. 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

## РЕФЕРАТЫ

*УДК 681.142.01*

Коляда А. А., Кравцов В. К. О некоторых вопросах реализации арифметики обобщенных СОК.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Рассматриваются вопросы, связанные с реализацией арифметики обобщенных систем остаточных классов (ОСОК). На основе анализа алгоритмов арифметики сформулированы требования и рекомендации, которыми следует руководствоваться при выборе набора модулей ОСОК. Определен функциональный состав арифметического устройства, работающего в нормированных ОСОК.

Библ. 5 назв., ил. 2, табл. 1.

*УДК 539.19*

Прима А. М., Прима В. М. Расчет параметров, определяющих интенсивности ИК полос этилена по модели эффективных зарядов, и взаимосвязь интенсивностей валентных и деформационных частот.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

На основе экспериментальных значений интенсивностей инфракрасных частот этилена и дейтероэтилена рассчитаны параметры, определяющие интенсивности по модели эффективных атомных зарядов. Для каждого нормального колебания получено аналитическое выражение производной дипольного момента молекулы по нормальной координате как функции эффективных зарядов и их производных по колебательным координатам. Знаки вычисленных параметров поставлены в соответствие с изменением полярности связей при растяжении связи и при увеличении валентного угла.

Библ. 9 назв., ил. 3, табл. 3.

*УДК 681.142.01*

Коляда А. А., Чернявский А. Ф. Быстродействие обобщенных СОК.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Проведен сравнительный анализ скоростных характеристик обобщенных систем остаточных классов (ОСОК) и позиционных систем счисления (ПСС). Показано, что в ОСОК можно достичь более высокого быстродействия, чем в ПСС, особенно при использовании арифметического устройства, функционирующего в поточном режиме.

Библ. 10 назв., табл. 1.

*УДК 621.372.8*

[Лаврукович В. И.], Сидоренко А. В. Волоконно-оптическая линия связи для передачи СВЧ сигнала по лучу лазера.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Приводятся параметры разработанной волоконно-оптической линии связи (ВОЛС) для передачи СВЧ сигнала по лучу лазера. Исследовано влияние угла сходимости вводимого в волокно лазерного излучения, радиуса изгиба и температуры окружающей среды на амплитуду и фазу СВЧ выходного сигнала.

Библ. 6 назв., ил. 2, табл. 1.

*УДК 541.14:539.124.143*

Глазков Ю. В., Врублевский А. И., Зотов Н. И., Беляцкая Н. М. ЭПР стабилизированных радикалов в фотореакциях с участием порфиринов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Методами ЭПР и спиновых ловушек изучена природа радикалов, образующихся в ходе фотореакций октаметилтетрафенилпорфина с различными хинонами. Установ-

лено, что спиновая ловушка нитрозодурол стабилизирует анион-радикалы хинонов. Показано, что увеличение концентрации ловушки в растворе приводит к стабилизации радикалов метанола.

Библ. 5 назв., ил. 1, табл. 1.

**УДК 535.530.182**

Воропай Е. С., Саржевский А. М., Горпачев П. А. К вопросу об определении сечений двухфотонного поглощения внутрирезонаторным методом без активной среды.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Показано, что при измерениях двухфотонного поглощения величиной менее 1% необходимо отдельно определять линейные потери внутри образца и на его поверхности или на стенках кюветы. Действительное нелинейное поглощение может отличаться от измеренного в несколько раз для типичных условий эксперимента, причем ошибка сохраняется и при относительных спектральных измерениях. Описана процедура определения сечения двухфотонного поглощения для многоходового метода пассивного резонатора, основанная на построении градуировочного графика с помощью расчета зависимости пропускания от величины нелинейного поглощения при заданных числе проходов образца и параметрах измерительной установки.

Библ. 10 назв., ил. 2.

**УДК 535.44; 868.4**

Хапалюк А. П. Полное резонансное поглощение электромагнитных волн в цилиндре.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Теоретически изучаются условия реализации явления полного резонансного взаимодействия поглощающего вещества кругового цилиндра с электромагнитным полем собственных типов колебаний цилиндра. Сущность явления сводится к полному поглощению падающих на цилиндр волн.

Библ. 2 назв.

**УДК 621.373.5**

Лаппо О. И., Шавель Н. Н., Щорс Л. С. Источник импульсов накачки инжекционных ПКГ для широкополосных цифровых оптических линий связи.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Приведена схема формирователя наносекундных импульсов накачки ПКГ, построенного на с. в. ч.-транзисторах по принципу последовательного усиления — ограничения амплитуды. Длительность фронта и спада формируемых импульсов составляет на нагрузке 10—100 Ом около  $10^{-9}$  с. Минимальное время восстановления формирователя не превышает  $5 \cdot 10^{-9}$  с. Амплитуда импульсов достигает 50 В на нагрузке свыше 10 Ом. При длительности импульсов около  $5 \cdot 10^{-9}$  с источник накачки ПКГ позволяет формировать импульсы на частотах следования вплоть до 100 МГц.

Библ. 13 назв., ил. 1.

**УДК 535.37**

Кривошеев Н. К., Стельмах В. Ф. Применение дроссельного СВЧ-перехода в криостате.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Оценивается возможность использования дроссельных волноводных переходов СВЧ в криогенных системах. Указываются границы их применения.

Библ. 4 назв., ил. 3.

**УДК 537.531:535**

Муртада Х. А., [Гуманский Г. А.], Углов В. В. Отражение и рассеяние рентгеновского излучения поверхностью кремния с различной степенью шероховатости.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Получена зависимость зеркального отражения и сопутствующего рассеяния  $K_{\alpha 1,2}$ -излучения кобальта от поверхности пластин кремния с различной степенью шероховатости. Предложена модель, дающая качественное согласие с результатами измерений.

Библ. 6 назв., ил. 2.

**УДК 62-50**

Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Модификация адаптивного метода решения общей задачи линейного программирования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Строится конечная модификация предложенного ранее авторами метода, в которой специальным образом учитываются возникающие на итерациях вырожденные ситуации, что ведет к увеличению общей эффективности метода.

Библ. 2 назв.

**УДК 519.21**

**Зуев Н. М. Оценка ковариаций случайных величин, удовлетворяющих условию Крамера и перемешиванию «по Ибрагимову».**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Получена оценка ковариаций случайных величин и показана асимптотическая неулучшаемость этой оценки по коэффициенту перемешивания.

Библ. 3 назв.

**УДК 517.917**

**Калитин Б. С. К устойчивости разрывных предельных циклов двумерных автономных систем.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Получен критерий орбитальной устойчивости разрывного предельного цикла с конечным числом скачков на периоде в предположении, что соответствующая изображающая точка фазовой плоскости совершает лишь вертикальные скачки.

Библ. 6 назв.

**УДК 517.983.248**

**Еровенко В. А. Алгебраически определенные негипонормальные операторы.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Исследованы два класса линейных ограниченных операторов, определенных в гильбертовом пространстве  $H$ , а именно: операторы  $T$ , для которых  $\|T^*Tx\| \leq \|T^*x\|$  и  $\|T^*x\| \leq \|TT^*x\|$  при всех  $x \in H$  и которые являются расширением класса гипонормальных операторов.

Библ. 7 назв.

**УДК 681.3.01**

**Антонович С. П., Гришанович А. П., Колесник Т. И., Орехов Н. И. Метод выделения трендов нестационарного процесса.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Предложен метод выявления трендов дискретного временного ряда нестационарного процесса и программная реализация метода на примере ритма сердца. Метод основан на последовательном сглаживании цифрового ряда с последующим вычислением скользящей корреляционной функции.

Библ. 3 назв., ил. 3.

**УДК 517.9**

**Леваков А. А. Некоторые свойства решений дифференциальных включений в банаховом пространстве.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Пусть  $E$  — сепарабельное банахово пространство;  $X$  — множество непустых замкнутых (не обязательно компактных и выпуклых) подмножеств  $E$ . Для дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) \in X, \quad (1)$$

доказываются теорема существования и теорема о зависимости решений от начальных условий и правой части. Кроме того, устанавливается связь между решениями дифференциальных включений (1) и  $x \in \text{сopv } F(t, x)$ .

Библ. 6 назв.

**УДК 539.3**

**Прусов И. А., Савенков В. А. Интегральное уравнение контактной задачи теории упругости для изотропной полосы.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

С помощью специального представления функции напряжения контактная задача для изотропной полосы, покоящейся на жестком гладком основании, сведена к интегральному уравнению. Предлагаемый метод позволяет получить приближенное решение ряда контактных задач для полосы в более простой форме.

Библ. 4 назв.

**УДК 517.5**

**Гахович А. С. Оригиналы Лапласа — Эйлера со степенной особенностью целого типа в нуле.**— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

На базе адамаровского метода регуляризации расходящихся интегралов решается вопрос расширения сферы приложения операционного исчисления на класс функций, обладающих неинтегрируемой степенной особенностью целого типа в нуле.

Библ. 3 назв.

*УДК 512.733*

П р а с о л о в А. В. О теореме Герстена для градуированных колец.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Вычислены  $K$ -функторы от произвольного градуированного кольца  $A$ , что было сделано ранее Герстеном в случае, когда  $A[t]$  — когерентное регулярное кольцо.

Библ. 4 назв.

*УДК 681.142.01*

Б у з а М. К. О мультипликативном переполнении в коде вычетов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Предлагается новый метод мультипликативного переполнения при кодировании чисел с помощью вычетов, приведены оценки его эффективности.

Библ. 3 назв.

*УДК 518:512.25*

Г о р о д е ц к и й Л. М. Квазиобратные матрицы и решение систем линейных алгебраических уравнений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Предлагается понятие квазиобращения матриц и с его помощью рассматриваются некоторые свойства квазиньютоновских итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Библ. 5 назв.

*УДК 518:321*

Ш а л и м а В. Н. Двухшаговые методы решения систем квазилинейных уравнений второго порядка специального вида.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 2.

Рассматривается вопрос о построении двухшаговых методов численного решения задачи Коши для систем квазилинейных уравнений второго порядка с использованием информации о точном решении исходной задачи.

Библ. 3 назв.

## ПРАВИЛА ПОДГОТОВКИ РУКОПИСЕЙ ДЛЯ ОПУБЛИКОВАНИЯ В ЖУРНАЛЕ

1. Статья должна быть изложена с предельной краткостью, окончательно отредактирована и оформлена. Статья является оригиналом для печати.

2. Статьи, напечатанные на машинке (не портативной) через два интервала с полями не менее 4 см на одной стороне листа, представляют в редакцию в двух экземплярах.

3. Объем статьи не должен превышать 8 страниц машинописного текста (включая приложения) и 3 рисунков; кратких сообщений — 3 страниц и 2 рисунков.

4. К статье должны быть приложены: акт экспертной комиссии, рекомендация кафедры, реферат статьи (до 0,25 стр. машинописного текста) и сведения об авторе (место работы, должность, адрес, рабочий и домашний телефоны).

5. Особое внимание следует обращать на тщательность и аккуратность внесения в текст математических и химических формул, на оформление таблиц, списка литературы, рисунков и подписей к ним. Следует избегать повторения в тексте данных, содержащихся в таблицах и графиках, а также представления численных результатов одновременно в виде таблиц и графиков.

6. Формулы и буквенные обозначения необходимо аккуратно и разборчиво вписать в два экземпляра от руки черными чернилами и разметить синими чернилами: греческие буквы обвести красными; латинские, набираемые курсивом, подчеркнуть волнистой чертой; прописные двумя черточками снизу ( $A$ ), строчные — двумя черточками сверху ( $a$ ). Следует различать буквы  $O$  (прописную),  $o$  (строчную) и  $0$  (ноль), для чего буквы  $O$  и  $o$  подчеркивают двумя черточками и ноль отмечают квадратной скобкой снизу ( $0$ ,  $o$ ,  $0$ ). Необходимо различать в написании буквы  $l$  (эль),  $e$ , а также  $I$ , и

$J$  (йот), для чего  $I$  пишут, как римскую единицу, подчеркивая ее двумя черточками снизу. Векторы подчеркивают черными чернилами одной чертой сверху. Математические символы  $\cos$ ,  $\lg$  и др., набираемые прямым шрифтом, и химические символы элементов ( $H_2O$ ,  $Ag$  и т. д.) отмечают квадратной скобкой снизу. Показатели степени и индексы, а также надстрочные знаки отмечают дугой  $A^2$  (для верхнего индекса) и  $A_2$  (для нижнего).

7. Для формул и символов, а также между ними следует оставлять достаточные пробелы в тексте.

8. Необходимо придерживаться Международной системы единиц (СИ).

9. Рисунки представляют в двух экземплярах в виде графиков, схем, фотографий отдельно от текста; фотографии, отпечатанные на глянцевой бумаге с накатом, должны иметь четкое и контрастное изображение. Чертежи и схемы выполняют тушью на плотной белой бумаге или кальке  $150 \times 200$  мм. На обороте карандашом необходимо указать фамилию автора, название статьи и номер рисунка.

10. Таблицы (обязательно с заголовками) и подписи к рисункам следует печатать на отдельных листах. Кривые на рисунках нумеруются арабскими цифрами, которые расфигуровываются в подписях к рисункам. Представление одного и того же материала в виде таблиц и рисунков не допускается. Места для таблиц и рисунков необходимо указать на полях рукописи.

11. Ссылки на литературу даются в порядке цитирования (порядковый номер в квадратных скобках). Список литературы (прилагается на отдельном листе) должен быть оформлен следующим образом:

а) для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, год издания, страницы;

б) для журнальных статей: фамилия и инициалы автора, принятое сокращенное название журнала, год издания, том, номер выпуска, страницы.

12. Ссылки на неопубликованные работы, диссертации и авторефераты не допускаются.

13. В конце статьи (после литературы) ставится название кафедры, где выполнена работа. Статью должны подписать все авторы.

14. В случае возвращения статьи автору на доработку первоначальный текст статьи необходимо вернуть в редакцию. При задержке статьи автором на месяц и более первоначальная дата поступления не сохраняется.

15. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения как в тексте, так и в рисунках не допускаются. Корректур за подписью автора и датой ее подписания сдается в редакцию в течение двух дней с момента ее получения.

16. Статьи, оформленные с нарушением «Правил», редакция не принимает.