

где $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, то такой процесс называется квазиньютоновским [3] и приводит к решению системы уравнений (4), по крайней мере, за $n+1$ шаг при условии линейной независимости векторов Δf_j . Кроме того, $H_n = A^{-1}$. Далее нас будет интересовать возможность получить решение уравнения (4) менее, чем за $n+1$ шаг.

Лемма 1. Если точка x_{k+1} найдена с помощью квазиньютоновского метода (3), (5), то при любом $j \leq k$ справедливо равенство $x_{k+1} = x_j - H_k f_j$. В частности,

$$x_{k+1} = x_0 - H_k f(x_0), \quad (6)$$

и указанный метод можно рассматривать как процесс последовательного нахождения матрицы H_k , совпадающей на векторе f_0 с A^{-1} .

Лемма 2. Произвольный итерационный процесс вида (6) доставляет решение уравнения (4) тогда и только тогда, когда $(AH_k - I)f(x_0) = 0$.

Теорема 3. Если $\Delta x_j = \alpha_0 f_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{ij} \Delta f_i$, $j = \overline{0, m} \leq k$, то, для того чтобы точка x_{k+1} , полученная в результате квазиньютоновского итерационного процесса (3), (5), являлась решением уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы матрица H_k была квазиобратной к A над линейной оболочкой векторов $f_0, \Delta f_0, \dots, \Delta f_{m-1}$.

Если для нахождения матриц H_k используется итерационное соотношение вида

$$H_k = H_{k-1} + \Delta H_{k-1}, \text{ rang } \Delta H_{k-1} = 1, \quad (7)$$

то справедлива

Теорема 4. Если минимальный анулирующий полином матрицы A относительно вектора b [2] имеет степень k и $x_0 = b$, то итерационный процесс (3), (5), (7) приводит к решению уравнения (4) не более, чем за $k+1$ шаг, а матрицы H_k и A^{-1} имеют при этом, по крайней мере, k общих собственных значений.

Доказательство теоремы основано на том, что матрица ΔH_{k-1} имеет вид $\Delta H_{k-1} = (\Delta x_{k-1} - H_{k-1} \Delta f_{k-1}) g_{k-1}^T$ [4], и все векторы x_j находятся в циклическом пространстве, натянутом на векторы $b, Ab, \dots, A^{k-1}b$.

Теорема 4 показывает, что квазиньютоновские методы численного интегрирования дифференциальных уравнений [5], построенные на основе неявных линейных методов, могут иметь существенно расширенную область устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберт А. Регрессия, псевдонверсия и рекуррентное оценивание.— М., 1977.
2. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.— М., 1969.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М., 1975, с. 204.
4. Dennis J. E., More J. J.— SIAM Review, 1977, v. 19, № 1, p. 46.
5. Бобков В. В., Городецкий Л. М.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 1, с. 11.

Поступила в редакцию
07.02.80.

Вычислительный центр

УДК 518:321

В. Н. ШАЛИМА

ДВУХШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим на отрезке $[t_0, T]$ следующую задачу Коши:

$$\ddot{u} + \Omega \dot{u} = F(t_1, \overline{u}^T), \quad (1)$$

$$\overline{u}(t_0) = \overline{u}_0, \quad \dot{\overline{u}}(t_0) = \dot{\overline{u}}_0. \quad (2)$$

Здесь $\bar{u} = [u_1, \dots, u_s]^T$; Ω — диагональная матрица с элементами ω_k^2 , $\omega_k^2 = \text{const} > 0$, $k = 1, 2, \dots, s$, $F(t, \bar{u}^T)$ — вектор-функция, компоненты которой $f_k(t, \bar{u}^T)$ обладают достаточной гладкостью, $\bar{u}_0$, $\bar{u}_0$ — вектор-столбцы начальных данных.

Непосредственно проверяется, что

$$u_k(t) = u_{k0} \cos \omega_k(t - t_0) + \frac{u_{k0}}{\omega_k} \sin \omega_k(t - t_0) + \frac{1}{\omega_k} \int_{t_0}^t \sin \omega_k(t - \eta) f_k(\eta, \bar{u}^T(\eta)) d\eta \quad (3)$$

удовлетворяет (1), (2).

Выберем на $[t_0, T]$ сетку $\omega_\tau = \{t_j = t_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N\}$ и предположим, что вычисления доведены до точки t_j , $0 \leq j < N$.

На основании (3) можно получить

$$u_k(t_{j+1}) = 2u_k(t_j) \cos \Theta_k - u_k(t_{j-1}) + \frac{\tau}{\omega_k} \left[\int_{-1}^0 S(\omega_k, \beta) d\beta + \int_0^1 S(\omega_k, \alpha) d\alpha \right], \quad (4)$$

где $S(\omega_k, \beta) = \sin \omega_k(1 + \beta) f_k(t_j + \beta\tau, \bar{u}^T(t_j + \beta\tau))$, $S(\omega_k, \alpha) = \sin \omega_k(1 - \alpha) f_k(t_j + \alpha\tau, \bar{u}^T(t_j + \alpha\tau))$, $\Theta_k = \omega_k \tau$, $k = 1, 2, \dots, s$.

В зависимости от величин ω_k рассмотрим два подхода к построению методов приближенного решения задачи (1), (2).

Пусть ω_k невелики. Потребуем, чтобы квадратурные формулы

$$\int_{-1}^0 S(\omega_k, \beta) d\beta \approx \sum_{i=1}^{q_k} B_{ik} S(\omega_k, \beta_{ik}), \quad \int_0^1 S(\omega_k, \alpha) d\alpha \approx \sum_{i=1}^{q_k} A_{ik} S(\omega_k, \alpha_{ik}) \quad (5)$$

имели алгебраическую степень точности $2q_k - 1$. Тогда для определения параметров A_{ik} , α_{ik} , B_{ik} , β_{ik} получим следующие системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{q_k} B_{ik} \beta_{ik}^{j-1} = (-1)^{j-1} \frac{1}{j}, \quad \sum_{i=1}^{q_k} A_{ik} \alpha_{ik}^{j-1} = \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, 2q_k - 1. \quad (6)$$

Выбирая узлы и коэффициенты квадратурных формул (5) удовлетворяющими (6), равенства (4) можно заменить с погрешностью порядка τ^{2q_k+1} равенствами

$$y_{kj+1} = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{\tau}{\omega_k} \left[\sum_{i=1}^{q_k} B_{ik} S(\omega_k, \beta_{ik}) + \sum_{i=1}^{q_k} A_{ik} S(\omega_k, \alpha_{ik}) \right], \quad (7)$$

где $y_{kj} \approx u_k(t_j)$.

Учитывая наличие множителя τ перед суммами в (7), нетрудно построить численные методы решения задачи (1), (2), основанные на принципе последовательного повышения порядка точности [1].

Приведем в качестве примера вычислительное правило, позволяющее находить приближенное значение решения с локальной ошибкой порядка τ^4 :

$$y_{kj+1}^* = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{2\tau \sin \Theta_k}{\omega_k} f_{kj},$$

$$y_{kj+1} = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{\tau}{12\omega_k} \left[16 \sin \Theta_k f_{kj} - \sin 2\Theta_k (f_{kj-1} + f_{kj+1}^*) \right].$$

Здесь $f_{kj+\gamma} = f_k(t_j + \gamma\tau, \bar{y}_{j+\gamma}^T)$.

Пусть теперь ω_k большие. Тогда из-за присутствия осциллирующих множителей под знаком интегралов в (4) построенные выше методы требуют мелкого шага интегрирования [2]. В этом случае примем три-

тонометрические множители за весовые функции и воспользуемся для приближенного вычисления интегралов результатами работы [3], в предположении, что функции $f_k(t, \bar{u}^T)$ достаточно хорошо аппроксимируются многочленами на промежутке $[-1, 1]$. Аналогично предыдущему тогда можно построить соответствующие методы, позволяющие в случае $\omega_k \gg 1$ вести вычисления с достаточно большим шагом τ .

Примером таких вычислительных правил может служить следующее:

$$y_{kj+1}^* = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{4 \sin^2 0,5\Theta_k}{\omega_k^2} f_{kj},$$

$$y_{kj+1} = 2y_{kj} \cos \Theta_k - y_{kj-1} + \frac{1}{\omega_k^2} [a_k f_{kj-1} + 2b_k f_{kj} + a_k f_{kj+1}^*],$$

$$a_k = 1 - \frac{\sin \Theta_k}{\Theta_k}, \quad b_k = \frac{\sin \Theta_k}{\Theta_k} - \cos \Theta_k.$$

В заключение заметим, что рассмотренный подход к построению численных методов допускает и другие способы аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобков В. В.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1967, № 4, с. 27.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М., 1973, т. 1.
3. Николаева М. В.— Труды Ин-та математики имени В. И. Стеклова, 1949, т. 28, с. 26.

Поступила в редакцию
15.05.80.

Кафедра вычислительной математики