

разрядов β_{in}^N потребуется $2 + \log_2(k - 1)$ модульных операций, для получения выражений (2) — 1 модульная операция, для выражения (3) — $\log_2 N$ модульных операций, для (4) — $2N - 2$ и для (5) — $1 + \log_2 n$ модульных операций. Итого: $2 + \log_2(k - 1) + 2N + \log_2 N + 2 \log_2 n$ модульных операций, где $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$; k — разрядность s_i .

Следует отметить, что предложенный метод определения мультипликативного переполнения легко перенести как на классическую, так и на нормированную СКВ и систему типа Сасаки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буза М. К. — В сб.: Вопросы кибернетики и математики. — Минск, 1970.
2. Буза М. К., Поснов Н. Н. — Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1970, № 3, с. 23.
3. Торгашев В. А. Система остаточных классов и надежность. — М., 1973.

Поступила в редакцию
25.01.79.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 518:512.25

Л. М. ГОРОДЕЦКИЙ

КВАЗИОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть L_k — некоторое k -мерное подпространство линейного пространства, элементами которого являются векторы-столбцы размерности n , и A — невырожденная $n \times n$ -матрица.

Обозначим через M_k множество невырожденных матриц H_k , удовлетворяющих соотношениям

$$(AH_k - I)F_k = 0, (H_k A - I)F_k = 0, \quad (1)$$

где F_k — матрица размерности $n \times k$, столбцы которой образуют базис пространства L_k . Очевидно, что множество M_k не зависит от выбора базиса в L_k и содержит, по крайней мере, матрицу A^{-1} .

Элементы множества M_k назовем квазиобратными матрицами к A над пространством L_k . В свою очередь, матрица A является квазиобратной к любой $H_k \in M_k$, т. е. введенное соотношение симметрично.

Теорема 1. Если матрица A_k квазиобратна над L_k к некоторой $H_k \in M_k$, то она является квазиобратной к любой матрице из M_k .

Таким образом, операция квазиобращения разбивает все множество невырожденных матриц на пары подмножеств со взаимно квазиобратными элементами.

Пусть $L_k^+ = \{x: x^T y = 0, \forall y \in L_k\}$ и $AL_k = \{x: x = Ay, y \in L_k\}$.

Теорема 2. Для того, чтобы невырожденная матрица H_k являлась квазиобратной к A , необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица W_k , столбцы которой ортогональны проекции AL_k на L_k^+ , такая что

$$H_k = A^{-1} + W_k^T (I - F_k F_k^+). \quad (2)$$

Здесь через F_k^+ обозначена псевдообратная [1] к F_k матрица.

Если $AL_k = L_k$, то множество M_k соответствует множеству невырожденных линейных операторов, сужение которых на L_k совпадает с A^{-1} и, в силу этого [2], все квазиобратные матрицы имеют, по крайней мере, k одинаковых собственных значений.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - H_k f_k, f_k = f(x_k) \quad (3)$$

решения системы линейных уравнений

$$f(x) = Ax - b = 0. \quad (4)$$

Если невырожденные матрицы H_k удовлетворяют условиям

$$H_0 = I, H_k \Delta f_j = \Delta x_j, 0 \leq j < k \leq n, \quad (5)$$

где $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, то такой процесс называется квазиньютоновским [3] и приводит к решению системы уравнений (4), по крайней мере, за $n+1$ шаг при условии линейной независимости векторов Δf_j . Кроме того, $H_n = A^{-1}$. Далее нас будет интересовать возможность получить решение уравнения (4) менее, чем за $n+1$ шаг.

Лемма 1. Если точка x_{k+1} найдена с помощью квазиньютоновского метода (3), (5), то при любом $j \leq k$ справедливо равенство $x_{k+1} = x_j - H_k f_j$. В частности,

$$x_{k+1} = x_0 - H_k f(x_0), \quad (6)$$

и указанный метод можно рассматривать как процесс последовательного нахождения матрицы H_k , совпадающей на векторе f_0 с A^{-1} .

Лемма 2. Произвольный итерационный процесс вида (6) доставляет решение уравнения (4) тогда и только тогда, когда $(AH_k - I)f(x_0) = 0$.

Теорема 3. Если $\Delta x_j = \alpha_0 f_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_{ij} \Delta f_i$, $j = \overline{0, m} \leq k$, то, для того чтобы точка x_{k+1} , полученная в результате квазиньютоновского итерационного процесса (3), (5), являлась решением уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы матрица H_k была квазиобратной к A над линейной оболочкой векторов $f_0, \Delta f_0, \dots, \Delta f_{m-1}$.

Если для нахождения матриц H_k используется итерационное соотношение вида

$$H_k = H_{k-1} + \Delta H_{k-1}, \text{ rang } \Delta H_{k-1} = 1, \quad (7)$$

то справедлива

Теорема 4. Если минимальный анулирующий полином матрицы A относительно вектора b [2] имеет степень k и $x_0 = b$, то итерационный процесс (3), (5), (7) приводит к решению уравнения (4) не более, чем за $k+1$ шаг, а матрицы H_k и A^{-1} имеют при этом, по крайней мере, k общих собственных значений.

Доказательство теоремы основано на том, что матрица ΔH_{k-1} имеет вид $\Delta H_{k-1} = (\Delta x_{k-1} - H_{k-1} \Delta f_{k-1}) g_{k-1}^T$ [4], и все векторы x_j находятся в циклическом пространстве, натянутом на векторы $b, Ab, \dots, A^{k-1}b$.

Теорема 4 показывает, что квазиньютоновские методы численного интегрирования дифференциальных уравнений [5], построенные на основе неявных линейных методов, могут иметь существенно расширенную область устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алберт А. Регрессия, псевдонверсия и рекуррентное оценивание.— М., 1977.
2. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ.— М., 1969.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М., 1975, с. 204.
4. Dennis J. E., More J. J.— SIAM Review, 1977, v. 19, № 1, p. 46.
5. Бобков В. В., Городецкий Л. М.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 1, с. 11.

Поступила в редакцию
07.02.80.

Вычислительный центр

УДК 518:321

В. Н. ШАЛИМА

ДВУХШАГОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим на отрезке $[t_0, T]$ следующую задачу Коши:

$$\ddot{u} + \Omega \dot{u} = F(t_1, \overline{u}^T), \quad (1)$$

$$\overline{u}(t_0) = \overline{u}_0, \quad \dot{\overline{u}}(t_0) = \dot{\overline{u}}_0. \quad (2)$$