УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, В. А. САВЕНКОВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Решение смешанных контактных задач для полосы, опирающейся на жесткое основание, представляет большие математические трудности. Развитию приближенных методов решения таких задач посвящены работы многих авторов. Достаточно полная библиография по этому вопросу содержится в работах [1—3]. Предлагаемый в настоящей статье подход позволяет получить решение ряда контактных задач для полосы в более простой форме.

Пусть упругая изотропная полоса занимает в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ область $S^-(-h<y<0)$; $L(y=0)$ и $L_1(y=-h)$ — верхняя и нижняя границы области S^-; $S^+(0<y<h)$ — область, симметричная с S^- относительно оси x. Предположим, что полоса своей нижней стороной опирается без трения на гладкое жесткое основание. Со стороны контура L в полосу вдавливается силой P штамп с гладким плоским основанием. Трение на участке $L'(|x|\leqslant a)$ контакта штампа с полосой и внешняя нагрузка на остальной части $L''(|x|>a)$ контура L отсутствуют. Штамп, внедряясь в полосу, перемещается поступательно.

Для решения задачи воспользуемся формулами [4]:

$$\sigma_x+\sigma_y=2\,[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}], \tag{1}$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)-\Phi(\bar{z})+(z-\bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=\varkappa\Phi(z)+\Phi(\bar{z})-(z-\bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{3}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты напряжений; u и v — проекции смещений на оси координат x и y; μ и $\varkappa$ — упругие постоянные материала полосы; $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфная функция, определенная в областях S^- и S^+.

В нашем случае необходимо удовлетворить условиям:

$$\sigma_y=\tau_{xy}=0 \text{ на } L'' \text{ и } \tau_{xy}=0,\ v=\text{const на } L'; \tag{4}$$

$$\tau_{xy}=v=0 \text{ на } L_1. \tag{5}$$

При этом будем считать, что функция $\Phi(z)$ на концах отрезка L' имеет особенность порядка

$$|\Phi(z)|=c|z\pm a|^{-1/2}+O(1),\ c>0. \tag{6}$$

Очевидно, что условия (4) и (5) выполняются, если функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered}\Phi^-(t_0)-\Phi^+(t_0)=0 \text{ на } L'',\\ \operatorname{Im}[\Phi^-(t_0)-\Phi^+(t_0)]=0 \text{ на } L',\\ \operatorname{Im}[\varkappa\Phi^-(t_0)+\Phi^+(t_0)]=0 \text{ на } L';\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}[\Phi(t)-\Phi(\bar{t})-2ih\,\overline{\Phi'(t)}]=0 \text{ на } L_1,\\ \operatorname{Im}[\varkappa\Phi(t)+\Phi(\bar{t})+2ih\,\overline{\Phi'(t)}]=0 \text{ на } L_1,\end{gathered} \tag{8}$$

где $\Phi^-(t_0)$ и $\Phi^+(t_0)$ — предельные значения функции $\Phi(z)$ на L со стороны областей S^- и S^+ соответственно, $t_0=x$, $t=x-ih$, $\bar{t}=x+ih$.

Предположим, что

$$\begin{gathered}\Phi(z)=C_0\left[\frac{i\gamma}{X_0(z)}+\Omega_0(z)\right](z\in S^-),\\ \Phi(z)=C_0\left[\frac{i\gamma}{X_0(z)}+\Omega_0(z)+\Omega_1(z)\right](z\in S^+),\end{gathered} \tag{9}$$

где $\Omega_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L''}\frac{\gamma\varphi(\tau)\,d\tau}{\operatorname{th}\gamma(\tau-z)}$, $\Omega_1(z)=-\frac{X_0(z)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\psi(\tau)\,d\tau}{N(\tau)\operatorname{th}\xi}$,

$$X_0(z)=\sqrt{\operatorname{sh}\gamma(z+a)\operatorname{sh}\gamma(z-a)},\quad \gamma=\frac{\pi}{2h},$$

$$N(\tau)=\sqrt{\operatorname{ch}\gamma(\tau+a)\operatorname{ch}\gamma(\tau-a)},\ \xi=\gamma(\tau-z+ih),$$

$\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ — произвольные вещественные функции, удовлетворяющие условию Гельдера; C_0 — произвольная вещественная постоянная.

Поскольку $X_0(z)$ многозначная функция, зафиксируем ту ее ветвь, для которой

$$X_0^+(x)=-X_0^-(x)=iR_1(x)\ \text{на}\ L',$$

$$X_0^+(x)=X_0^-(x)=R_2(x)\ \text{на}\ L'',$$

где $R_1(x)=\sqrt{\operatorname{sh}\gamma(a+x)\operatorname{sh}\gamma(a-x)}$, $R_2(x)=\varepsilon\sqrt{\operatorname{sh}\gamma(x+a)\operatorname{sh}\gamma(x-a)}$, $\varepsilon=1$ для $x>a$ и $\varepsilon=-1$ для $x<a\,(a>0)$.
При этом в точках $z=t=x-ih$ на L_1

$$X_0(t)=-X_0(\bar t)=-iN(x).$$

Нетрудно убедиться, что выражения (9) удовлетворяют всем условиям (7), если

$$\varphi(x)=-\frac{R_2(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\psi(\tau)\,d\tau}{N(\tau)\operatorname{cth}\gamma(\tau-x)}. \tag{10}$$

При $z\to t$ на L_1 выражения ξ и $\bar\xi$ стремятся к $\tau-x$ на некоторой вещественной оси со стороны их положительной и отрицательной мнимых частей. Следовательно, применяя к функции $\Omega_1(z)$ формулы Сохоцкого, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=C_0\left[-\frac{\gamma}{N(x)}+I_1(x)\right],\\ \Phi(\bar t)&=C_0\left[\frac{\gamma}{N(x)}+I_1(x)+i\psi(x)-I_2(x)\right],\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$I_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{L''}\frac{\gamma\varphi(\lambda)\,d\lambda}{\operatorname{cth}\gamma(\lambda-x)},\quad I_2(x)=\frac{N(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\psi(\tau)\,d\tau}{N(\tau)\operatorname{th}\gamma(\tau-x)}. \tag{12}$$

Требуя, чтобы выражения (11) удовлетворяли условиям (8), получим

$$\psi(x)+2h\frac{d}{dx}I_1(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{N(x)}\right). \tag{13}$$

С учетом (10) и (12) равенство (13) представляет собой интегральное уравнение относительно функции $\psi(x)$. Зная ее выражение, значения σ_y на L_1 и L' найдем по формулам:

$$\sigma_y=C_0\left[-\frac{2\gamma}{N(x)}+I_2(x)\right]\ \text{на}\ L_1,$$

$$\sigma_y=-C_0\left[\frac{2\gamma}{R_1(x)}-\frac{R_1(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\psi(\tau)d\tau}{N(\tau)\operatorname{cth}\gamma(\tau-x)}\right]\ \text{на}\ L'.$$

Постоянная C_0 определяется из условия равновесия штампа: $\int_{-a}^{a}\sigma_y dx=-P$.

Если в формулах (9) положить $\Omega_1(z)=\frac{-X_0(z)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\psi(\tau)\,d\tau}{N(\tau)\operatorname{sh}\xi}$, то уравнение (13) преобразуется к виду:

$$\frac{N(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\psi(\tau)\,d\tau}{N(\tau)\operatorname{sh}\gamma(\tau-x)}-2h\frac{d}{dx}I_1(x)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{N(x)}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М., 1974.
2. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости.— М., 1977.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости.— М., 1953.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— Изд. 5-е.— М., 1966.

Поступила в редакцию 13.12.79.

Кафедра теоретической механики

УДК 517.5

А. С. ГАХОВИЧ

ОРИГИНАЛЫ ЛАПЛАСА — ЭЙЛЕРА СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ЦЕЛОГО ТИПА В НУЛЕ

Формальное видоизменение метода Лапласа — Эйлера на случай функций со степенной особенностью в нуле позволило упростить процедуру получения изображения [1]. Это вполне естественно, поскольку для сравнительно узкого класса функций можно построить преобразование, которое наиболее полно соответствует данному классу и не претендует на более широкое использование. Между тем предложенное преобразование оказалось непригодным при работе с оригиналами со степенной особенностью целого типа в нуле. Это приводит к необходимости искать новые модификации преобразования Лапласа — Эйлера, способные справиться с возникшей трудностью. Оказывается, привлечение дополнительных соображений, использующих, например, понятие регуляризации по Адамару, позволяет расширить сферу приложения операционного исчисления за счет указанных функций.

Пусть функция $f(t)$ имеет вид:

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t^n} \ln^k t \, (k = 0,\ 1, \ldots ;\ n = 1,\ 2, \ldots), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — аналитическая в нуле функция. Для функций вида (1) рассмотрим интеграл $F(z,\ s) = \int\limits_0^\infty t^s f(t)\, e^{-zt} dt$. В данном случае изображение Лапласа—Эйлера функции $f(t)$ нельзя определить как предел $\lim\limits_{s\to 0} F(z,s)$, поскольку функция $F(z,\ s)$ не аналитична по переменной s в окрестности нуля [1], точнее, имеет полюс $k+1$-го порядка, поэтому здесь необходим иной подход.

Определение 1. Изображением Лапласа—Эйлера функции $f(t)$ вида (1) назовем функцию комплексного переменного $F(z)$: $F(z) = \lim\limits_{s\to 0} F_{(0)}(z,\ s) + F_1(z) = F_0(z) + F_1(z)$, где $F_{(0)}(z,\ s)$ означает регулярную часть функции $F(z,\ s)$ по переменной s в окрестности нуля, а $F_1(z)$ — произвольная функция, на которую ниже будут наложены определенные условия.

Замечание. Предложенный прием получения изображения является модификацией адамаровского метода регуляризации расходящихся интегралов применительно к расходящемуся интегралу вида

$$\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt.$$

Из определения 1 следует существование изображения Лапласа — Эйлера любой функции рассматриваемого класса. Остается открытым лишь вопрос относительно выбора функции $F_1(z)$. Очевидно, правило выбора $F_1(z)$ должно гарантировать ее единственность и удовлетворять каким-то естественным требованиям, вытекающим из природы исследуемого предмета.

Для обоснования правила выбора функции $F_1(z)$ рассмотрим функ-