ЛИТЕРАТУРА

1. Воскресенский А. Д., Вентцель М. Д.— Проблемы космической биологии, 1974, т. 26.
2. Численные методы анализа случайных процессов.— М., 1976.
3. Чернышев М. К. Резонансно-поисковые методы анализа скрытых колебательных процессов в живых системах. Теоретические и прикладные аспекты анализа временной организации биосистем.— М., 1976.

Поступила в редакцию 15.11.79.

Вычислительный центр

УДК 517.9

А. А. ЛЕВАКОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $T=[t_0, t_1]$ — отрезок в R; μ — мера Лебега на T; $S(x_0, r)$ — открытый шар в E радиуса r с центром в точке x_0. Через $\varkappa$ обозначим множество всех непустых замкнутых (не обязательно выпуклых и компактных) подмножеств E, а через $\alpha(A, B)$ — отклонение по Хаусдорфу множеств $A\in\varkappa$ и $B\in\varkappa$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x}\in F(t, x), \quad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

где $x\in S(x_0, r)$, $F:T\times S(x_0, r)\to\varkappa$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке (t, x) множество $F(t, x)\in\varkappa$. Решением задачи (1) считаем всякую абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, определенную на некотором отрезке $[t_0, t^*]=T_1\subset T$ и удовлетворяющую соотношению $x(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\mu$, где $v(\cdot)$ — интегрируемая по Бохнеру на T_1 функция такая, что $v(t)\in F(t, x(t))$ почти при всех $t\in T_1$

Укажем условия, при которых существует решение задачи (1).

Теорема 1. Пусть отображение $F:T\times S(x_0, r)\to\varkappa$ удовлетворяет условиям:

а) измеримо по t при каждом x [1];

б) существует интегрируемая по Лебегу функция $k(\cdot):T\to R$ такая, что $\alpha(F(t, x), F(t, y))\leqslant k(t)\|x-y\|$ для всех $t\in T$, $x\in s(x_0, r)$, $y\in S(x_0, r)$ ($\|\cdot\|$ — норма в E);

в) функция $t\to\rho(0, F(t, x_0))$ интегрируема по Лебегу на T (0 — нулевой элемент E, ρ — расстояние в E).

Тогда задача (1) имеет решение.

В следующей теореме устанавливаются условия, при которых решения задачи (1) непрерывно зависят от начальных условий и правой части дифференциального включения. Наряду с задачей (1) рассмотрим возмущенную задачу

$$\dot{x}\in F_1(t, x), \quad x(t_0)=x_0', \tag{2}$$

$$\alpha(F_1(t, x), F(t, x))\leqslant\delta, \ t\in T, \ x\in S(x_0, r), \ \|x_0-x_0'\|\leqslant\delta.$$

Теорема 2. Пусть $x(\cdot):T_1\to E$ решение задачи (1). Предположим, что отображение F_1 удовлетворяет условиям а), б). Тогда существует $\delta_0>0$ такое, что для любого $\delta\leqslant\delta_0$ существует решение $x_1(\cdot):T_1\to E$ задачи (2), удовлетворяющее условиям $\|x(t)-x_1(t)\|\leqslant\delta L$, $t\in T_1$, $\|\dot{x}(t)-\dot{x}_1(t)\|\leqslant(k(t)L+1)\delta$ почти при всех $t\in T_1$;
здесь

$$L=e^{\int\limits_{t_0}^{t^*}k(\tau)d\mu}+\int\limits_{t_0}^{t^*}e^{\int\limits_{\tau}^{t^*}k(s)d\mu}\,d\mu.$$

Доказательство теорем 1 и 2 в основном аналогично доказательству предложения 1 из [5] и следствия из этой же работы. Далее устанавливается связь между решениями задачи (1) и следующей задачи:

$$\dot{x}\in \overline{\mathrm{conv}}\, F(t, x),\ x(t_0)=x_0, \tag{3}$$

где $\overline{\mathrm{conv}}\, F(t, x)$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $F(t, x)$.

Теорема 3. Пусть $\tilde{x}(\cdot):T_1\to E$ — решение задачи (3). Предположим, что отображение $F:T\times S(x_0, r)\to \varkappa$ удовлетворяет условиям а), б) и $\|v\|\leqslant M$ для всех $v\in F(t, x)$, $t\in T$, $x\in S(x_0, r)$. Тогда существует последовательность решений $(x_n(\cdot))$ задачи (1), равномерно сходящаяся на T_1 к $\tilde{x}(\cdot)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу о минимуме интеграла $I(x(\cdot), u(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t^*}(u(\tau)+x(\tau))\,d\mu$ на совокупности пар $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $x(\cdot):T_1\to E$ и $u(\cdot):T_1\to E$ — соответственно сильно непрерывная и измеримая функции, удовлетворяющие условиям $\dot{x}(t)=u(t)$ и $u(t)\in F(t, \tilde{x}(t))$ почти при всех $t\in T_1$, $x(t_0)=x_0$. Сформулированная задача является частным случаем задачи (2.11)—(2.14) [4]. Согласно лемме 2.2 [4], существует последовательность $(u_n(\cdot))$ функций такая, что $\|\tilde{x}(t)-x_0-\int\limits_{0}^{t}u_n(\tau)\,d\mu\|\to 0$ равномерно на T_1, $u_n(t)\in F(t, \tilde{x}(t))$ почти при всех $t\in T_1$. Пусть $\tilde{x}_n(t)=x_0+\int\limits_{t_0}^{t}u_n(\tau)\,d\mu$. Тогда $\|\tilde{x}_n(t)-\tilde{x}(t)\|\to 0$ равномерно на T_1.

Для каждой функции $\tilde{x}_n(\cdot)$ существует решение $x_n(\cdot)$ задачи (1) такое, что

$$\|x_n(t)-\tilde{x}_n(t)\|\leqslant\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int\limits_{\tau}^{t}k(s)d\mu}k(\tau)\|\tilde{x}(\tau)-\tilde{x}_n(\tau)\|\,d\mu. \tag{4}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2. Из (4) следует, что $\|x_n(t)-\tilde{x}(t)\|\to 0$ равномерно на T_1. Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что пространство E^*, сопряженное к E, является сепарабельным.

Теорема 4. Пусть последовательность $(x_n(\cdot))$ решений задачи (1) равномерно сходится на T_1 к функции $x(\cdot)$. Предположим, что множество $Q=\{v\in E\,|\,v\in F(t, x(t)),\ t\in T_1\}$ относительно слабо компактно и многозначное отображение F удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при каждом $t=T_1$ и при каждом y, $\|y-x(t)\|\leqslant\delta$, выполняется соотношение $[F(t, x(t))]_\varepsilon\supset F(t, y)$ ($[A]_\varepsilon$ — замкнутая ε-окрестность множества A).

Доказательство. Покажем, что $(x(\cdot))$ имеет почти при всех $t\in T_1$ слабую производную. Из условий теоремы и из теоремы 2.9.1 [3] вытекает существование постоянной M такой, что $\|x_n(t_2)-x_n(t_1)\|\leqslant M\cdot|t_2-t_1|$ для всех t_1, $t_2\in T_1$ и всех достаточно больших n. Отсюда следует, что функции $x^*(x(\cdot))$ абсолютно непрерывны при всех $x^*\in N$, где N счетное всюду плотное подмножество E^*. Существует множество P, $\mu(P)=\mu(T_1)$, что для всех $\tilde{t}\in P$ существует предел $\lim\limits_{t\to\tilde{t}}\frac{x^*(x(t)-x(\tilde{t}))}{t-\tilde{t}}$ для всех $x^*\in N$. Возьмем последовательность $\varepsilon_i\to 0$, $\varepsilon_i>0$. Так как $x_n(\cdot)$ — решение задачи (1), то легко видеть, что при каждом i

$\frac{x_n(t) - x_n(\tilde{t})}{t - \tilde{t}} \in \overline{\text{conv}}\, [Q]_{\varepsilon_i}$ для всех достаточно больших n. Отсюда вытекает соотношение $\frac{x(t) - x(\tilde{t})}{t - \tilde{t}} \in \overline{\text{conv}}\, Q$. Возьмем последовательность $t_m \to \tilde{t}$, $t_m > \tilde{t}$. В силу теоремы 2.9.5 [3] множество $\overline{\text{conv}}\, Q$ слабо компактно. Поэтому из последовательности $\frac{x(t_m) - x(\tilde{t})}{t_m - \tilde{t}}$ можно извлечь подпоследовательность $\frac{x(t_{m_k}) - x(\tilde{t})}{t_{m_k} - \tilde{t}}$, слабо сходящуюся к некоторому пределу $y(\tilde{t})$. Таким образом,

$$\lim_{t \to \tilde{t}} \frac{x^*(x(t) - x(\tilde{t}))}{t - \tilde{t}} = \lim_{k \to \infty} \frac{x^*(x(t_{m_k}) - x(\tilde{t}))}{t_{m_k} - \tilde{t}} = x^*(y(\tilde{t})) \tag{5}$$

для всех $x^* \in N$. Из (5) следует, что функция $t \to \begin{cases} y(t), & t \in P, \\ 0, & t \in T_1 \setminus P, \end{cases}$ почти при всех $t \in T_1$ является слабой производной функции $x(\cdot)$. Согласно теореме 3.8.6 [3],

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\mu. \tag{6}$$

Покажем, что

$$y(t) \in \overline{\text{conv}}\, F(t, x(t)) \text{ почти при всех } t \in T_1. \tag{7}$$

Допустим, что существует множество W положительной меры, на котором соотношение (7) не выполняется. Тогда из теоремы Хана — Банаха следует, что для каждого $t \in W$ существует элемент $x^* \in N$ такой, что $x^*(y(t)) > \sup\limits_{a \in \overline{\text{conv}}\, F(t, x(t))} x^*(a)$. Отсюда вытекает существование подмножеств $W_1 \subset W$, $\mu(W_1) > 0$ натурального числа k_0 и элемента $\bar{x}^* \in N$ таких, что $\bar{x}^*(y(t)) > \bar{x}^*(\dot{x}_n(t)) + \frac{1}{k_0}$, $t \in W_1$, для всех достаточно больших n. Отсюда имеем $\int_{W_1} \bar{x}^*(y(t))\, d\mu > \int_{W_1} \bar{x}^*(\dot{x}_n(t))\, d\mu + \frac{1}{k_0} \mu(W_1)$, что противоречит равномерной сходимости $x_n(\cdot)$ к $x(\cdot)$. Из соотношений (6), (7) следует, что $x(\cdot)$ решение задачи (3).

Замечание. Результаты работы примыкают к исследованиям, приведенным в статье [6]. Теоремы 1—4 пересекаются с теоремами 1.1, 2.1, 3.1 [6], однако, не следуют из них. Основное отличие состоит в том, что в заметке не предполагается компактность множества $F(t, x)$ при каждых (t, x), что существенно используется в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Д., Левин В. Л.— Труды Моск. мат. об-ва, 1972, т. 26, с. 3.
2. Филиппов А. Ф.— Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.. 1967, № 3, с. 16.
3. Халле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М., 1962.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.— УМН, 1968, т. 23, вып. 6, с. 51.
5. Леваков А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 2, с. 33.
6. Толстоногов А. А.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 1, с. 42.

Поступила в редакцию
27.11.79.

Кафедра высшей математики ФПМ