

{гипонормальные операторы} \subset {коквазигипонормальные операторы}.

В силу изложенного для доказательства достаточности построить пример (ко)квазигипонормального оператора, не являющегося гипонормальным. Пусть \mathbf{H} -гильбертово пространство вида $\mathbf{H} = K_1 \dot{+} K_2 \dot{+} \dots$, где $K_i = K$ — гильбертово пространство размерности 2, со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n), \text{ где } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2 < \infty, x_n, y_n \in K.$$

По заданным положительным операторам A и B определим оператор T_{AB} на \mathbf{H} :

$$T_{AB}(x_1, x_2, \dots) = (0, Ax_1, \dots, Ax_n, Bx_{n+1}, Bx_{n+2}, \dots).$$

Прямыми вычислениями нетрудно показать, что оператор T_{AB} гипонормален тогда и только тогда, когда $B^2 \geq A^2$, квазигипонормален тогда и только тогда, когда $AB^2A \geq A^4$ и коквазигипонормален тогда и только тогда, когда $B^4 \geq BA^2B$. Пример квазигипонормального не гипонормального оператора T_{AB} строится с помощью матриц A и B вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы построить пример коквазигипонормального не гипонормального оператора T_{AB} можно рассмотреть A и B вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эти примеры показывают, что ни класс квазигипонормальных операторов, ни класс коквазигипонормальных операторов не содержатся друг в друге.

Теорема 6. Пусть T — коквазигипонормальный оператор. Если подпространство M гильбертова пространства \mathbf{H} приводит оператор T , то T/M — коквазигипонормальный оператор. Если, кроме того, $T^*(M) = M$, то T/M — гипонормальный.

Доказательство очевидно. Эта теорема справедлива и для квазигипонормального оператора T [4], если вместо условия $T^*(M) = M$ положить $T(M) = M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kubo F.— Math. Japonicae, 1976, v. 21, № 1, p. 23.
2. Kato Y., Nishitani I.— Math. Japonicae, 1976, v. 21, № 2, p. 121.
3. Fujii M., Kajiwara M., Kato Y., Kubo F. Ibid., p. 117.
4. Sheth I. H.— Rev. roum. math. pures et appl., 1974, v. 19, № 8, p. 1049.
5. Stampfli J. G.— Pacif. J. Math., 1962, v. 12, p. 1453.
6. Shah N. C., Sheth I. H.— J. Indian Math. Soc., 1975, v. 39, p. 285.
7. Fujii M., Nakatsu Y.— Proc. Japan Acad., 1975, v. 51, № 4, p. 243.

Поступила в редакцию
13.06.79.

Кафедра функционального анализа

УДК 681.3.01

С. П. АНТОНОВИЧ, А. П. ГРИШАНОВИЧ,
Т. И. КОЛЕСНИК, Н. И. ОРЕХОВ

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Циклические и медленно меняющиеся систематические составляющие временного ряда, иначе тренды, в общем виде могут быть описаны конечной суммой синусоидальных компонент. Интервалограмма электрокардиосигнала, взятая как дискретная реализация хронотропной функции сердца, представляет собой сумму трендов различной частоты и случайной составляющей, значениями которой могут быть погрешности измерения, ошибки обработки и т. д. Выделение этих трендов и определе-

ние их параметров позволит оценить влияние различных функциональных ритмов организма и его систем на работу сердца.

Одним из конкретных способов выделения скрытого гармонического тренда является сглаживание дискретного временного ряда с последующим построением автокорреляционной функции (АКФ) [1].

Сглаживание, или цифровая фильтрация, обычно производится методом скользящего среднего, основанном на преобразовании [2]:

$$Y_k(t, N) = \frac{1}{2M+1} \sum_{s=-M}^M X_{k-s}(t), \quad (1)$$

где Y_k — сглаженный ряд; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-M)$; X_k — исходный ряд; n — число дискретных отсчетов X_k ; $N=2M+1$ — величина пробного периода, заданная в интервалах ряда.

Влияние процесса сглаживания на частоту выявляемого тренда временного ряда определяется частотной характеристикой преобразования:

$$R(\omega, N) = \frac{\sin\left(\omega N \frac{\Delta t}{2}\right)}{N \sin\left(\omega \frac{\Delta t}{2}\right)}, \quad (2)$$

где ω — циклическая частота тренда; Δt — длительность интервала отсчета.

Последовательно вычитая сглаженные ряды из исходного, выделяем колебания с частотами, лежащими внутри выбранных нами полос пропускания цифровых фильтров. Чтобы определить точную частоту выделенных трендов, для каждого отфильтрованного временного ряда обычно строится нормированная АКФ. Если на интервалограмме отфильтрованного ряда имеются скрытые колебания, то АКФ значительно усиливает их. Период колебания АКФ равен периоду тренда.

К сожалению, АКФ не может быть использована при анализе нестационарных процессов, к которым принадлежит абсолютное большинство ритмограмм сердца. Практически любой отрезок ритмограммы включает в себя нестационарные процессы нескольких типов. При наложении некоторых ограничений периодические тренды нестационарного процесса можно рассматривать как относительно периодические [3]. Более строгие ограничения на изменчивость статистических характеристик дают почти периодические тренды или периодические тренды квазистационарного процесса, и, наконец, совсем жесткие ограничения позволяют считать процесс стационарным, а тренд — периодическим. Для анализа нестационарных процессов без наложения ограничений нами разработан метод скользящей корреляционной функции (СКФ) и создана программа для ЭВМ ЕС-1022.

Идея метода заключается в построении корреляционной функции, использующей «окно», скользящее вдоль интервалограммы с постоянным лагом в один интервал отсчета. Для каждого сдвига окна относительно начала интервалограммы вычисляется серия коэффициентов корреляции между отрезком интервалограммы, заключенным в пределах окна, и отрезком внутри того же окна, но сдвигающегося на последовательно возрастающее число интервалов. Каждый коэффициент корреляции возводится в квадрат и фиксируется относительно номера интервала.

Число корреляционных серий будет: $P=M-N$, где M — общее число интервалов; N — ширина окна в интервалах отсчета.

В дальнейшем квадраты коэффициентов корреляции, принадлежащие разным сериям, но фиксированные относительно одного номера интервала, суммируются и усредняются. Для каждого номера интервала коэффициент корреляции будет пробегать все значения от минимума до максимума. Величина суммарного коэффициента корреляции будет пропорциональна степени гармоничности выделяемого тренда.

Вычислим СКФ для правильной синусоиды. Коэффициент корреляции для дискретных рядов вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}) \cdot (Z_i - \bar{Z})}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_z}, \quad (3)$$

где \bar{X} и \bar{Z} — оценки математических ожиданий процессов X и Z ; σ_x и σ_z — оценки средних квадратических отклонений.

Если дискретный ряд образуется правильной синусоидой, то $X_i = \sin(t_i)$, $Z_i = \sin(t_i + \varphi_i)$, где ряд Z_i получается при сдвиге ряда X_i на конкретную величину φ_i .

Тогда можно показать, что $r = a \cdot \cos(\varphi_i)$ или $R = a \cdot \cos \varphi$, где φ пробегает все значения φ_i при изменении i ; a — константа, которая тем ближе к единице, чем меньше Δt .

Для нормировки СКФ преобразуем R к виду: $R_{\text{норм}} = 2R^2 = 2 \cos^2 \varphi = 2 \cos^2(t + \varphi_0)$, где $\varphi_0 = \pi k/n$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Вычислим СКФ, суммируя $R_{\text{норм}}$, фиксированные относительно одного номера интервала: $R_{\text{сум}} = \sum_{k=1}^n R_{\text{норм}} = 2 \sum_{k=1}^n \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right)$.

$$\text{Преобразуем сумму в два ряда: } R_{\text{сум}} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + 2 \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right).$$

$$\text{Введем } i = k - \frac{n}{2}, \text{ тогда: } R_{\text{сум}} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n/2} \cos^2\left[t + \frac{\pi(i+n/2)}{n}\right] = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n/2} \sin^2\left(t + \frac{\pi i}{n}\right), \text{ где } k = 1, 2, 3 \dots n/2; i = 1, 2, 3 \dots n/2.$$

$$\text{Заменим } i = k: R_{\text{сум}} = 2 \sum_{k=1}^{n/2} \left[\cos^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) + \sin^2\left(t + \frac{\pi k}{n}\right) \right] = 2 \sum_{k=1}^{n/2} 1 = n.$$

Усредним $R_{\text{сум}}$ по n : $R_{\text{сред}} = \text{СКФ} = n/n = 1$.

Таким образом, $r_{\text{скф}}$ для правильной синусоиды не зависит от ее параметров и равен единице для всех номеров интервалов. В случае, когда исследуемая синусоида медленно меняет частоту, выходя за пределы полосы пропускания сглаживающего фильтра, значения СКФ будут уменьшаться, достигая нуля. Соответственно соседний фильтр зарегистрирует постепенное появление СКФ, ее возрастание до определенного значения и стабилизацию на этом уровне.

Итоговую кривую можно назвать функцией квазипериодичности (ФКП), так как в местах интервалограммы, где характер тренда наиболее близок к периодичному, кривая будет иметь максимум; в местах, где тренд менее периодичен, значения функции будут уменьшаться; и там, где периодичность будет отсутствовать, значения будут равны нулю.

Нестационарность процесса никак не скажется на амплитуде ФКП, поскольку фазовые изменения корреляционной функции нестационарного процесса автоматически стремятся к нулю при сдвиге окна вдоль ряда.

Для определения точного периода тренда достаточно построить корреляционную функцию для окна, в центре которого наблюдается локальный максимум ФКП (фиксированное окно) и окна, скользящего вдоль ряда от начала фиксированного окна до его конца.

На ширину окна должно быть наложено следующее требование: $N \cdot f_j \gg 1$, где f_j — основная (средняя) частота сглаживающего фильтра j . В общем случае лаг окна не равен лагу корреляционной функции.

Блок-схема программы на языке ФОРТРАН, реализующей метод выделения тренда нестационарных процессов, показана на рис. 1.



Рис. 1. Блок-схема выделения тренда нестационарного процесса

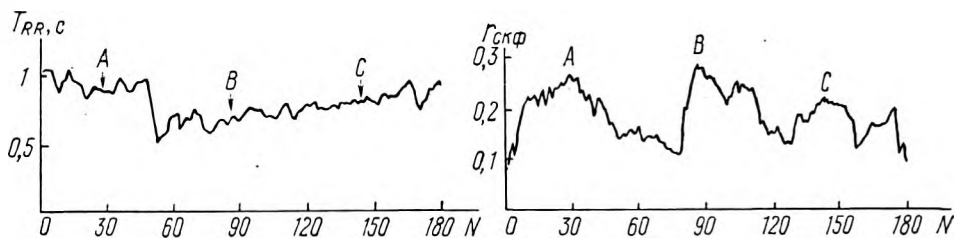


Рис. 2. Интервалограмма ритма сердца:

A, B, C — участки наибольшей гармоничности дыхательного ритма

Рис. 3. Кривая ФКП для фильтра дыхательных частот:

A, B, C — точки локальных максимумов

На рис. 2 показан пример исходного ряда длительностей интервалов кардиосигнала (T), характеризующегося выраженной дыхательной аритмией на фоне переходного процесса.

На рис. 3 изображена кривая ФКП для цифрового фильтра с полосой пропускания от 1 до 0,15 Гц. Ширина окна для этого фильтра выбрана равной 20 интервалам, точный период тренда — 5,4 с. Общее машинное время выполнения программы 50 с.

Анализ метода СКФ и пример его применения позволяет сделать следующие выводы.

1. Сглаживание реального временного ряда с последующим вычислением СКФ дает возможность выделить тренды ряда, участки нестационарности и оценить степень этой нестационарности.

2. Описанный метод пригоден для статистической обработки временных рядов физиологических данных, характеризующихся наличием нестационарности.

3. Метод СКФ может быть применен для диагностики некоторых заболеваний, в частности, болезней сердечно-сосудистой системы.

Дальнейшее развитие этого метода предполагает рассмотрение скользящих кросскорреляционной и спектральных функций, а также обобщение метода на многомерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воскресенский А. Д., Вентцель М. Д.—Проблемы космической биологии, 1974, т. 26.
2. Численные методы анализа случайных процессов.— М., 1976.
3. Чернышев М. К. Резонансно-поисковые методы анализа скрытых колебательных процессов в живых системах. Теоретические и прикладные аспекты анализа временной организации биосистем.— М., 1976.

Поступила в редакцию
15.11.79.

Вычислительный центр

УДК 517.9

А. А. ЛЕВАКОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство; $T = [t_0, t_1]$ — отрезок в R ; μ — мера Лебега на T ; $S(x_0, r)$ — открытый шар в E радиуса r с центром в точке x_0 . Через κ обозначим множество всех непустых замкнутых (не обязательно выпуклых и компактных) подмножеств E , а через $\alpha(A, B)$ — отклонение по Хаусдорфу множеств $A \in \kappa$ и $B \in \kappa$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in S(x_0, r)$, $F: T \times S(x_0, r) \rightarrow \kappa$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке (t, x) множество $F(t, x) \in \kappa$. Решением задачи (1) считаем всякую абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, определенную на некотором отрезке $[t_0, t^*] = T_1 \subset T$ и удовлетворяющую со-

отношению $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\mu$, где $v(\cdot)$ — интегрируемая по Бохнеру

на T_1 функция такая, что $v(t) \in F(t, x(t))$ почти при всех $t \in T_1$.

Укажем условия, при которых существует решение задачи (1).

Теорема 1. Пусть отображение $F: T \times S(x_0, r) \rightarrow \kappa$ удовлетворяет условиям:

- а) измеримо по t при каждом x [1];
- б) существует интегрируемая по Лебегу функция $k(\cdot): T \rightarrow R$ такая, что $\alpha(F(t, x), F(t, y)) \leq k(t) \|x - y\|$ для всех $t \in T$, $x \in S(x_0, r)$, $y \in S(x_0, r)$ ($\|\cdot\|$ — норма в E);
- в) функция $t \rightarrow \rho(0, F(t, x_0))$ интегрируема по Лебегу на T (0 — нулевой элемент E , ρ — расстояние в E).

Тогда задача (1) имеет решение.

В следующей теореме устанавливаются условия, при которых решения задачи (1) непрерывно зависят от начальных условий и правой части дифференциального включения. Наряду с задачей (1) рассмотрим возмущенную задачу

$$\dot{x} \in F_1(t, x), \quad x(t_0) = x'_0, \quad (2)$$

$$\alpha(F_1(t, x), F(t, x)) \leq \delta, \quad t \in T, \quad x \in S(x_0, r), \quad \|x_0 - x'_0\| \leq \delta.$$

Теорема 2. Пусть $x(\cdot): T_1 \rightarrow E$ решение задачи (1). Предположим, что отображение F_1 удовлетворяет условиям а), б). Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \leq \delta_0$ существует решение $x_1(\cdot): T_1 \rightarrow E$ задачи (2), удовлетворяющее условиям $\|x(t) - x_1(t)\| \leq \delta L$, $t \in T_1$, $\|\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq (k(t)L + 1)\delta$ почти при всех $t \in T_1$;

здесь

$$L = e^{\int_{t_0}^{t^*} k(\cdot) d\mu} + \int_{t_0}^{t^*} e^{\int_{t_0}^s k(\cdot) d\mu} d\mu.$$

Доказательство теорем 1 и 2 в основном аналогично доказательству предложения 1 из [5] и следствия из этой же работы. Далее