



ВЕСТНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 1
ЯНВАРЬ



СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Анищик В. М., Гуманский Г. А., Драко В. М.</i> Изменение электросопротивления имплантированных пленок меди и железа при отжиге	3
<i>Прима А. М., Прима В. М.</i> Применимость модели эффективных зарядов и отношение интенсивностей полос в ИК спектрах, обусловленных валентными и деформационными колебаниями	6
<i>Агранов Г. А., Зайцева А. М., Коренная Л. И., Соболев В. С.</i> Исследование алгоритмов сокращения информации при использовании преобразований Уолша—Адамара	10
<i>Личко Г. П.</i> Быстрое преобразование Фурье больших массивов	14
<i>Зятков И. П., Князевич Н. Д., Сагайдак Д. И., Парфианович Н. В.</i> Роль весовой функции и фонового вклада в формировании кривой ошибок при количественном анализе по спектрам поглощения	17
<i>Коляда А. А.</i> Структура быстродействующих АУ в обобщенных СОК	19
<i>Громенко Г. И., Лойко В. И., Некрашевич И. Г.</i> Зависимость распределения напряжений от природы изгибающих сил в двухслойных системах	25
<i>Граков В. Е., Майга А. С.</i> Влияние продольного магнитного поля на катодное падение потенциала и устойчивость электрических вакуумных дуг	27
<i>Данилов В. А., Зенченко С. А., Шаронов Г. В.</i> Спектральные и временные характеристики излучения аргонового лазера в режиме синхронизации мод	31
<i>Фам Чонг Хьен, Ханох Б. Ю., Хапалюк А. П.</i> Особенности генерации в резонаторе с тетраэдрическим призмным отражателем	33

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Громак В. И., Пилипчук Л. А., Бачурина Е. В.</i> О распределении полюсов решения второго уравнения Пенлеве	38
<i>Дробушевич Г. А., То Туан.</i> О структурном программировании на языке Ассемблер	40
<i>Примачук Л. П.</i> Нелинейная задача сопряжения на разомкнутой дуге для двух голоморфных функций	44
<i>Леваков А. А.</i> Зависимость оптимального значения критерия качества от граничных условий	46
<i>Феденя М. М.</i> Об экстремальном возмущении квазихарактеристических чисел и квазимультипликаторов	49
<i>Пыжкова Н. В.</i> Решение проблемы изохронности центра для одной системы нелинейных колебаний	52
<i>Еровенко Л. Д.</i> Об одном алгоритме улучшения допустимых управлений в системах с запаздыванием	55
<i>Журбенко И. Г., Труш Н. Н.</i> Спектральный анализ случайных стационарных процессов	58
<i>Мережа В. Л.</i> К управляемости систем с запаздыванием	61
<i>Давори М. И., Калинин А. И.</i> Об одном необходимом условии оптимальности особых управлений	64

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Афанасьева Г. К., Лебедев В. И., Оранский А. М.</i> К измерению расстояния между точкой и заданной прямой на плоскости	67
<i>Белявский С. С.</i> О периодических перестановочных решениях двух систем дифференциальных уравнений	69
<i>Клевченя А. А.</i> Об одном методе численного решения задачи вытеснения неньютоновской жидкости водой	70
<i>Малыхина Г. И.</i> «Формы строгой науки» Р. Грассмана и их отношение к естественному языку	72

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

<i>Илья Григорьевич Некрашевич. (К 75-летию со дня рождения)</i>	74
<i>Аннотации депонированных статей</i>	75
Иван Иванович Комяк	77

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (*главный редактор*),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (*ответственный секретарь*), В. С. ГРИ-
ГОРЬЕВ, Г. П. ДАВИДЮК, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ
(*зам. главного редактора*), А. С. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУП-
РУН, И Г. ТИЩЕНКО

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (*ответственный редактор*),
Ю. С. БОГДАНОВ (*зам. ответственного редактора*),
В. И. ВЕДЕРНИКОВ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ,
Е. А. ИВАНОВ, В. В. ИЗОХ, Л. И. КОМАРОВ, А. И. КОМЯК,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, И А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ.
Б. Ю. ХАНОХ (*ответственный секретарь*), А. Ф. ЧЕРНЯВ-
СКИЙ, С. С. ШУШКЕВИЧ

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА
Серия I, физ., мат. и мех., 1981, № 1

Редактор *И. П. Стрельченя*
Художественный редактор *Л. Г. Медведева*
Технический редактор и корректор *Г. И. Хмарун*

Сдано в набор 19.09.80. Подписано в печать 04.01.81 г. АТ 18002. Формат
70×108^{1/8}. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,04. Тираж
955 экз. Заказ. 1470.

Издательство Белорусского государственного университета имени
В. И. Ленина, 220048, Минск, Парковая магистраль, 11.

Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, ул. Боб-
руйская, 7, телефон 22-87-54.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП
Белоруссии, 220041, Минск, Ленинский пр., 79.

УДК 537.312

В. М. АНИЩИК, Г. А. ГУМАНСКИЙ, В. М. ДРАКО

ИЗМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОСОПРОТИВЛЕНИЯ ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ПЛЕНОК МЕДИ И ЖЕЛЕЗА ПРИ ОТЖИГЕ

В последнее время ведутся интенсивные исследования электрических свойств тонких металлических пленок при имплантации. Однако процессы, протекающие при отжиге таких пленок, изучены крайне слабо. В данном сообщении приводятся некоторые результаты исследования электросопротивления и структуры пленок меди и железа при изохронном отжиге.

Пленки меди (250—5000 Å) наносили на стеклянные подложки термическим испарением в вакууме 10^{-5} тор, пленки железа (1500—2000 Å) — на ситалловые подложки, подогретые до 300 °С, в вакууме 10^{-6} тор. Имплантацию ионами углерода и висмута с энергиями от 30 до 60 кэВ осуществляли при плотности тока 1—3 мкА/см², имплантацию ионами молекулярного азота энергией 60 кэВ — при 20 мкА/см².

Изохронный отжиг проводили в вакууме 10^{-7} тор, интервалами в 50 °С, начиная с 100 °С, с выдержкой 15 мин при каждой температуре.

Характер кривых изохронного отжига электросопротивления пленок железа, имплантированных ионами азота (рис. 1), резко отличается от кривых для пленок, имплантированных ионами углерода (рис. 2), и пленок меди, имплантированных ионами висмута (рис. 3). В первом случае сравнительно высокое начальное электросопротивление пленок железа, имплантированных азотом, резко убывает при 250 °С, причем для доз $1 \cdot 10^{17}$ ион/см² спад сопротивления идет в два этапа: при 250 и 350 °С. Можно отметить, что до отжига сопротивление образцов сильно зависит от дозы имплантации, после отжига становится практически одинаковым. Высокое сопротивление имплантированных азотом слоев железа, вероятно, обусловлено синтезом некоторых разновидностей нитрида железа в процессе имплантации, при котором может существенно измениться не только подвижность, но и концентрация электронов проводимости. Наличие нитридов в слоях железа, имплантированного азотом, подтверждается электронографически [1]. Спад сопротивления при отжиге может быть следствием распада нитридов из-за их термической неустойчивости. Наличие двух ступенек на кривых изохронного отжига образцов, имплантированных потоком $1 \cdot 10^{17}$ ион/см², указывает на наличие двух модификаций нитрида железа с различной термической устойчивостью.

Начальные значения электросопротивления на кривых изохронного отжига слоев железа, имплантированных ионами углерода (см. рис. 2), сравнительно невелики, причем в отличие от предыдущего случая замечен спад сопротивления при отжиге до 200 °С. Контрольный образец в этом интервале температур не изменяет своего сопротивления. Вероятно, при имплантации углерода в пленке железа образуются радиационные

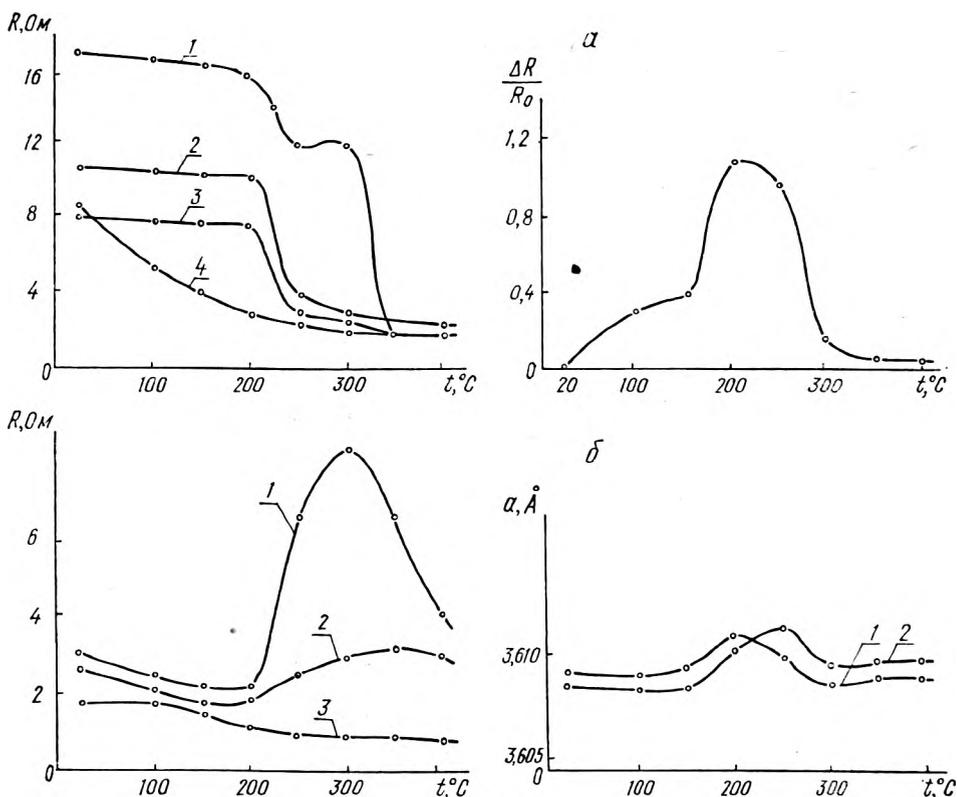


Рис. 1. Зависимость электросопротивления пленок железа, имплантированных ионами молекулярного азота, от температуры изохронного отжига:
1 — 10^{17} ; 2 — $2 \cdot 10^{16}$; 3 — $7 \cdot 10^{15}$ ион/см²; 4 — контрольный образец

Рис. 2. Зависимость электросопротивления пленок железа, имплантированных ионами углерода, от температуры изохронного отжига:
1 — 10^{17} ; 2 — $5 \cdot 10^{16}$ ион/см²; 3 — контрольный образец

Рис. 3. Относительное изменение электросопротивления пленок меди, имплантированных ионами висмута (40 кэВ), от температуры изохронного отжига (а); изменение параметров решетки пленки меди толщиной 5000 Å (б):
1 — образец № 1, 2 — образец № 2

дефекты, отжигающиеся на начальной стадии термообработки. При 250 °С начинается резкий рост сопротивления, которое достигает максимума при 300 °С, а затем уменьшается, особенно сильно для потока $1 \cdot 10^{17}$ ион/см². Электросопротивление имплантированных образцов сохраняет повышенное значение после изохронного отжига вплоть до 400 °С, причем имеется явная зависимость от дозы имплантации. Таким образом, можно предположить, что при имплантации пленок железа ускоренными ионами углерода карбид железа образуется при повышенных температурах, тогда как имплантация при комнатной температуре приводит лишь к насыщению слоя железа внедренными атомами углерода и радиационными дефектами без образования химического соединения. Максимум на кривой изохронного отжига при температурах 250—300 °С может быть обусловлен переходом углерода через мартенситную фазу (ϵ — карбид). Электронографические исследования ионнолегированного углеродом железа [2—4] показывают, что структурные превращения (возможно, образование карбида железа) идут в процессе ионной имплантации. Данные об электрических свойствах имплантированного ускоренными ионами железа в литературе отсутствуют. Можно предположить, что различие в поведении пленок железа, имплантированных углеродом и азотом, обусловлено неодинаковыми условиями имплантации ионами углерода и азота: применялись ионные пучки с существенно

различной плотностью тока. Так, при имплантации слоев железа ионами углерода плотность ионного тока составляла 1—3 мкА/см², при этом не происходило сколько-нибудь заметного разогрева мишени, в ней образовывались и накапливались радиационные дефекты, отжиг которых наблюдался на начальных участках кривых (см. рис. 2). Карбид железа при этих условиях не образуется. Имплантация железа ионами молекулярного азота проводилась при плотности ионного тока до 20 мкА/см². При такой плотности тока происходил определенный разогрев поверхности. О степени этого разогрева можно судить по начальным участкам кривых изохронного отжига электросопротивления на рис. 1. У образцов, имплантированных даже самыми малыми дозами, спад сопротивления выражен очень слабо вплоть до 200 °С, тогда как у контрольного образца (данная серия образцов не отжигалась перед облучением) отмечен интенсивный отжиг дефектов, образованных в процессе осаждения тонкой пленки на подложку. Следовательно, при имплантации ионами молекулярного азота отжигаются как дефекты, присущие образцу в исходном состоянии, так и в значительной мере радиационные дефекты, образующиеся в процессе имплантации. Такой отжиг возможен при заметном прогреве имплантируемой поверхности, при этом создаются условия для синтеза нитридов железа, образование которых наблюдается при сходных режимах имплантации [1].

На рис. 3, а приведена кривая изохронного отжига электросопротивления пленок меди, имплантированных ионами висмута. Висмут не обладает заметной растворимостью в меди, не образует с ней равновесных химических соединений, практически не образует даже эвтектики (состав эвтектики 99,4% вес. Вi, 0,6% вес. Сu). Поэтому прогрев до температур выше 300 °С приводит к выделению висмута на поверхности образцов, заметному визуально для больших потоков имплантации. Происхождение максимума на рис. 3, а не совсем ясно и требует дополнительных исследований, однако, несомненно, он отражает процесс перераспределения атомов висмута, внедренных в медную пленку.

На наличие структурных изменений в образцах меди, имплантированных ионами висмута и отожженных при 250 °С, указывают результаты рентгенодифрактометрических исследований. Изучалась зависимость формы и положения дифракционной линии (III) от потока ускоренных ионов и температуры изохронного отжига имплантированных слоев меди. Обнаружено, что интенсивность и форма дифракционной линии (III) существенно не изменяются. Параметр решетки увеличивается после имплантации на 0,1—0,2%. На рис. 3, б изображена зависимость параметра решетки пленок меди толщиной 5000 Å, имплантированных ионами висмута потоком $1 \cdot 10^{17}$ ион/см², в зависимости от температуры изохронного отжига. Имеющийся на кривой максимум коррелирует с максимумом на рис. 3, а. Изменение параметра решетки в максимуме достигает 0,15%, что в три раза выше погрешности эксперимента. Это изменение параметра решетки обусловлено возникновением напряжений в пленке за счет структурных изменений в поверхностном слое, содержащем имплантированный висмут.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков В. Н. и др.— ФТТ, 1976, т. 18, с. 1.
2. Павлов А. В.— Уч. зап. Горьковского ун-та, 1973, с. 167.
3. Павлов А. В. и др. Взаимодействие атомных частиц с твердым телом, ч. 1.— Киев, 1974.
4. Vogel F. L.— Thin Solid Films, 1975, v. 27, p.2.

Поступила в редакцию
03.10.78.

Кафедра физики твердого тела

ПРИМЕНИМОСТЬ МОДЕЛИ ЭФФЕКТИВНЫХ ЗАРЯДОВ И ОТНОШЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ПОЛОС В ИХ СПЕКТРАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВАЛЕНТНЫМИ И ДЕФОРМАЦИОННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

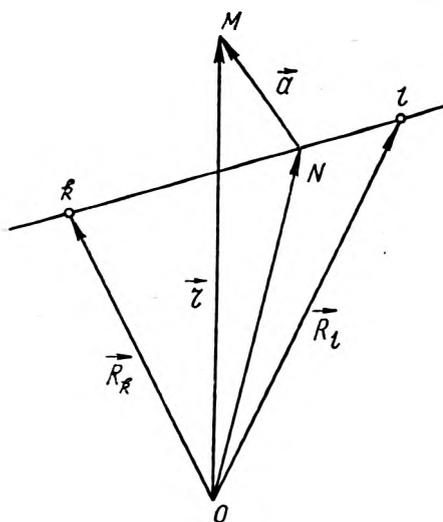
Расчету электрооптических параметров и интенсивностей частот спектров соединений различных классов на основе валентно-оптической теории посвящено немало работ [1—7], результаты которых представлены в обзоре [5]. Трудности выполнения полуэмпирических расчетов в отношении неоднозначности выбора знаков производных дипольного момента молекулы по нормальным координатам и большого числа параметров вызывают необходимость применения разнообразных методов исследования и схем расчета. В последнее время [8—12] рассматривается возможность применить схему расчета интенсивностей по модели эффективных зарядов, которая построена на исходной формуле для компонент дипольного момента молекулы [13]:

$$\mu_x = \sum_{\alpha} \zeta_{\alpha} x_{\alpha}. \quad (1)$$

В работе [11] линейная часть разложения компоненты дипольного момента молекулы представляет собой сумму двух частей:

$$\Delta\mu_x^{(1)} = \sum_{\alpha} \zeta_{\alpha}^{(0)} \Delta x_{\alpha}, \quad (2)$$

$$\Delta\mu_x^{(2)} = \sum_{\alpha} \Delta\zeta_{\alpha} x_{\alpha}^{(0)}. \quad (3)$$



Электронная плотность связи

ности молекулы $\rho = \psi\psi$, где ψ — собственная функция электронов. Обозначая эту часть посредством ρ_{kl} , представляем ее в виде суммы трех слагаемых

$$\rho_{kl} = \rho_{1kl} + \rho_{2kl} + \rho_{2lk}. \quad (4)$$

Значения ρ_{1kl} определяются расстоянием переменной точки M относительно двух центров k и l , поэтому ρ_{1kl} можно выразить как функцию эллиптических координат с центрами в k и l . Значения второй части ρ_{2kl}

Представляет интерес определить, можно ли схему расчета по модели эффективных зарядов применить в общем случае, результаты применить к изучению соотношения интенсивности полос, обусловленных валентными и деформационными колебаниями, так как в литературе нередко выводы строятся на основе предположений, что интенсивности полос валентных и деформационных колебаний определяются разными параметрами [14].

Необходимость дополнения модели эффективных зарядов [11, 13] новыми параметрами. При выводе формулы для дипольного момента молекулы целесообразно исходить из следующего предположения.* Данную связь между атомами k и l образует часть электронной плотности

* Определение связи соответствует имеющемуся в литературе.

определяются расстоянием точки M от одного центра k , расстоянием от оси и поворотом точки M относительно оси связи, поэтому ρ_{2kl} можно выразить как функцию сферических координат с центром k и осью OZ , совпадающей с осью связи. Определяется ρ_{2lk} относительно центра l так же, как ρ_{2kl} относительно k . Поскольку ρ_{2kl} и ρ_{2lk} в противоположность к ρ_{1kl} инварианты относительно смещения второго центра вдоль связи при колебаниях, в достаточно высоком приближении можно считать, что ρ_{2kl} и ρ_{2lk} не зависят от координаты растяжения длины связи kl . Предполагаем, что ρ_{1kl} , ρ_{2kl} и ρ_{2lk} сохраняют осевую симметрию при колебаниях, поэтому ρ_{kl} имеет осевую симметрию. Достоверность предположений могут подтвердить расчеты по экспериментальным данным для конкретных молекул и выводы на основе квантовой механики. Рассмотрим, исходя из предположений, дипольный момент связи и всей молекулы в общем виде.

В прямоугольной системе координат положение переменной точки интегрирования M , ядер k и l определяем радиус-векторами соответственно \vec{r} , \vec{R}_k и \vec{R}_l (см. рисунок). Дипольный момент связи

$$\vec{\mu} = eZ_k\vec{R}_k + eZ_l\vec{R}_l - e\int\rho_{kl}\vec{r}dv, \quad (5)$$

где Z_k и Z_l порядковые номера атомов.

Проводя перпендикуляр $MN = \vec{a}$ на ось связи, получаем

$$\vec{OM} = \vec{r} = \vec{ON} + \vec{a}. \quad (6)$$

При любом положении N на оси связи вектор \vec{ON} представляется как линейная комбинация по одной из формул

$$\vec{ON} = \frac{\vec{R}_k + \lambda\vec{R}_l}{1 + \lambda} \quad (7, a)$$

при $-1 < \lambda \leq 1$ для точек левой полуоси,

$$ON = \frac{\kappa\vec{R}_k + \vec{R}_l}{1 + \kappa} \quad (7, б)$$

при $-1 < \kappa < 1$ (правая полуось).

В качестве координат точки M принимаем \vec{a} и λ для левого полупространства, \vec{a} и κ для правого. Введем цилиндрическую систему координат (a, φ, z) с осью OZ , совпадающей с осью связи, φ — угол поворота вектора \vec{a} .

Элемент объема

$$dv = a dz d\varphi da, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} dz &= |\Delta \vec{ON}| = \left| d \left(\frac{\vec{R}_k + \lambda\vec{R}_l}{1 + \lambda} \right) \right| = \left| \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\vec{R}_k + \lambda\vec{R}_l}{1 + \lambda} \right) \right| d\lambda = \\ &= \left| -\frac{\vec{R}_k}{(1 + \lambda)^2} + \frac{\vec{R}_l}{(1 + \lambda)^2} \right| d\lambda = \frac{|\vec{R}_l - \vec{R}_k|}{(1 + \lambda)^2} d\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

так как \vec{R}_k и \vec{R}_l при дифференцировании считаются постоянными. Подставляя (9) и длину связи $S_{kl} = |\vec{R}_l - \vec{R}_k|$ в (8),

$$dv = \frac{1}{(1 + \lambda)^2} S_{kl} a da d\varphi d\lambda, \quad (10)$$

Замена λ на κ дает dv для правого полупространства. Согласно (6, 7, а, 7, б),

$$\vec{r} = \frac{\vec{R}_k + \lambda\vec{R}_l}{1 + \lambda} + \vec{a}, \quad (11, a)$$

$$\vec{r} = \frac{\kappa\vec{R}_k + \vec{R}_l}{1 + \kappa} + \vec{a}. \quad (11, б)$$

Подстановка (4) в (5) приводит к трем интегралам. Подставляя (11, а) в интеграл от ρ_{1kl} и интегрируя по полупространству, получаем:

$$e \int \vec{r} \rho_{1kl} dv = e \int \rho_{1kl} \left(\frac{\vec{R}_k + \lambda \vec{R}_l}{1 + \lambda} \right) dv + e \int \rho_{1kl} \vec{a} dv. \quad (12)$$

Согласно предположению, что ρ_{1kl} имеет осевую симметрию,

$$e \int \rho_{1kl} \vec{a} dv = 0. \quad (13)$$

Распространяя интегрирование по всему пространству, получаем

$$e \int \rho_{1kl} \vec{r} dv = \int \rho_{1kl} \left(\frac{\vec{R}_k + \lambda \vec{R}_l}{1 + \lambda} \right) dv + \int \rho_{1kl} \left(\frac{\kappa \vec{R}_k + \vec{R}_l}{1 + \kappa} \right) dv. \quad (14)$$

Согласно предположению, при любых положениях концов векторов \vec{R}_k и \vec{R}_l ρ_{1kl} может зависеть только от a , φ и положения N на оси связи, т. е. от λ или κ . Следовательно,

$$\rho = \rho(a, \varphi, \lambda), \quad \rho = \rho(a, \varphi, \kappa). \quad (15)$$

Поскольку при изменении длины связи S_{kl} общее количество заряда не меняется, то для малых изменений S_{kl} можно предположить, что ρ_{1kl} зависит от S_{kl} следующим образом:

$$\rho_{1kl}(a, \varphi, \lambda, S_{kl}) = \frac{1}{S_{kl}} \rho_0(a, \varphi, \lambda) \quad (16)$$

Подстановка (16) и (10) в (14) приводит к сокращению длины связи в интегралах

$$\begin{aligned} \int \rho_{1kl} \vec{r} dv &= \iiint \left(\frac{\vec{R}_k + \lambda \vec{R}_l}{(1 + \lambda)^3} \right) a \rho_0(a, \varphi, \lambda) da d\varphi d\lambda + \\ &+ \iiint \left(\frac{\kappa \vec{R}_k + \vec{R}_l}{(1 + \kappa)^3} \right) a \rho_0(a, \varphi, \kappa) da d\varphi d\kappa. \end{aligned} \quad (17)$$

Представляя (17) в виде суммы четырех интегралов и вынося постоянные вектора \vec{R}_k , \vec{R}_l , согласно (5), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{kl} &= \vec{R}_k \left[eZ_k - e \int_{-1}^{+1} d\lambda \int_0^\infty da \int_0^{2\pi} \frac{a \rho_0(a, \varphi, \lambda) d\varphi}{(1 + \lambda)^3} - e \int_{-1}^1 d\kappa \int_0^\infty \frac{\kappa a \rho_0(a, \varphi, \kappa) d\varphi}{(1 + \kappa)^3} \right] + \\ &+ \vec{R}_l \left[eZ_l - e \int_{-1}^1 d\lambda \int_0^\infty da \int_0^{2\pi} \frac{a \lambda \rho_0(a, \varphi, \lambda) d\varphi}{(1 + \lambda)^3} - \right. \\ &\left. - e \int_{-1}^1 d\kappa \int_0^\infty da \int_0^{2\pi} \frac{a \rho_0(a, \varphi, \kappa) d\varphi}{(1 + \kappa)^3} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначая выражения в скобках (18) соответственно через ζ_{kl} и ζ_{lk} , получаем дипольный момент связи без учета ρ_{2kl} и ρ_{2lk} .

$$\vec{\mu}_{kl} = \zeta_{kl} \vec{R}_k + \zeta_{lk} \vec{R}_l, \quad (19)$$

причем ζ_{kl} и ζ_{lk} как интегралы являются постоянными числами.

Для интеграла от ρ_{2kl} представим \vec{r} точки M как сумму $\vec{r} = \vec{R}_k + \vec{r}_k$, где \vec{r}_k измеряется в системе координат с центром в k . Таким образом,

$$e \int \rho_{2kl} \vec{r} dv = e \vec{R}_k \int \rho_{2kl} dv + e \int \rho_{2kl} \vec{r}_k dv, \quad (20)$$

Первый член суммы (20) включаем в ζ_{kl} , второй член представляет собой дипольный момент \vec{d}_{kl} , направленный от центра l вдоль линии связи kl .

Модуль вектора \vec{d}_{kl} не изменяется при колебаниях. Аналогично по ρ_{2k} получаем вектор

$$\vec{d}_{kl} = e \int \rho_{2kl} \vec{r}_i dv. \quad (21)$$

Дипольный момент всей молекулы

$$\vec{\mu} = \sum_{kl} \vec{\mu}_{kl} = \sum_{(kl)} (\zeta_{kl} \vec{R}_k + \zeta_{lk} \vec{R}_l + \vec{d}_{kl} + \vec{d}_{lk}), \quad (22)$$

где суммирование выполнено по сочетаниям центров kl , образующих связь. Сумму от первых двух членов в (22) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{kl} (\zeta_{kl} \vec{R}_k + \zeta_{lk} \vec{R}_l) = \sum_k \left(\sum_n \zeta_{kn} \right) \vec{R}_k = \sum_k \zeta_k \vec{R}_k. \quad (23)$$

С учетом (23) полный дипольный момент молекулы

$$\vec{\mu} = \sum_k \zeta_k \vec{R}_k + \sum_{(kl)} (\vec{d}_{kl} + \vec{d}_{lk}). \quad (24)$$

Введем нумерацию связей по m и единичные векторы \vec{e}_m , направленные вдоль связей. Обозначим $\vec{\delta}_m = \delta_m \vec{e}_m = \vec{d}_{km} + \vec{d}_{lk}$. Вектор $\vec{\delta}_m$ целесообразно именовать постоянной поляризацией связи по аналогии с термином в методе CNDO [15]. Параметры δ_m есть постоянные числа, так как модули векторов \vec{d}_{kl} не изменяются при колебаниях. Общая формула для дипольного момента молекулы

$$\vec{\mu} = \sum_k \zeta_k \vec{R}_k + \sum_m \delta_m \vec{e}_m. \quad (25)$$

Формулу (1), предложенную авторами [11, 13], необходимо дополнить третьим членом суммы

$$\Delta \vec{\mu} = \sum_k \zeta_k^{(0)} \Delta \vec{R}_k + \sum_k \Delta \zeta_k \vec{R}_k^{(0)} + \sum_m \delta_m \Delta \vec{e}_m. \quad (26)$$

Отношение интенсивностей полос, обусловленных валентными и деформационными колебаниями, согласно (25, 26) определяют прежде всего эффективные атомные заряды ζ_k . Мера влияния параметра δ_m на интенсивность определяется величиной поворота \vec{e}_m при колебании.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Д. С. Умрейко за интерес и содействие в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волькенштейн М. В., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул, т. 2.— М.-Л., 1949.
2. Волькенштейн М. В.— Докл. АН СССР, 1941, т. 32, с. 185; ЖЭТФ, 1941, т. 11, с. 642.
3. Волькенштейн М. В., Грибов Л. А., Ельяшевич М. А., Степанов Б. И. Колебания молекул.— М., 1972.
4. Свердлов Л. М.— Оптика и спектроскопия, 1961, т. 10, с. 76, 371.
5. Свердлов Л. М., Ковнер М. А., Крайнов Е. П. Колебательные спектры многоатомных молекул.— М., 1972.
6. Маяц Л. С., Авербух Б. С. Теория и расчет интенсивностей в колебательных спектрах молекул.— М., 1971.
7. Mayants L. S., Averbukh B. S.— J. Mol. Spectrosc., 1967, v. 22, p. 197.
8. Yozo Kakiuti, Minoru Akiyama, Hiroshi Saito.— J. Mol. Spectrosc., 1976, v. 61, p. 164.
9. A. I. van Straten, Smit W. M. A.— J. Mol. Spectrosc., 1976, v. 62, p. 297.
10. Person W. B., Overend J.— J. Chem. Phys., 1977, v. 66, p. 1442.
11. Decius J. C.— J. Mol. Spectrosc., 1975, v. 57, p. 348.
12. Лазарев А. Н., Миргородский А. П., Игнатьев И. С. Колебательные спектры сложных окислов.— Л., 1975, с. 77.
13. Wilson E. B., Decius J. C., Cross P. S. Molecular vibration.— New-York, 1955, p. 41.
14. Юрченко Э. Н., Девяткина Е. Т., Бугина Е. Б.— Журнал структурной химии, 1976, т. 17, с. 854.

УДК 621.391.15

Г. А. АГРАНОВ, А. М. ЗАЙЦЕВА,
Л. И. КОРЕННАЯ, В. С. СОБОЛЕВИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ
СОКРАЩЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УОЛША — АДАМАРА

Поискам путей сжатия информации в последние годы уделяется все большее внимание. Это связано в первую очередь с ограниченной пропускной способностью каналов связи [1].

При передаче изображения методы сжатия основаны на сокращении избыточности, которая возникает из-за корреляции интенсивности между ближайшими точками изображения. Для сравнения различных методов сжатия необходимо выработать критерии качества, предъявляемые к восстановленному изображению. Достаточно сложный вопрос формулировки критерия качества в наиболее общем виде рассмотрен в работе [2]. Функция искажений, являющаяся количественной мерой качества, учитывает многообразные факторы, которые влияют на точность воспроизведения. Однако на пути практического использования такого подхода возникают непреодолимые пока трудности: даже приближенный вид этой функции не имеет аналитического представления.

В настоящей работе рассмотрены методы сжатия информации при кодировании изображения с помощью преобразований Уолша — Адамара* [3]. Будем считать исходное изображение заданным в виде набора сигналов F_{kl} , соответствующих яркостям каждого из дискретных элементов поля изображения:

$$F_{kl} = \int_{x_0+k\Delta}^{x_0+(k+1)\Delta} dx \int_{y_0+l\Delta}^{y_0+(l+1)\Delta} F(x, y) dy, \quad (1)$$

здесь $F(x, y)$ — функция, описывающая непрерывное изображение; $\Delta = \frac{L}{N}$ — шаг пространственной дискретизации; L — линейный размер поля изображения; N — количество элементов вдоль одной из пространственных осей; $k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1$; x_0, y_0 — координаты начала отсчета.

Пространственно-частотные искажения, появляющиеся в результате усреднения (1), принимать во внимание не будем, считая шаг дискретизации Δ достаточно малым, а частотный спектр функции $F(x, y)$ ограниченным.

Пусть φ_{ij} — коэффициенты разложения дискретной функции F_{kl} в ряд Уолша — Адамара:

$$\varphi_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} H_{ik} F_{kl} H_{lj}, \quad (2)$$

$$F_{kl} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} H_{ki} \varphi_{ij} H_{jl}$$

В дальнейшем при проведении расчетов будем использовать функции

* Интерес к использованию глобальных преобразований для кодирования изображения появился в связи с высокой помехоустойчивостью таких сигналов по отношению к шумам канала связи.

Уолша — Адамара H_{ik} , представленные в частотно-упорядоченном виде [4]:

$$H_{ik} = (-1)^{P(i,k)},$$

где

$$P(i, k) = \sum_{v=0}^{n-1} (i_{n-v} + i_{n-v-1})k_v + i_{n-1}k_0 \quad (3)$$

i, k_v — компоненты двоичного разложения чисел i, k : $i = \sum_{v=0}^{n-1} i_v \cdot 2^v$; $N = 2^n$.

Количественной мерой качества изображения будем считать величину средней относительной неточности восстановленного изображения:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(F_{kl} - F'_{kl})^2}{F_{kl}^2}}{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F_{kl}^2}, \quad (4)$$

здесь F'_{kl} — яркость k, l -ого элемента, восстановленная после частичного сокращения избыточности*. Относительная неточность δ^2 связана с коэффициентами ряда (2) следующим соотношением:

$$\delta^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\varphi_{ij} - \varphi'_{ij})^2}{\varphi_{ij}^2}. \quad (5)$$

Используемая нами мера качества, безусловно, очень грубая форма оценки точности восстановленного изображения. Его применение может быть оправдано тем, что целью данной работы является не построение оптимальной системы приема — передачи изображения, а лишь исследование фактора усечения, который влияет на качество полученной картины и позволяет значительно сократить объем передаваемой информации.

Начнем с исследования методов сжатия видеосигналов в предположении, что исходное изображение закодировано с помощью преобразования Уолша — Адамара (2). Простота реализации алгоритмов сжатия в этом случае связана с тем, что для частично коррелированного изображения в области преобразованного пространства происходит резкая концентрация энергии в ограниченной части плоскости координат i, j . С ростом номера элемента (i, j) происходит уменьшение энергии и, если H_{ik} представлена в частотно-упорядоченной форме, процедура сокращения избыточности сводится к исключению высокочастотных малоинформативных коэффициентов**. Чем выше степень корреляции исходного изображения, тем резче концентрируется энергия в поле трансформанты. Распределение энергии в плоскости трансформанты рассмотрено в [5, 6].

Используемый параметр качества δ^2 описывает величину, равную отношению потерянной (за счет усечения трансформанты) энергии к полной энергии, сосредоточенной в поле изображения:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=i_0+1}^{N-1} \sum_{j=g(i)+1}^{N-1} \overline{\varphi_{ij}^2}}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{ij}^2}, \quad (6)$$

где i_0 — максимальный номер элемента вдоль оси i , предназначенный для

* Искажения, связанные с шумами датчика, канала связи, с шумами квантования, принимать во внимание не будем.

** При использовании естественной формы записи матрицы H_{ik} эффект концентрации энергии также имеет место, однако закон распределения $\overline{\varphi_{ij}^2}$ по плоскости i, j менее упорядочен.

передачи; $j=g(i)$ описывает линию раздела между областью отброшенных и сохраненных для передачи элементов трансформанты.

И, если исходить из критерия (6), оптимальный алгоритм усечения коэффициентов φ_{ij} должен соответствовать исключению элементов, которые лежат вдоль линий с приближенно равными амплитудами, так как в этом случае при фиксированном числе отброшенных членов потеря энергии будет минимальной. Заметим, что такой подход к сравнению различных алгоритмов сжатия довольно груб, так как предполагает, что для передачи каждого из коэффициентов трансформанты используется одинаковое количество битов.

Функция $j=g(i)$ определяется из решения уравнения

$$\overline{\varphi_{ij}^2} = \text{const}, \quad (7)$$

которое в общем случае имеет сложный вид, и его решение $j=g(i)$ очень громоздко. Для отыскания технически осуществимых алгоритмов сжатия необходимо рассмотреть приближенные решения (7) и выбрать среди них наиболее целесообразные для реализации.

В [6] получены аналитические выражения для энергии коэффициентов Уолша—Адамара $\overline{\varphi_{ij}^2}$ в предположении, что функция корреляции исходного изображения $R(k-k'; l-l') = \overline{F_{kl} F'_{kl}} - \overline{F_{kl}} \cdot \overline{F'_{kl}}$ описывается экспоненциально убывающей функцией [5]

$$R(k-k'; l-l') = R_0 e^{-\gamma(|k-k'|+|l-l'|)}. \quad (8)$$

Воспользовавшись этими результатами, рассмотрим приближенные решения уравнения (7). Энергия i, j -ого элемента:

$$\overline{\varphi_{ij}^2} = \overline{F^2} N^4 \delta_{i0} \delta_{j0} + R_0 \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma), \quad (9)$$

где $\rho_i(\gamma)|_{i=\gamma-v} = A_v(\gamma) + B_v(\gamma) C_v(\gamma)$; $v = 2^m$, $1 \leq m \leq n$, $1 \leq v \leq 2^{m-1}$;

$$A_v(\gamma) = N \frac{1+e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}} - 4v \frac{1-e^{-\gamma \frac{N}{v}}}{(1+e^{\gamma})(1-e^{-\gamma})(1+e^{\gamma \frac{N}{v}})}$$

$$B_v(\gamma) = 2 \frac{(1-e^{-\gamma \frac{N}{v}})(1-e^{-\gamma \frac{N}{v}})}{(1-e^{\gamma})(1-e^{-\gamma})(1+e^{\gamma \frac{N}{v}})(1+e^{-\gamma \frac{N}{v}})}$$

$$C_v(\gamma) = (1-e^{-\gamma \frac{N}{v}}) v_1; \quad v = v_1 - v_2; \quad v_1 = 2^k, \quad k < m.$$

Как следует из (9), $\rho_i(\gamma)$ имеет характер спадающей ступенчато-сглаженной функции. Подставляя (9) в (6), находим:

$$\delta^2 = \frac{R_0}{R_0 + \overline{F^2}} \cdot \alpha, \quad (10)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{N^4} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=g(i)+1}^{N-1} \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma), \quad \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \rho_i(\gamma) \rho_j(\gamma) = 1 \right).$$

В нулевом приближении, пренебрегая элементами сглаживания внутри зоны, $\rho_i(\gamma)$ можно представить в виде

$$\rho_i(\gamma)|_{i=\gamma-v} = A_v(\gamma) + B_v(\gamma). \quad (11)$$

На рис. 1 для поля размером 31×31 представлена зависимость энергии $\overline{\varphi_{ij}^2}$ от координат i, j в приближении (11). С точки зрения энергетического критерия (6) элементы трансформанты, принадлежащие площадкам с равными амплитудами, эквивалентны и исключение коэффи-

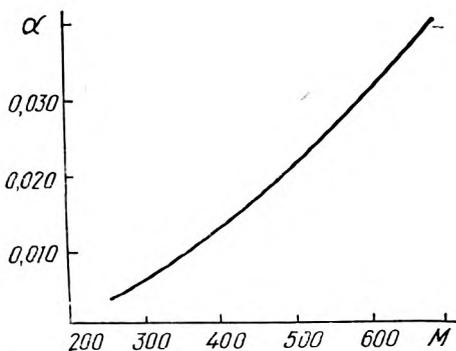
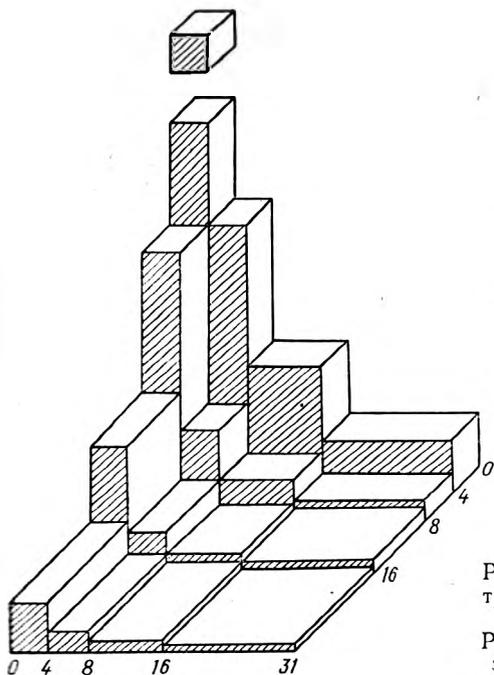


Рис. 1. Распределение энергии в плоскости трансформанты для поля размером 31×31

Рис. 2. Зависимость доли потерянной энергии от числа отброшенных членов

эментов в пределах одной площадки можно производить в любой последовательности. Другими словами, при усечении трансформанты в пределах одной энергетической площадки относительная доля потерянной энергии определяется только числом отброшенных элементов и не зависит от формы зоны, исключенной из рассмотрения.

На рис. 2 показана зависимость доли потерянной энергии α от числа отброшенных членов M при оптимальном исключении коэффициентов.

Первое приближение для $\bar{\varphi}_{ij}^2$ учитывает ослабление энергии в пределах энергетических зон:

$$2^m < i < 2^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

от $v = 2^{m+1} - i$.

Как следует из (9):

$$C_v(\gamma) = (1 - e^{-\gamma \frac{N}{v_1}}) v_1, \quad (13)$$

где $v = 2^h - v_1$, $v_1 = 2^h < v$ (v_1 — остаток, который мы отбрасываем в первом приближении).

Задачу отыскания оптимального пути усечения трансформанты можно свести к нахождению двух функций: $v_i = g_1(v_j)$, $v_i = g_2(v_j)$. Первую функцию, определяющую границы зон, которые будут исключены из рассмотрения, находим из решения уравнения

$$(A_{v_i} + B_{v_i})(A_{v_j} + B_{v_j}) = \text{const}. \quad (14)$$

Так как обычно отбрасываются зоны с низкой энергией, то v величина порядка N , и в случаях, представляющих практический интерес, $\gamma \frac{N}{v} < 1$.

Уравнение (13) при этом можно упростить:

$$\frac{N\gamma}{2} \left[1 + \left(\frac{N}{v_i} \right)^2 \right] + \left(\frac{N}{v_i} \right)^2 = \frac{\text{const}}{\frac{1}{2} N\gamma \left[1 + \left(\frac{N}{v_j} \right)^2 \right] - \left(\frac{N}{v_j} \right)^2}. \quad (15)$$

Задавая const, легко определить совокупность номеров зон (v_i , v_j), подлежащих исключению.

Для анализа хода кривой усечения внутри энергетической зоны рас-

смотрим подробнее уравнение (7). В приближении $\gamma \frac{N}{v} < 1$ для функции, описывающей кривую усечения, получим уравнение

$$C_{v_i} = \frac{\text{const}}{\left(\frac{N}{v_j}\right)^2 \left\{ \left(\frac{N}{v_j}\right)^2 \left[\frac{N\gamma}{2} + C_{v_j} \right] + \frac{N\gamma}{2} \right\}} - \frac{N\gamma}{2} \left[1 + \left(\frac{v_j}{N}\right)^2 \right], \quad (16)$$

где C_{v_j} определяется (13). Если параметр $\gamma \frac{N}{v}$ мал, то из (16) легко увидеть, что кривая усечения описывается гиперболой. Однако такой тип отсечения в общем случае не может быть оптимальным. В работе [5] из анализа экспериментальных данных показано, что в случае усечения по гиперболе (внутри зоны) потери энергии больше, чем при оптимальном отсечении. Действительно, условие $\gamma \frac{N}{v} < 1$ выполняется лишь для части элементов зоны, что и приводит к наблюдавшемуся в [6] отклонению кривой от гиперболической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кортман С.— ТИИЭР, 1967, т. 55, №№ 3, 8.
2. Будрикис Л.— В сб.: Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин.— М., 1973, с. 48.
3. Хармут Х. Ф. Передача информации ортогональными функциями.— М., 1975.
4. Трахтман А. И., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М., 1975.
5. Понсен О.— Зарубежная радиоэлектроника, 1972, т. 30, № 3, с. 30.
6. Агранов Н. А., Зайцева А. М., Коренная Л. Н., Соболев В. С.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3, с. 3.

Поступила в редакцию
29.01.79.

Кафедра ядерной физики

УДК 681.32

Г. П. ЛИЧКО

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ БОЛЬШИХ МАССИВОВ

Необходимость осуществления двумерного БПФ больших массивов, под которыми понимаются массивы, превышающие емкость оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) ЭВМ, возникает в различных областях обработки двумерных сигналов таких, как обработка изображений, расчет характеристик антенных систем по измерениям в ближней зоне, цифровая голография. Значительное время осуществления двумерного БПФ больших массивов при отсутствии экспериментальных оценок их быстродействия является одним из факторов, ограничивающих величину обрабатываемых массивов при использовании ЭВМ с малым и средним быстродействием и емкостью ОЗУ.

Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) вида

$$F(i, k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-j 2\pi \left(\frac{i \cdot m}{M} + \frac{k \cdot n}{N} \right) \right], \quad (1)$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$; $i=0, 1, \dots, M-1$, осуществляется с помощью двух последовательных одномерных ДПФ по одной из координат, поэтому одной из основных причин значительного увеличения времени осуществления двумерного БПФ больших массивов является выбор матрицы промежуточных результатов из внешнего запоминающего устройства (ВЗУ) по столбцам при ее построчной записи в ВЗУ. Известные программы двумерного БПФ не приспособлены для работы с использованием ВЗУ.

Проведенный анализ алгоритмов БПФ больших массивов показал, что наиболее эффективным алгоритмом является алгоритм Эклунда [1], позволяющий осуществлять транспонирование матрицы $2^n \times 2^n$ за n циклов обмена ОЗУ-диск в случае считывания в ОЗУ пары строк. Данный алгоритм достаточно гибок и дает возможность обрабатывать как прямоугольные массивы [2], так и массивы со считыванием более двух строк одновременно [3]. Суть цитируемого алгоритма в следующем. Пусть $A = \{\alpha_{ik}\}$, где α_{ik} — элементы транспонируемой матрицы, а $i=0, 1, 2, \dots, n-1; k=0, 1, 2, \dots, n-1$. Индексы i, k можно представить в двоичной системе исчисления в виде $i = \sum_{p=0}^{n-1} i_p \cdot 2^p, k = \sum_{p=0}^{n-1} k_p \cdot 2^p$, где i_p, k_p могут принимать значения 0 или 1. Весь процесс транспонирования состоит из n шагов. На j шаге ($p \leq j \leq n-1$) транспонирование ведется следующим образом.

По критерию $i'_j \neq i''_j$ и $i'_p = i''_p$, где индексы ' и '' обозначают две различные строки (элемента), выбирают пары строк, производят считывание этих строк с ВЗУ, и находят по критерию $k'_j = i'_j$ и $k'_j = i''_j, k'_p \neq k''_p$ для $p \neq j$ пары элементов, которые взаимно меняются местами. После обмена элементами строки записывают на исходные места в ВЗУ. Аналогичная процедура повторяется и с остальными строками. Совмещение процесса транспонирования с соответствующими одномерными БПФ позволяет вычислить (1).

ПРОГРАММА БПФ БОЛЬШИХ МАССИВОВ

```

SUBROUTINE BDSK32(LL)
DEFINE FILE12(4Ø96, 2Ø48, L, ID12)
DIMENSION X(2Ø48), Y(2Ø48), M(3), INV(256), S(256)
INTEGER IND1(512), IND2(512)
COMPLEX Z(1Ø24), ZZ(1Ø24), CC
EQUIVALENCE (X(1), Z(1)), (Y(1), ZZ(1))
DATA N/1Ø24/, NST/1Ø/, M/1Ø, Ø, Ø/
KZ=4
KZZ=1-KZ
MEE=N/2
CALL HARM(X, M, INV, S, Ø, IFS)
LL=LL+LL
JJ=1
DO 5 JI=1, NST
KZJ=KZ*JJ
ME=1
JJ1=JJ+JJ
J1=JJ-1
DO 2 K=1, N, JJ1
J2=K+J1
DO 2 IP=K, J2
IND1(ME)=IP
IND2(ME)=IND1(ME)+JJ
2 ME=ME+1
DO 16 ME=1, MEE
NP1=KZZ+IND1(ME)*KZ
FIND(12'NP1)
NP2=NP1+KZJ
IF(JI.GT.1)GOTO 4
READ(12'NP1)X
FIND(12'NP2)
CALL HARM(X, M, INV, S, LL, IFS)
READ(12'NP2)Y
CALL HARM(Y, M, INV, S, LL, IFS)
GOTO 18
4 READ(12'NP1)X
READ(12'NP2)Y
18 DO 3 MM=1, MEE
CC=Z(IND2(MM))
Z(IND2(MM))=ZZ(IND1(MM))
3 ZZ(IND1(MM))=CC
IF(JI.NE.NST)GOTO 17
CALL HARM(Y, M, INV, S, LL, IFS)
CALL HARM(X, M, INV, S, LL, IFS)

```

```

17 WRITE (12'NP1)X
   WRITE (12'NP2)Y
16 CONTINUE
   JJ=JJ+JJ
  5 CONTINUE
   RETURN
   END

```

Выше представлены текст и описание программы на языке Фортран-IV, реализующей описанный алгоритм и позволяющей осуществлять БПФ массивов размерностью до 1024×1024 при применении одного накопителя на магнитных дисках емкостью 29 Мбайт. Переход к БПФ массивов других размерностей осуществляется посредством изменения соответствующим образом величины массивов X , Y , M , INV , S , $IND1$, $IND2$, Z , ZZ и констант N , NST , KZ , где в массивах X и Y запоминаются считываемые пары строк, массивы $IND1$, $IND2$ размерностями 0,5 строки используются для запоминания номеров строк и элементов, подлежащих обмену. Константы N и NST представляют размер строки и значение n . Массивы M , INV , S используются при работе *HARM* в соответствии с обращением к этой программе. LL — код преобразования Фурье, равный 1 или -1 для прямого и обратного преобразования Фурье соответственно. Для записи исходных данных и конечных результатов используется файл 12, размеченный на диске с KZ записями на 1 дорожку.

Экспериментальные оценки быстродействия прямого (П) и быстрого (Б) алгоритмов БПФ больших массивов

Массив	256×256		512×512		512×512		1024×1024	
ЭВМ	ЕС-1020		ЕС-1020		ЕС-1022		ЕС-1022	
Алгоритм	П	Б	П	Б	П	Б	П	Б
Время, ч	5,5	0,7	42,3	3,17	9,5	0,63	91	3
K	7,85		13,3		15,0		30,3	

Отличительными чертами данной программы являются минимальное использование емкости ОЗУ и ВЗУ, применение для одномерного БПФ стандартной программы БПФ *HARM*, возможность применения данной программы при незначительных изменениях для массивов различной размерности.

Для оценки эффективности работы представленной программы получены экспериментальные оценки быстродействия для массивов от 256×256 до 1024×1024 с использованием ЭВМ ЕС-1020, ЕС-1022 с ВЗУ ЕС-5052, ЕС-5061 с устройствами управления ЕС-5551, ЕС-5561 соответственно. В таблице приведены результаты, полученные с использованием как прилагаемой программы, так и программы БПФ без применения быстрых алгоритмов транспонирования.

На основании экспериментальных оценок можно заключить, что использование приведенной программы позволяет уменьшить время осуществления БПФ от 7 до 30 раз, обеспечивая значительную экономию машинного времени при минимальном использовании емкости ОЗУ. Увеличение числа одновременно считываемых строк позволяет получить дополнительный выигрыш до 2 раз.

В заключение отметим, что дальнейшим направлением совершенствования представленных в [1—3] алгоритмов является использование более эффективных, чем *HARM*, программ БПФ с оптимизацией процессов записи и размещения информации на диске.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eklundh J. O.—IEEE Trans. on Computers, 1972, v. C-21, № 7, p. 801.
2. Alltop W. O.—IEEE Trans. on Computers, 1975, v. C-24, № 10, p. 1038.
3. Twogood R. E., Ekstrom M. P.—IEEE Trans. on Computers, 1976, v. C-25, p. 950.

Поступила в редакцию
05.02.79.

НИИ ПФП

УДК 535.34

И. П. ЗЯТЬКОВ, Н. Д. КНЯЖЕВИЧ, Д. И. САГАЙДАК, Н. В. ПАРФИАНОВИЧ

РОЛЬ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ И ФОНОВОГО ВКЛАДА В ФОРМИРОВАНИИ КРИВОЙ ОШИБОК ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОМ АНАЛИЗЕ ПО СПЕКТРАМ ПОГЛОЩЕНИЯ

ИК спектры поглощения многокомпонентных систем зачастую представляют собой сплошные спектральные континуумы, что сильно затрудняет их использование для количественного анализа этих систем. Число значений оптических плотностей D_ν , используемых при этих расчетах, как правило, значительно превышает предполагаемое или известное число компонентов смеси. Для случая невзаимодействующих компонентов смеси связь между оптической плотностью D_ν энергетической зоны спектра и концентрациями компонентов смеси C_n имеет вид

$$D_\nu = \sum_{n=1}^N E_{\nu n} C_n, \quad (1)$$

где $E_{\nu n}$ — экстинкция n вещества в ν энергетической зоне спектра.

Задача заключается в отыскании решения переопределенной системы (1), а именно: в нахождении наиболее вероятных значений C_n , которые, вообще говоря, не будут точно удовлетворять ни одному из уравнений (1).

Решение системы (1) может быть получено методом наименьших квадратов, который применительно к настоящей задаче состоит в нахождении таких C_n , при которых величина A принимает минимальное значение:

$$A = \sum_{\nu=1}^{\nu} P_\nu (D_\nu^{\text{эксп}} - \sum_{n=1}^N E_{\nu n} C_n)^2 = \min. \quad (2)$$

Здесь P_ν — весовой вклад в ν энергетической зоне.

Согласно определению [1], характеристическая весовая функция (ХВФ) — специальная характеристика относительной точности результатов измерений, вычисляемая как величина, обратно пропорциональная среднеквадратичному отклонению. Оптимальный вид ХВФ оценивается минимумом суммы квадратов отклонений экспериментальных оптических плотностей от расчетных, т. е. условием (2). Однако точных рекомендаций по выбору ХВФ в литературе не имеется.

В работе [2] показано, что для многокомпонентных смесей с достаточно свободными полосами, максимумы и часть контуров которых легко идентифицируются на спектрограмме, разностный контур между исследуемой и синтезированной (рассчитанной на ЭВМ) спектрограммами (кривая абсолютных отклонений Δ_ν) совпадает со спектром неидентифицированной компоненты. Однако в случае сильно перекрывающихся полос кривая ошибок перестает быть однозначной спектральной характеристикой неучтенных компонентов смеси. В связи с этим нами проведен анализ спектрального распределения Δ_ν и численных результатов расчета состава модельных смесей в зависимости от характера фонового вклада и вида весовой функции P_ν .

Для получения наиболее вероятных значений C_n нами предложено учитывать усредненный фон $d_{\nu n}$, создаваемый полосой с максимумом ν_0 на любых бегущих частотах ν , причем суммарный фоновый вклад на ν спектральном интервале в спектре многокомпонентной смеси рассчитывался двумя способами:

$$D_{\nu}^{\text{фон}} = \sum_{n=1}^N d_{\nu n}, \quad (3)$$

$$D_{\nu}^{\text{фон}} = \sum_{n=1}^N d_{\nu n}/N. \quad (4)$$

С учетом этих поправок выражения (1) и (2) принимают, соответственно, вид:

$$D_{\nu} = \sum_{n=1}^N E_{\nu n} C_n + D_{\nu}^{\text{фон}}, \quad (5)$$

$$A' = \sum_{\nu=1}^{\nu} P_{\nu} (D_{\nu}^{\text{экс}} - D_{\nu})^2 = \min. \quad (6)$$

Моделью для расчета служила смесь слабозаимодействующих искусственного ангидрида (УА) и вторичного бутилацетата (ВБ) в четыреххлористом углероде при эквимолярном соотношении компонентов и соотношении их 10:1. Результаты расчета содержания компонентов смеси, а также абсолютные и относительные ошибки метода при учете фоновой оптической плотности в форме (3) и (4) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Истинное и рассчитанное при учете фона по (3) и (4) содержание УА и ВБ в модельных смесях ($P_{\nu} = 1$)

Вещество	Взвешено $C, \frac{\text{моль}}{\text{л}}$	Рассчитано (3)	ΔC_n $\frac{\text{моль}}{\text{л}}$	$\delta, \%$	Рассчитано, (4)	ΔC_n $\frac{\text{моль}}{\text{л}}$	$\delta, \%$
УА	0,0230	0,0251	0,0021	9,2	0,0254	0,0023	10,1
ВБ	0,0195	0,0191	0,0004	2,3	0,0201	0,0006	3,0
УА	0,0213	0,0226	0,0013	6,6	0,0228	0,0015	7,1
ВБ	0,0013	0,0004	0,0009	71,1	0,0014	0,0001	9,2

Абсолютные и относительные ошибки при расчете содержания ВБ в случае эквимолярного соотношения компонентов смеси в 3—3,5 раза меньше соответствующих ошибок определения УА, что обусловлено практически полным совпадением максимума аналитической полосы ВБ и максимума кривой поправок фона, тогда как в случае УА контур кривой поправок не повторяет контура поглощения. В случае модельной смеси с малым содержанием ВБ фоновый вклад в форме (4) приводит к значительно более точным результатам расчета концентрации ВБ, чем вклад в форме (3). При малых содержаниях ВБ высокое значение собственного относительного фона поглощения (3) и вклад фоновых крыльев со стороны полос УА приводят к большим ошибкам расчета.

При учете фона по (3) кривая Δ_{ν} исследовалась по форме и интенсивности для четырех ХВФ вида: $P_{\nu} = E_{\nu n}^1, E_{\nu n}^0, E_{\nu n}^{-1/2}, E_{\nu n}^{-1}$. Для указанной эквимолярной смеси видно, что наиболее точный результат получается при $P_{\nu} = E_{\nu n}^0 = 1$ (табл. 2).

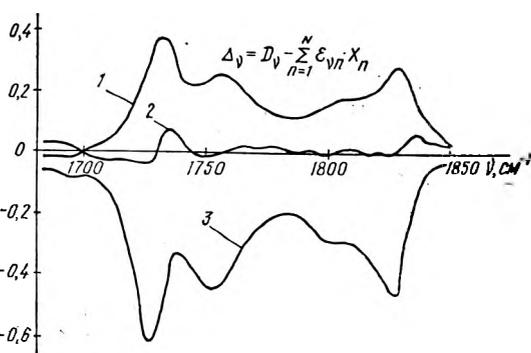
Абсолютные и относительные ошибки определения содержания компонентов модельной смеси при различных видах ХВФ

Веще- ство	$P_v =$ $= E_{\nu n}^{-1/2}$	$\Delta C_n,$ моль л	$\delta, \%$	$P_v =$ $= E_{\nu n}^0$	$\Delta C_n,$ моль л	$\delta, \%$	$P_v =$ $= E_{\nu n}^1$	$\Delta C_n,$ моль л	$\delta, \%$
УА	0,0623	0,0393	170,6	0,0251	0,0021	9,2	0,0028	0,0202	87,8
ВБ	0,0498	0,0303	155,3	0,0191	0,0005	2,3	0,0014	0,0181	92,9

Функциональная роль ХВФ в анализе спектральных особенностей слабовзаимодействующих смесей видна на рисунке, где представлена зависимость величины абсолютных ошибок $\Delta_\nu = D_\nu^{\text{испр}} - \sum_{n=1}^N E_{\nu n} C_n$ от частоты ν , где $D_\nu^{\text{испр}}$ — исправленное с учетом фонового вклада значение оптической

плотности анализируемой смеси на ν спектральном интервале. Минимальные значения абсолютных отклонений получаются при $P_\nu = 1$. $P_\nu = E_{\nu n}^1$ приводит к большому положительным ошибкам Δ_ν , что свидетельствует о пропорциональном занижении рассчитанного содержания продуктов по отношению к фактическому, а $P_\nu = E_{\nu n}^{-1/2}$ — к очень завышенным численным значениям искомым компонентом, так как Δ_ν принимает только отрицательные значения. К подобному результату приводит и $P_\nu = E_{\nu n}^{-1}$.

Таким образом, при использовании математического подхода, развитого для спектрально-неаддитивных систем, к системам с частичным взаимодействием компонентов удовлетворительные результаты получаются за счет введения характеристических весовых функций и специфического учета фона.



Кривые абсолютных отклонений Δ_ν , рассчитанные при различных значениях ХВФ:

$$P_\nu = E_{\nu n}^1 (1); P_\nu = E_{\nu n}^0 (2); P_\nu = E_{\nu n}^{-1/2} (3)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов П. С. Численные методы. — М., 1975.
2. Васильев А. В. — В сб.: Применение ЭВМ в химических и биохимических исследованиях. — М., 1976, гл. 8, с. 286.

Поступила в редакцию
05.02.79.

Кафедра физической оптики

УДК 681.142.01

А. А. КОЛЯДА

СТРУКТУРА БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ АУ В ОБОБЩЕННЫХ СОК

Отличительной чертой алгоритмов арифметики обобщенных систем остаточных классов (ОСОК) является высокий уровень параллелизма, позволяющего не только выполнять каждую из операций вычислительного процесса за минимальное число модульных тактов, но и совмещать

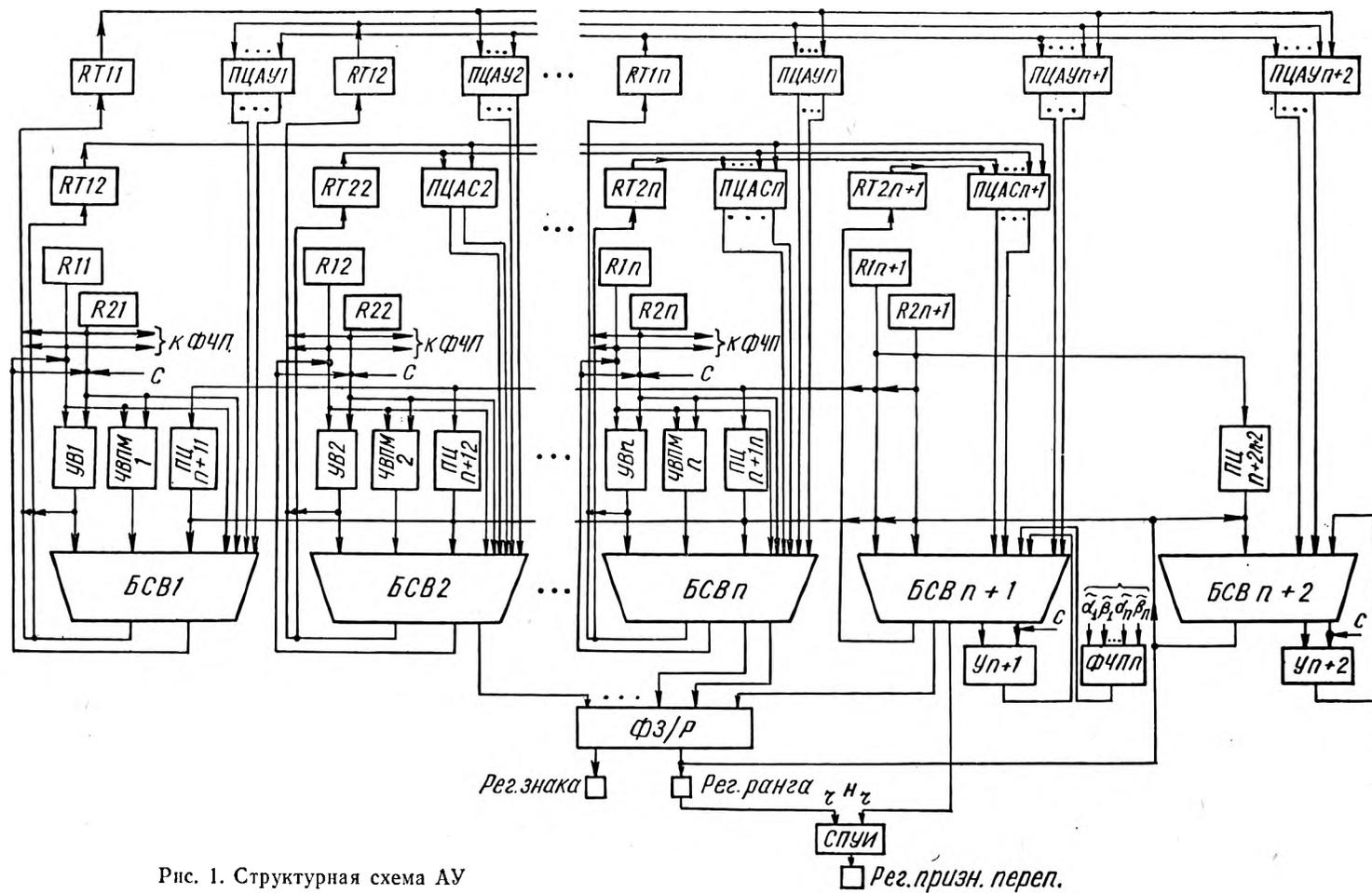


Рис. 1. Структурная схема АУ

во времени их выполнение [1]. Последнее значительно увеличивает скорость вычислений.

В данной работе приводится описание быстродействующего арифметического устройства (АУ) в ОСОК, структура которого полностью согласуется с указанным параллелизмом.

На рис. 1 представлена структурная схема АУ, способного выполнять все арифметические операции в режиме фиксированной запятой как в нормированных ОСОК 1 рода, так и в нормированных ОСОК с расширенным интервальным индексом по рангу (ОСОК РИИР) [1, 2].

Для определенности число модулей ОСОК полагается равным $n+2$ (n — число основных модулей) и $p=p_{n+1}$, где p — модуль, фигурирующий в алгоритме определения знака числа.

На рис. 2 показана структура блоков суммирования вычетов (БСВ) по модулю p_i ($i=1, 2, \dots, n+2$), использующихся на рис. 1, а на рис. 3, представлена блок-схема машинных алгоритмов арифметики ОСОК РИИР.

Сделаем ряд пояснений относительно назначения функциональных узлов (ФУ) и обозначений, используемых на рис. 1—3: p_1, p_2, \dots, p_{n+2} — модули ОСОК; ПЦ $n+1i$ — преобразователь вычетов по модулю p_{n+1} в остатки по модулю p_i ($i=1, 2, \dots, n+2; i \neq n+1$); ПЦАУ i ($i=1, 2, \dots, n+2$) — преобразователи цифр для получения всех слагаемых соответственно выражений:

$$S_X^{(i)} = \begin{cases} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{x_j}{p_j} \right| p_i \right| p_i, & \text{если } i = 1, 2, \dots, n; \\ \left| \sum_{j=1}^n \left| \frac{x_j}{p_j} \right| p_i \right| p_i, & \text{если } i = n+1, n+2, \end{cases}$$

где $x_j = \langle RT1j \rangle$ — содержимое регистра RT1j; ПЦАС i ($i=2, 3, \dots, n+1$) — преобразователи цифр для определения всех слагаемых выражений:

$$\rho_1^{(i)} = \left| \sum_{j=1}^i \left| \frac{\tilde{\alpha}_{ji}}{p_j} \right| p_{i+1} \right| + \left| -\frac{p_{i+1}}{p^{(i)}} \tilde{\alpha}_{i+1} \right| p_{i+1} \Big| p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$\rho_2^{(i)} = \left| \sum_{j=1}^i \left| \frac{\tilde{\alpha}_{ji}}{p_j} \right| p_{i+2} \right| + \left| -\frac{p_{i+2}}{p^{(i)}} \tilde{\alpha}_{i+2} \right| p_{i+2} \Big| p_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2;$$

$$\rho_2^{(n-1)} = \left\| r_A p_n \right| p_{n+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \left| -\left[\frac{p_n \tilde{\alpha}_j}{p_j} \right] \right| p_{n+1} + \left| -\alpha_n \right| p_{n+1} \Big| p_{n+1},$$

где $A = \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, r_A$ — содержимое регистра RT 2 = RT 21 — RT22 — ... — RT2 $n+1$ (символ «—» обозначает объединение ре-

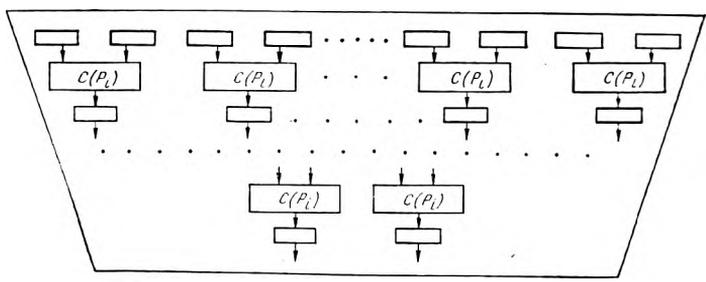


Рис. 2. Структура блока суммирования вычетов по модулю p

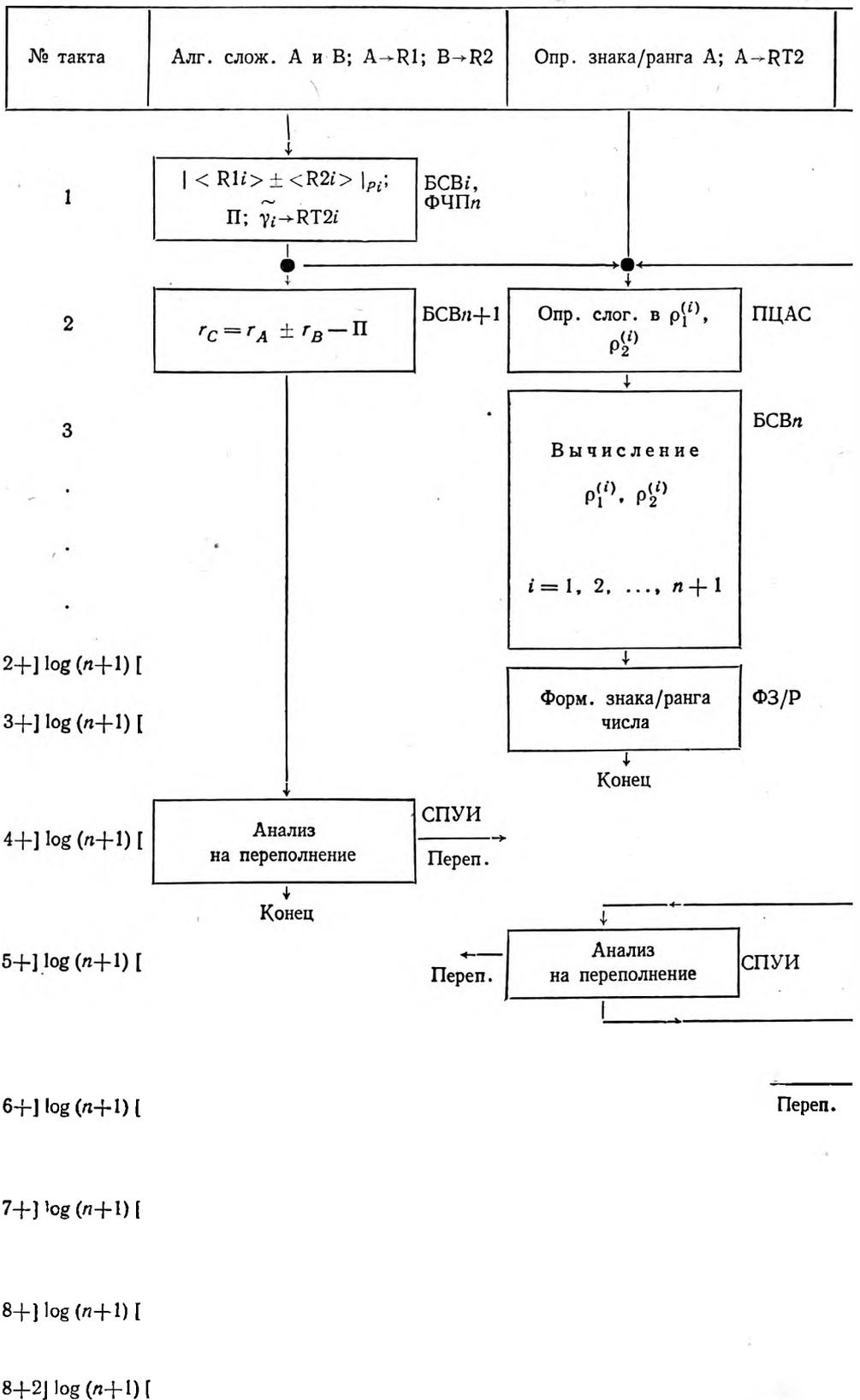
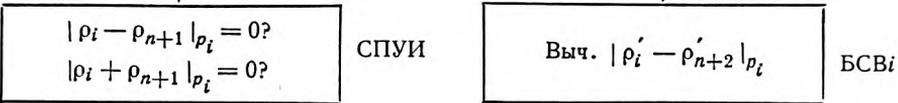
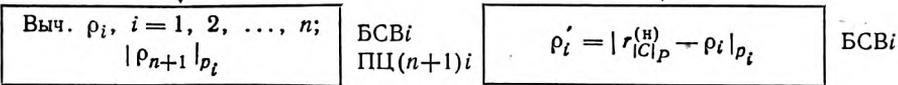
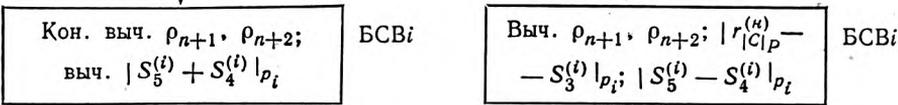
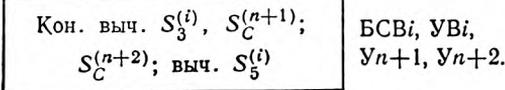
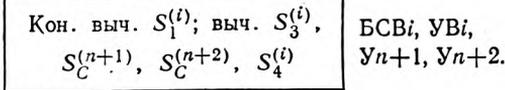
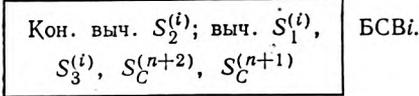
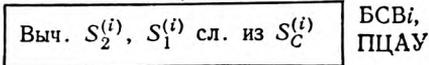
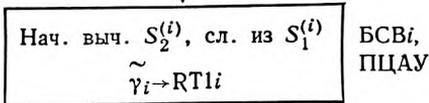
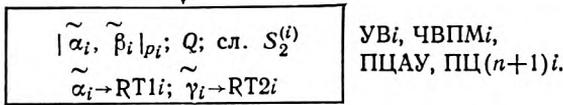
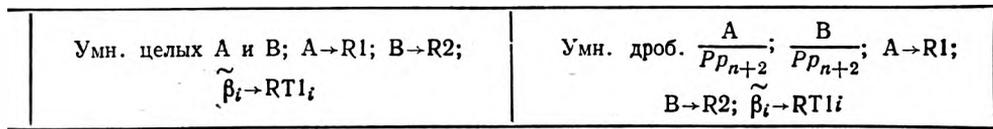
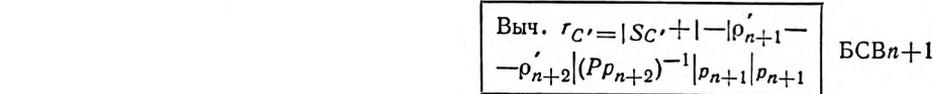
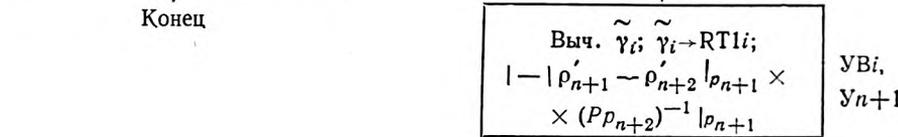


Рис. 3. Блок-схема машинных алгоритмов арифметики ОСОК РИИР



Конец



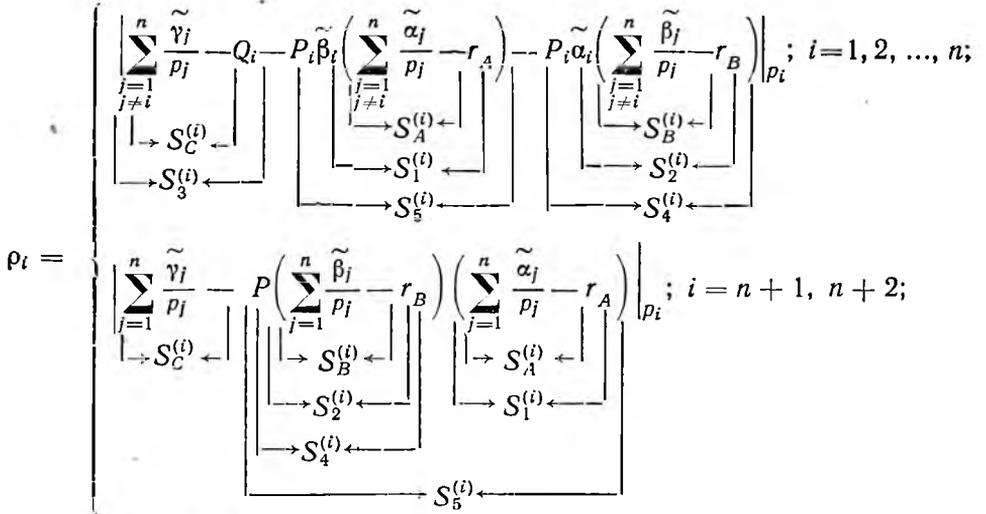
Конец операции

гистров) [3]; $\tilde{\alpha}_{ji} = \|A\|_{p_j} | P_{ji}^{-1} |_{p_j} |_{p_j}$, $P_{ji} = \frac{P^{(i)}}{p_j}$, $P^{(i)} = \prod_{j=1}^i p_j$; ЧВПМ i — таблица для получения $Q_i = \|[P_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_i / p_i]\|_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); где $P_i = P/p_i$, $P = P^{(n)}$; $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ — i -ые цифры операндов операции умножения; УВ i ($i = 1, 2, \dots, n$); Y_{n+1}, Y_{n+2} — умножители соответственно по модулям p_1, p_2, \dots, p_{n+2} ; ФЧП n — формирователь величины $\prod_{j=1}^n [(\tilde{\alpha}_j \pm \tilde{\beta}_j) / p_j]$, где $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ — операнды операции алгебраического сложения; БСВ i — блок суммирования вычетов по модулю p_i ($i = 1, 2, \dots, n+2$); СПУИ — схема проверки условия на интервальный индекс (ИИ).

Для ОСОК с расширенным интервальным индексом по рангу (РИИР) СПУИ проверяет условие:

$$r_A \in [r_A^{(n)} + 1 - p_{n+2}, p_{n+2} + r_A^{(n)}],$$

где $r_A^{(n)}$ — нормированный ранг числа A ; $RT1 = RT11 - RT12 - \dots - RT1n$, $R1 = R11 - \dots - R1n + 1$, $R2 = R21 - \dots - R2n + 1$ — объединения соответствующих регистров.



$\tilde{y}_i = \left| \frac{|\rho'_i - \rho'_{n+2}|_{p_i}}{p_{n+2} P_i^2} \right| p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — цифры произведения дробей, где $\rho'_i = |r_{|C|P}^{(n)} - \rho_i|_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n+2$);

$r_c = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{y}_j}{p_j} + \left| - \frac{|\rho'_{n+1} - \rho'_{n+2}|_{p_{n+1}}}{p_{n+2} P} \right|_{p_{n+1}} \right|_{p_{n+1}}$ — интервальный индекс произведения дробей.

Согласно рис. 1, все оборудование рассматриваемого АУ, кроме ФЧП n , ФЗ/Р и СПУИ распределяется по $n+2$ элементарным звеньям, i -ое из которых соответствует модулю p_i ($i = 1, 2, \dots, n+2$). В i -ом звене выполняются последовательности одноктактных операций над вычетами по модулю p_i , а также различные преобразования вычетов по другим модулям в вычеты по модулю p_i . Обмен вычетами между звеньями осуществляется по шинам, имеющим на рис. 1 горизонтальное положение.

При умножении целых чисел и дробей необходимы преобразователи ПЦ (p_0, p_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), где $p_0 = \max(p_{n+1}, p_{n+2})$, а также один из пре-

образователей: ПЦ(p_{n+1}, p_{n+2}) или ПЦ(p_{n+2}, p_{n+1}). На рис. 1 рассмотрен случай, когда $p_0 = p_{n+1}$.

Во многих практических случаях число таких преобразователей значительно меньше, чем указано. Преобразователь ПЦ(p_0, p_{n+1}) не нужен, если $p_0 < p_i$. В частности, если $p_0 < p_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, то в АУ достаточно иметь лишь один преобразователь: ПЦ $n+1n+2$, если $p_{n+2} < p_{n+1}$ и ПЦ $n+2n+1$ — в противном случае. БСВ i ($i = 1, 2, \dots, n+2$) необязательно должны иметь древовидную структуру, изображенную на рис. 2. Однако в целях повышения скорости вычислений их организация должна обеспечить возможность поточного (конвейерного) режима обработки информации [4, 5]. Число сумматоров, а следовательно, и регистров в каждом из БСВ i ($i = 1, 2, \dots, n+2$) определяется степенью осуществления распараллеливаний на микрооперационном уровне.

В [1,6—9] подробно рассмотрены алгоритмы выполнения основных арифметических операций в АУ, структура которого представлена на рис. 1. Из рис. 3 видно, что процесс каждой из арифметических операций в ОСОК условно можно разбить на две части: определение первых n цифр результата операции и вычисление ИИ результата. При этом первая часть занимает существенно меньшее время, чем вторая. При вычислении ИИ основная работа связана с действиями над первыми n цифрами операндов. Указанное обстоятельство позволяет начать выполнение команд программы, зависящих от результата предшествующих команд сразу после получения первых n его цифр. Отмеченная особенность алгоритмов арифметики ОСОК идеально согласуется с принципами поточной обработки информации. Поточная структура алгоритмов арифметики ОСОК позволяет существенно повысить эффективность предложенного АУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 6.
2. Коляда А. А., Кравцов В. К.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1979, № 3, с. 57.
3. Чу Я. Организация ЭВМ и микропрограммирование.— М., 1975.
4. Аллен. Архитектура ЭВМ для обработки сигналов.— ТИИЭР, 1975, т. 63.
5. Самохвалов К. Г., Корнейчук В. И., Тарасенко В. П. Электронные цифровые вычислительные машины.— Киев, 1976.
6. Коляда А. А., Ревинский В. В.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1973, № 3, с. 12.
7. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 3, с. 12.
8. Коляда А. А. Там же, с. 3.
9. Коляда А. А., Кравцов В. К. Ранг числа и умножение дробей в нормированных обобщенных СОК. ВИНТИ № 4111-76/78. Деп. от 29.11.76.

Поступила в редакцию
26.04.79.

Кафедра электронных математических
машин

УДК 621.382.23

Г. И. ГРОМЕНКО, В. И. ЛОЙКО, И. Г. НЕКРАШЕВИЧ

ЗАВИСИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ПРИРОДЫ ИЗГИБАЮЩИХ СИЛ В ДВУХСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ

Распределение внутренних напряжений в двухслойных системах может существенно изменяться в зависимости от природы изгибающих сил. Отдельные авторы [1—3] считают, например, что напряжения в двухслойной прямоугольной пластине длиной l , высотой h и шириной $b = 1$ с радиусом изгиба R под влиянием поперечной равномерно распределенной нагрузки (механический изгиб) равны напряжениям в однотипной

пластине с одинаковым радиусом изгиба, возникающим при нагревании за счет различных удлинений слоев (термический изгиб). Следовательно, для расчета напряжений в таких пластинах можно использовать как простую теорию балок (или «лучевую» модель Стоуни) [3—5], так и теорию биметаллических пластин [2, 6, 7]. Однако равенство напряжений, рассчитанное по обеим моделям, имеет место только в тех случаях, когда требуется вычисление суммарных напряжений в слоях, например, при определении изгибной жесткости, кривизны пластин и т. д. Наиболее важной характеристикой при изучении деформации в двухслойных полупроводниковых пластинах является величина напряжения в бесконечно тонком продольном волокне пластины, которая определяет изменение эффективных масс, времени жизни и подвижности носителей заряда в деформируемой области полупроводника. В тех случаях, когда деформация полупроводника неоднородна, возникает градиент концентрации носителей заряда, который существенно изменяет характер протекания тока в двухслойной структуре. С этой целью в работе проводится теоретическое изучение распределения напряжений, возникающих в двухслойной изотропной пластине при механическом и термическом изгибах. Анализируется случай малых изгибов пластин, когда распределение напряжений в слоях может быть описано линейной функцией.

Рассмотрим двухслойную пластину, в которой $h_1 = h_2$, $E_1 = E_2 = E$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, где E и α — модуль Юнга и коэффициент линейного расширения пластины соответственно. Пусть пластина с $h = h_1 + h_2$ испытывает чистый изгиб вследствие действия в каком-либо поперечном сечении изгибающего момента. Подобная задача сводится к изгибу однородного прямоугольного бруса, распределение напряжений в котором может быть найдено с использованием теории простых балок [4]:

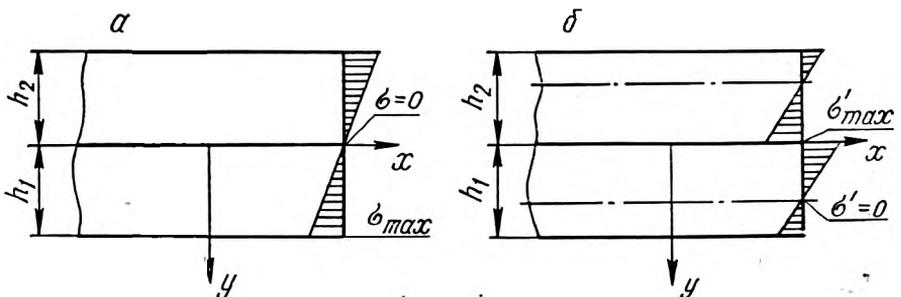
$$\sigma_x = E y / R. \quad (1)$$

Полагая в (1) $y = \pm h/2$ и $y = 0$, строим эпюру распределения напряжений в слоях h_1 и h_2 (см. рисунок, а), из которой следует, что максимальные нормальные напряжения σ_{\max} возникают во внешних волокнах пластины, а нулевые σ — на границе раздела слоев.

Рассмотрим второй случай изгиба аналогичной пластины, в которой $h_1 = h_2$, $E_1 = E_2 = E$ и $\alpha_1 > \alpha_2$. Если при нагревании от температуры T_0 до T двухслойная пластина изгибается и при этом значение R становится равным значению радиуса в первом случае, то распределение напряжений в слоях может быть найдено с использованием теории биметаллических пластин [7]:

$$\sigma_x = (\alpha_1 - \alpha_2) / 2 (T - T_0) [(3y/h) - 1] E. \quad (2)$$

Полагая в (2) $y = \pm h/3$, $y = \pm h/2$ и $y = 0$, строим эпюру распределения напряжений в слоях (см. рисунок, б), из которой следует, что максимальные напряжения σ'_{\max} возникают на границе раздела слоев, а напряжения в наружных волокнах пластины равны $\sigma'_{\max} / 2$. Волокна с нулевыми напряжениями находятся на расстоянии $y = \pm h/3$ от границы раздела слоев. Аналогичным образом можно показать различие в распределении тангенциальных напряжений в слоях пластин.



Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении двухслойного бруса

Применение уравнений (1) и (2) для анализа распределения напряжений в двухслойных пластинах позволило теоретически доказать неравноценность лучевой [3—5] и биметаллической моделей [2, 6, 7], широко применяемых для расчета величин термических обратимых напряжений, возникающих в двухслойных полупроводниковых системах. Большинство авторов [например, 1—3] не учитывало возможности изменений в распределении напряжений по пластине при различных способах изгиба, что явилось причиной противоречивых выводов о влиянии деформаций на изучаемую активную область полупроводника. В случае, если этой областью является $p-n$ -переход, имеющий глубину залегания Δl , то, используя выражения (1) и (2) для расчета напряжений в тонких продольных слоях полупроводниковых пластин, методом графического построения эпюр распределения напряжений можно определить их величины в элементах толщиной Δl , расположенных на одинаковом расстоянии от оси x , которые, как видно из рисунка, различны.

В каждом конкретном случае задача по определению напряжений, возникающих при деформации двухслойных полупроводниковых систем, должна учитывать природу действующих на изгибающуюся систему сил и распределение напряжений в их слоях.

Следует отметить, что имеется достаточное количество работ [8, 9], в которых показано, что термические напряжения сконцентрированы в тонкой области, вблизи границы раздела слоев, т. е. нелинейно распределены по их толщине, в то время как теория биметаллических пластин применима только при линейном распределении напряжений в слоях. Следовательно, основным условием применимости биметаллической модели для расчета термических деформаций в двухслойных системах является линейность распределения напряжений в слоях, которая для достоверности результатов исследований в каждом случае должна подтверждаться экспериментально. Применение биметаллической модели для двухслойных систем с нелинейным распределением напряжений в слоях недопустимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канделаки Т. С., Синица С. П., Эдельман Ф. Л.—Микроэлектроника, 1973, т. 2, № 3, с. 259.
2. Козлов Б. И., Раков А. В.—Электронная техника, 1971, т. 6, № 3, с. 71.
3. Jassodine R. J., Schlegel W. A. J.—Appl. Phys., 1966, v. 37, № 6, p. 2429.
4. Тимошенко С. П. Сопrotивление материалов, т. 1.—М., 1965, с. 363.
5. Whelan M. V., Goemans A. H. and Goossens L. M. C.—Appl. Phys. Lett., 1967, v. 10, № 10, p. 262.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек.—М., 1971, с. 807.
7. Воробьев А. И., Канцельсон О. Г. Термобиметалл и его применение в приборостроении и автоматике.—М.-Л., 1951, с. 127.
8. Козлов Б. И., Раков А. В.—Электронная техника, 1971, т. 6, № 8, с. 68.
9. Serebrinsky J. H.—Solid State Electron, 1970, v. 13, № 11, p. 1435.

Поступила в редакцию
19.05.79.

НИИ ПФП

УДК 537.525.5

В. Е. ГРАКОВ, А. С. МАЙГА

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КАТОДНОЕ ПАДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВАКУУМНЫХ ДУГ

В связи с многочисленными техническими применениями электрических вакуумных дуг их исследование продолжает оставаться актуальным [1]. В МГД-генераторах, вакуумных выключателях, плазмотронах [2, 3] широко используется воздействие на дуги магнитного поля, поэто-

му систематические исследования вакуумных дуг в магнитном поле могут оказаться полезными при решении ряда чисто прикладных задач, а также и для дальнейшего изучения дуговых процессов, относительно которых до сих пор еще нет полной ясности [1].

Вакуумные дуги в поперечном магнитном поле исследовались одним из авторов [4]. Предлагаемая работа посвящена вакуумным дугам замыкания в продольном магнитном поле, причем, как и прежде, внимание в основном концентрируется на таких параметрах дуги, как катодное падение потенциала U_c и средняя продолжительность горения τ . Изучались дуги на чистых металлах Al, Mg, Cr, Co, Ni, Sn, Cd с широким диапазоном различных свойств, влияющих на условия существования катодных пятен. Поскольку дуги были короткими, напряжение горения на них можно было отождествлять с катодным падением. Ток в дугах лишь в несколько раз превышал пороговые значения, благодаря чему структура катодных пятен была наиболее простой. Эти обстоятельства должны, несомненно, благоприятствовать теоретической интерпретации экспериментальных результатов.

Исследования проводились на экспериментальной установке [4], в которой конструкция разрядника изменена так, чтобы дуга возбуждалась между полюсами электромагнита в направлении вдоль магнитного поля. Импульсное питание электромагнита позволило повысить максимальную величину индукции магнитного поля до 0,115 тл. Кроме того, для измерения продолжительности горения дуги в установку был введен электронно-счетный частотомер ЧЗ-33. В связи с тем, что в процессе горения напряжение на электродах дуги испытывает колебания в широком диапазоне частот и амплитуд, для согласования частотомера с исследуемой дугой потребовалось разработать специальный блок с двумя диодными ограничителями. Один ограничитель позволял отделять начальный фронт напряжения горения дуги от небольших перепадов напряжения, связанных с жидкими мостиками при замыкании электродов. Этот начальный фронт, поступая на вход А частотомера, запускал его. Второй ограничитель отделял фронт повышения напряжения, возникающий при погасании дуги, от естественных колебаний дугового напряжения. Фронт погасания подавался на вход Б частотомера и вызывал его остановку. Методика измерений средних значений катодного падения U_c и продолжительности горения дуги τ в общих чертах сохранилась такой же, как и в работе [4].

В ходе исследований установлены следующие экспериментальные факты.

1. Продольное магнитное поле вызывает низкочастотные осцилляции напряжения горения дуги с частотой порядка 100 Гц, причем средний уровень напряжения медленно повышается, достигая наибольшего значения к моменту погасания дуги. Наиболее четко осцилляции проявляются в дугах на Cd, Ni и Cr. Как правило, по мере горения дуги амплитуда осцилляций уменьшается, и через несколько периодов они становятся трудно различимыми. При достаточно сильном магнитном поле дуга проявляет тенденцию к погасанию на нечетных полупериодах осцилляций, соответствующих повышению напряжения горения. Частота осцилляций, по-видимому, не зависит от индукции магнитного поля B и тока дуги i_g , а их амплитуда возрастает с увеличением B и с уменьшением i_g .

2. В исследованной области средний уровень катодного падения U_c линейно возрастает с увеличением индукции магнитного поля B , в некоторых случаях проявляя тенденцию к насыщению. При этом оказалось, что скорость возрастания увеличивается по мере увеличения тока дуги i_g . Величина повышения среднего уровня катодного падения ΔU_c , вызванного магнитным полем с индукцией $B=0,05$ тл в дугах, токи которых i_g лишь незначительно превышают пороговые значения, составляет от 0,2 до 0,5 В, в зависимости от катодного материала дуги (рис. 1).

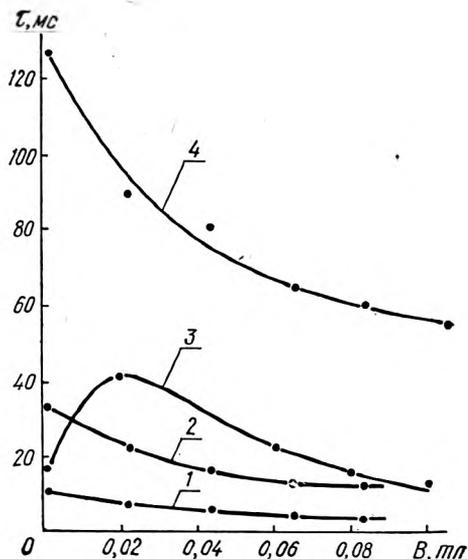
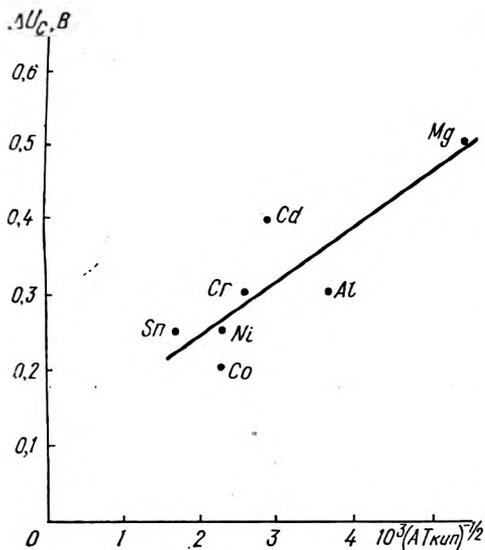


Рис. 1. Зависимость повышения продольным магнитным полем ($B=0,05$ тл) катодного падения ΔU_c вакуумных дуг при минимальных токах от параметра $(AT_{кид})^{-1/2}$.

Рис. 2. Зависимость средней продолжительности горения τ Cr- и Cd-дуг от индукции продольного магнитного поля B :

1 — Cr-дуга, $i_g = 8$ А; 2 — Cr-дуга, $i_g = 1$ А; 3 — Cr-дуга, $i_g = 15$ А; 4 — Cd-дуга, $i_g = 3,1$ А

3. Средняя продолжительность горения дуг τ убывает с увеличением магнитного поля (рис. 2). В большинстве случаев убывание монотонное, близкое к экспоненциальному, однако для Cr и Ni-дуг при достаточно больших токах имеет место максимум τ , расположенный в области $B=0,02 \div 0,04$ тл. Зависимость τ от B ослабевает по мере приближения тока дуги i_g к пороговому значению.

Наиболее подробное исследование зависимости τ от B выполнено для Cd-дуги в области токов от порогового до $i_g=2$ А. Установлена следующая эмпирическая формула, связывающая τ с током дуги и индукцией магнитного поля:

$$\ln \tau = 4,7(i_g - i_{g0}) - (60i_g - 42)B; \quad (1)$$

$$i_{g0} \leq i_g \leq 2A.$$

Здесь τ выражается в миллисекундах, i_g — в амперах, B — в теслах. Ток i_{g0} имеет смысл порогового тока и равен приблизительно 0,3 А. При токах дуги $i_g > 2$ А формула (1) дает заниженные значения τ .

4. Магнитное поле оказывает влияние на характер свечения прикатодного пространства. Наиболее отчетливо это влияние проявляется в случае Cd-дуги. В отсутствие магнитного поля слабое свечение равномерно заполняет все пространство, примыкающее к электродам. При включении продольного магнитного поля зона свечения стягивается в шнур, направленный от катода к аноду, который перемещается вместе с катодным пятном. По мере увеличения магнитного поля толщина этого шнура уменьшается. Эффект шнурования, по-видимому, не зависит от знака направления магнитного поля относительно тока дуги, как, впрочем, не зависят от него явления и параметры, описанные в пунктах 1—3.

Существенно, что каких-либо заметных особенностей в поведении дуг на ферромагнитных катодах при наложении на них продольного магнитного поля обнаружено не было.

Переходя к предварительному анализу экспериментальных результатов, коснемся вначале возможных физических причин уменьшения среднего времени горения дуги продольным магнитным полем. Умень-

шение τ фактически означает снижение внутренней устойчивости дуги. Ключ к объяснению этого явления, на наш взгляд, дает описанный эффект «шнурования». Продольное магнитное поле закручивает ионы катодных плазменных струй вокруг оси, перпендикулярной к катоду, не позволяя им распространяться вдоль поверхности катода. Вызванное этим уменьшение тангенциальных плазменных потоков приводит к тому, что существенно затрудняется переход катодного пятна на соседние участки катода и, следовательно, снижается эффективность восстановительного механизма. По-видимому, одновременно появляется также дополнительная макроскопическая неустойчивость, с которой связаны сравнительно медленные осцилляции напряжения горения дуги. Выяснение физической природы этой неустойчивости потребует новых экспериментов. Что касается максимумов на кривых зависимости τ от B в дугах на Ni и Cr, то их происхождение, возможно, связано с появлением стационарных катодных пятен второго типа.

Эффект «шнурования» позволяет в общих чертах объяснить также наблюдавшееся в продольном магнитном поле повышение катодного падения, которое, по-видимому, является простым следствием увеличения концентрации заряженных частиц в катодном пятне. Величина повышения катодного падения ΔU_c , очевидно, будет тем больше, чем сильнее магнитное поле затруднит поперечную диффузию ионов. Отсюда следует, что величина ΔU_c должна находиться в функциональной связи с циклотронным радиусом ионов R_i :

$$R_i = m_i v_i / eB, \quad (2)$$

где m_i — масса ионов; v_i — их скорость; e — элементарный заряд. Характер этой функциональной связи можно найти из экспериментально обнаруженной прямо пропорциональной зависимости ΔU_c от B . Очевидно,

$$\Delta U_c \sim B / m_i v_i. \quad (3)$$

Как показано в [5], скорость ионов определяется температурой кипения материала катода $T_{\text{кип}}$ и его атомным весом A :

$$v_i \sim (T_{\text{кип}}/A)^{1/2}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\Delta U_c \sim B / (AT_{\text{кип}})^{1/2}, \quad (5)$$

откуда следует, что при фиксированном значении B повышение катодного падения ΔU_c , вызванное магнитным полем, прямо пропорционально параметру $(AT_{\text{кип}})^{-1/2}$.

Эти соображения более всего применимы к режимам с минимальным током дуги, когда условия в катодном пятне являются наиболее простыми и в значительной степени унифицированными. И действительно, рис. 1 указывает на достаточно четкую корреляцию экспериментальных значений ΔU_c (при $B=0,05$ тл) с величиной $(AT_{\text{кип}})^{-1/2}$, что свидетельствует в пользу предложенного механизма. Вместе с тем ясно, что на величину ΔU_c должна оказывать влияние также отмеченная макроскопическая неустойчивость дуги, учесть которую окажется возможным лишь после выяснения ее природы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А., Раховский В. И.—УФН, 1978, т. 125, вып. 4, с. 665.
2. Перцев А. А., Гусева Л. Г., Куликов А. Е.—ЖТФ, 1977, т. 47, вып. 10, с. 2112.
3. Косинов В. А., Янковский А. И.—В сб.: Материалы к 7-й Всесоюзной конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 1.—Алма-Ата, 1977.
4. Граков В. Е.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1978, № 1, с. 38.
5. Граков В. Е., Майга А. С.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1980, № 3, с. 62.

В. А. ДАНИЛОВ, С. А. ЗЕНЧЕНКО, Г. В. ШАРОНОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ АРГОНОВОГО ЛАЗЕРА В РЕЖИМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД

Режим синхронизации мод в лазерах является эффективным средством повышения пиковой мощности излучения, приводит к стабилизации спектра и уменьшению шумов в излучении лазера. Большой интерес к синхронизации мод аргонового лазера объясняется возможностью его широкого использования для синхронной накачки лазеров на органических красителях, измерения времен высвечивания флуоресценции, оптической связи, локации и т. д. В работах [1, 2] подробно изучена временная структура генерации аргонового лазера с пассивной синхронизацией мод с помощью внутррезонаторной поглощающей ячейки. Появление импульсной последовательности в этом случае не определено во времени, а спектральные и временные характеристики зависят от условий возбуждения активной среды. При активной синхронизации мод частота следования импульсов определяется частотой модуляции, а фаза оптических импульсов жестко связана с фазой внешнего модулирующего сигнала, что облегчает выделение единичного импульса из последовательности. Изменение соотношений между частотой модуляции и частотой межмодовых биений в режиме активной синхронизации мод позволяет менять спектральные и временные характеристики таких лазеров. В литературе в основном приводятся результаты экспериментального исследования активной синхронизации мод аргонового лазера на частоте межмодовых биений [3—5].

В настоящей работе исследовались спектральные и временные характеристики Ar^+ -лазера ($\lambda=488$ нм) в режиме активной синхронизации мод как на частоте межмодовых биений, так и на удвоенной частоте. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.

Синхронизация мод лазера достигалась резонансной модуляцией потерь резонатора с помощью акустооптического модулятора стоячей волны (АОМ). Одномодовый режим лазера обеспечивался ирисовой диафрагмой (Д). Сигнал на АОМ подавался с генератора стандартных сигналов (ГСС) через усилитель мощности (УМ). Выходная мощность излучения регистрировалась измерителем мощности (ИМО), спектр излучения контролировался сканирующим интерферометром (СИ), фотодетектором (ФД) и осциллографом (О), оптические импульсы регистрировались лавинным фотодиодом (ЛФД) и стробоскопическим осцил-

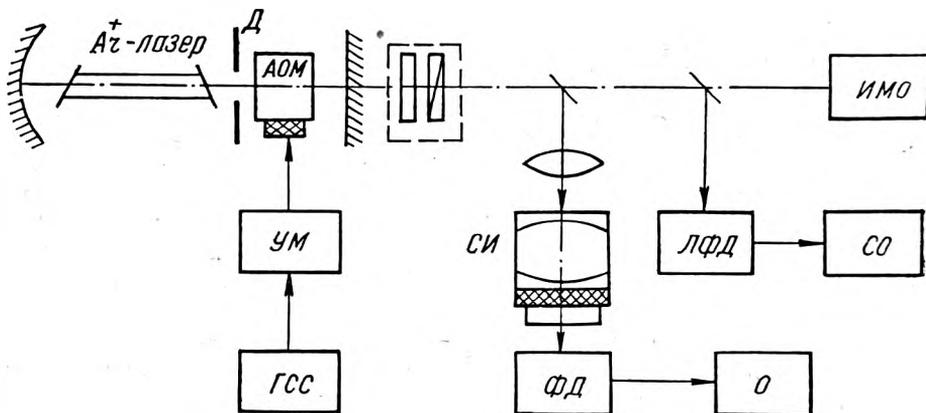


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки

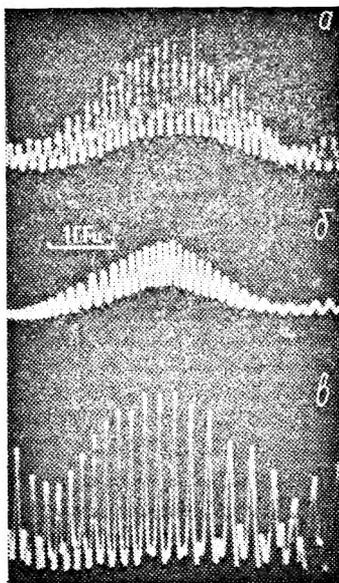


Рис. 2. Спектры излучения аргонового лазера:
a — режим свободной генерации;
б — синхронизация мод на частоте межмодовых биений; *в* — синхронизация мод на удвоенной частоте межмодовых биений

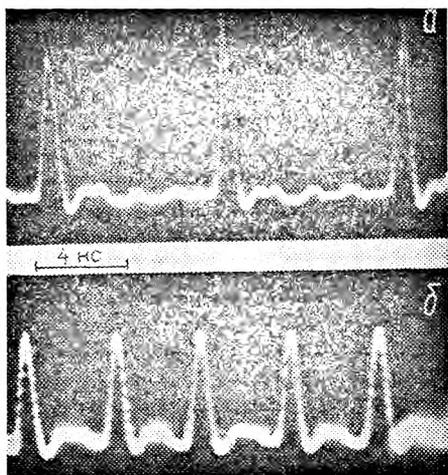


Рис. 3. Выходные импульсы излучения аргонового лазера в режиме синхронизации мод:
a — на частоте межмодовых биений; *б* — на удвоенной частоте межмодовых биений

лографом (СО). Спектры излучения фотографировались с экрана осциллографа (О) при однократном запуске развертки.

Синхронизация мод осуществлялась как на частоте межмодовых биений, так и на удвоенной частоте с помощью одного и того же акустооптического модулятора. При этом статические параметры лазера не менялись. Спектры выходного излучения приведены на рис. 2, импульсы излучения — на рис. 3. Устойчивая синхронизация достигалась в диапазоне расстроек частоты модуляции и частоты межмодовых биений порядка 10^{-3} .

При синхронизации мод на частоте межмодовых биений происходит стабилизация спектра (см. рис. 2, *б*) по сравнению со спектром в режиме свободной генерации (см. рис. 2, *а*) и уменьшение выходной мощности лазера примерно на 30—50% в зависимости от уровня возбуждения активной среды. Стабилизация спектра приводит к импульсному режиму работы лазера (см. рис. 3, *а*) с частотой повторения импульсов, равной частоте модуляции.

Модуляция на удвоенной частоте межмодовых биений также приводит к стабилизации спектра (см. рис. 2, *в*) и возникновению импульсной генерации на удвоенной частоте (см. рис. 3, *б*). Амплитуда отдельных мод при этом увеличивается, а интегральная мощность практически не меняется по сравнению с режимом свободной генерации. Ширина спектра несколько увеличивается. Базовое расстояние интерферометра не позволило получить полный спектр генерации в этом случае. Импульсная мощность при этом падает, что обусловлено уменьшением скважности импульсов и меньшим количеством связанных мод. Измеренная длительность импульсов в первом и втором случаях составляла 300 пс и определялась шириной полосы детектирующей системы.

Уменьшение выходной мощности в случае синхронизации мод на частоте межмодовых биений по сравнению с режимом свободной генерации обусловлено малым временем жизни верхнего лазерного уровня (8—10) нс [6], сравнимого в нашем случае со временем обхода импульсом

резонатора, что приводит к большой доле спонтанного излучения. В работе [5] получено уменьшение выходной мощности в режиме синхронизации мод ($\lambda = 514,5$ нм) при длине резонатора 2 м на 60% от мощности в режиме свободной генерации. В случае синхронизации на удвоенной частоте можно считать, что в резонаторе существуют два импульса, разделенные временным интервалом и последовательно снимающие возбуждение верхнего лазерного уровня. Доля спонтанного излучения при этом уменьшается и выходная мощность практически не меняется. Средняя мощность излучения в режиме синхронизации мод на частоте межмодовых биений составляла 150 мВт. Полученные результаты хорошо согласуются с данными работ [3—5].

Проведенные исследования показывают возможность синхронизации мод аргонового лазера не только на частоте межмодовых биений, но и на удвоенной частоте. При этом модуляция на удвоенной частоте не приводит к уменьшению интегральной мощности лазера. Поскольку стандартные трубки аргоновых лазеров имеют длину порядка 1 м, повышенные частоты следования импульсов осуществимо именно при модуляции на частотах, кратных частоте межмодовых биений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисова М. С.— Оптика и спектроскопия, 1972, т. 33, вып. 6, с. 1134.
2. Виноградов А. В., Криндач Д. П., Назаров Б. И., Салимов В. М.— В сб.: Лазеры на основе сложных органических соединений и их применение. Тез. докл. II Всесоюзной конфер. (Душанбе, 1977).— Минск, 1977, с. 47.
3. Bennet W. R., Carlin Ir., D. B., Collins G. I.— IEEE. J. Quantum Electronics, 1974, v. 10, № 1, p. 97.
4. Chan C. K., Sari S. O.— Appl. Phys. Lett., 1974, v. 25, № 7, p. 403.
5. Кестер, Даубен.— Приборы для научных исследований, 1978, № 8, с. 177.
6. Siegman A. E., Kuizenga D. J.— Opto-electronics, 1970, v. 6, p. 43.

Поступила в редакцию
04.07.79.

НИИ ПФП

УДК 621.375

ФАМ ЧОНГ ХЬЕН, Б. Ю. ХАНОХ, А. П. ХАПАЛЮК

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ В РЕЗОНАТОРЕ С ТЕТРАЭДРИЧЕСКИМ ПРИЗМЕННЫМ ОТРАЖАТЕЛЕМ

Особенностью тетраэдрического призмного отражателя является строго обратное направление распространения отраженного им луча по сравнению с падающим, что позволяет применять его в лазерном резонаторе в качестве отражающего элемента. По этому вопросу имеется несколько публикаций [1, 3], но систематических исследований, по-видимому, не проводилось. Например, в [1] рассмотрены лишь собственные состояния поляризации одного из вариантов резонатора с тетраэдрической призмой. Характерной особенностью таких отражателей следует считать существенное усложнение их поляризационных характеристик [2]. В данной работе исследуются основные особенности генерации в резонаторе, усложненном одной отражающей тетраэдрической призмой.

Модель изучаемого резонатора и необходимые обозначения показана

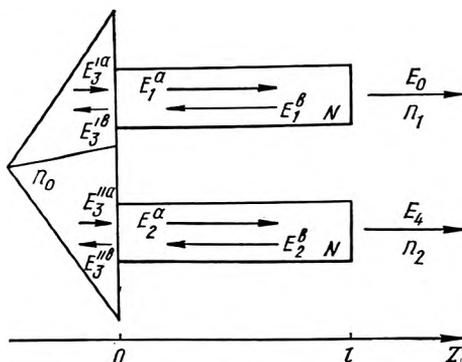


Схема резонатора с тетраэдрическим призмным отражателем

ны на рисунке. Два одинаковых стержня активной среды выставлены параллельно, свободные концы их граничат со средами, показатели преломления которых n_1 и n_2 . К противоположным их концам вплотную ставится тетраэдрический призмный отражатель с показателем преломления n_0 так, чтобы поперечные сечения стержней полностью находились в двух противоположных секторах отражения входной грани призмы. Это необходимо для согласования поляризационных характеристик резонатора, так как лучи, отраженные от разных секторов, имеют различные поляризации [2].

Условие стационарной генерации в таком резонаторе можно получить обычным методом в плосковолновом приближении. Естественно ограничиться одномерными волнами с перпендикулярным к плоской границе стержень — призма направлением распространения. Эти волны могут быть записаны в виде

$$\vec{E}_j^a = \vec{A}_j e^{-ikN_j z}, \vec{H}_j^a = N_j \vec{E}_j^b, \vec{A}_j = a_{js} \vec{s} + a_{jp} \vec{p}, \vec{E}_j^b = \vec{B}_j e^{ikN_j z}, \vec{H}_j^b = -N_j \vec{E}_j^a, \\ \vec{B}_j = b_{js} \vec{s} + b_{jp} \vec{p} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где \vec{E}_j^a и \vec{H}_j^a — электрический и магнитный векторы волн, распространяющихся вдоль положительного, а \vec{E}_j^b и \vec{H}_j^b — отрицательного направления оси z ; \vec{A}_j и \vec{B}_j — их амплитуды; N_j — показатель преломления среды, в которой распространяется волна, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны в вакууме. Поляризация волн на данном этапе не конкретизируется; коэффициенты a_{js} , a_{jp} , b_{js} и b_{jp} могут принимать произвольные значения, а \vec{s} и \vec{p} — единичные взаимно перпендикулярные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси z .

Как обычно, значения амплитуд \vec{A}_j и \vec{B}_j волны определяются из условия непрерывности тангенциальных составляющих поля при переходе через границы различных сред. На свободных концах стержня ($z = l$) эти условия запишутся в виде

$$\vec{A}_0 e^{-ikn_1 l} = \vec{A}_1 e^{-ikNl} + \vec{B}_1 e^{ikNl}, n_1 \vec{A}_0 e^{-ikn_1 l} = N (\vec{A}_1 e^{-ikNl} - \vec{B}_1 e^{ikNl}), \\ \vec{A}_4 e^{-ikn_2 l} = \vec{A}_2 e^{-ikNl} + \vec{B}_2 e^{ikNl}, \\ n_2 \vec{A}_4 e^{-ikn_2 l} = N (\vec{A}_2 e^{-ikNl} - \vec{B}_2 e^{ikNl}), \quad (2)$$

где $N = n + ik$ — комплексный показатель преломления активных стержней.

Аналогичные равенства получаются на границе стержень — призма ($z = 0$):

$$\vec{A}_1 + \vec{B}_1 = \vec{A}'_3 + \vec{B}'_3, N (\vec{A}_1 - \vec{B}_1) = n_0 (\vec{A}'_3 - \vec{B}'_3), \\ \vec{A}_2 + \vec{B}_2 = \vec{A}''_3 + \vec{B}''_3, N (\vec{A}_2 - \vec{B}_2) = n_0 (\vec{A}''_3 - \vec{B}''_3). \quad (3)$$

К уравнениям (2) — (3) следует добавить уравнения связи между амплитудами волн, распространяющихся внутри призмы. Эти уравнения нетрудно записать, если известна матрица, характеризующая поляризующее действие самой призмы.

В общем случае на границе $z = 0$ условия связи для векторных амплитуд волн, распространяющихся внутри призмы, могут быть записаны в виде

$$A'_3 = CB''_3 e^{-ikn_0 d}, A''_3 = CB'_3 e^{-ikn_0 d}, \quad (4)$$

где A_3 , B_3 — матрицы-столбцы,

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{3s} \\ a_{3p} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} b_{3s} \\ b_{3p} \end{pmatrix};$$

C — 2×2 -матрица поляризующего действия призмы, конкретный вид которой приводится в работе [2]. Величина kn_0d в (4) определяет набег фазы волн при распространении их внутри призмы.

Методом исключения отдельных амплитуд систему уравнений (2) — (4) можно свести к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{4s} и a_{4p} :

$$\begin{aligned} (C_{22}Y - C_{11})a_{4s} - (Y+1)C_{12}a_{4p} &= 0, \\ (Y+1)C_{21}a_{4s} - (C_{11}Y - C_{22})a_{4p} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где C_{ij} ($i, j = 1, 2$) — компоненты матрицы C , $R_j = \frac{N-n_j}{N+n_j}$ ($j = 0, 1, 2$) — амплитудные коэффициенты отражения Френеля;

$$Y = \frac{1}{|C|} e^{ikn_0d} \frac{R_0(R_1+R_2) - R_0^2 R_1 R_2 e^{-2ikNl} - e^{2ikNl}}{R_0(R_1+R_2) - R_0^2 e^{2ikNl} - R_1 R_2 e^{-2ikNl}}, \quad (6)$$

$|C| = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}$ — определитель матрицы C .

Условием стационарной генерации является разрешимость системы (5), которая записывается в виде:

$$Y^2 - \left(\frac{C_s^2}{|C|} - 2 \right) Y + 1 = 0. \quad (7)$$

Это алгебраическое уравнение имеет решение:

$$Y = \frac{1}{2|C|} \left(C_s^2 - 2|C| \pm C_s \sqrt{C_s^2 4|C|} \right) = \frac{\sigma^2}{|C|}, \quad (8)$$

где $C_s = C_{11} + C_{22}$ — след матрицы C , а величина σ , определяемая из (8), называется собственным значением собственного состояния поляризации призмы [2] и характеризует изменение фазы и амплитуды волн при отражении от боковых граней призмы. Если в призме нет потерь энергии волны, то σ будет определять только сдвиг фазы, возникающий при отражении на боковых гранях призмы, и по модулю будет равна единице [1] ($\sigma = \exp(i\gamma_0)$, γ_0 — действительное число).

Если на боковых гранях призмы выполняется условие полного внутреннего отражения, то фазовый сдвиг γ_0 определяется по формуле

$$\gamma_0 = \frac{3}{2}(\varphi + \chi) - \frac{\pi}{2} \pm \arccos \left[\frac{1}{2} \left| \sin \frac{\gamma}{2} \right| \left(2 + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) \right], \quad (9)$$

где φ , χ и γ определяются из формул Френеля;

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{n_0^2 \sin^2 \Theta - 1}}{n_0 \cos \Theta}, \quad \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = n_0^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2}, \quad (10)$$

Θ — угол падения луча на отражающую боковую грань призмы.

Подставив (8) в (6) и решая получившееся уравнение относительно $\exp(-2ikNl)$, получим условие генерации в виде:

$$\exp(-2ikNl) = \frac{R_0(R_1+R_2)(\rho-1) \pm \sqrt{R_0^2(R_1-R_2)^2(\rho-1)^2 + 4R_1R_2\rho(1-R_0^2)^2}}{2R_1R_2(\rho-R_0^2)}, \quad (11)$$

где $\rho = \exp 2i(\gamma_0 - kn_0d)$.

Из (11) видно, что роль призмы определяется параметром ρ . Влиянием призмы можно пренебречь, если матрица ее поляризационного действия будет единичной ($C=1$) и сдвиг фазы внутри призмы кратен π ($kn_0d = m\pi$, $m=0, 1, 2, \dots$). В этом случае $\rho=1$, (11) переходит

в обычное условие генерации простого резонатора с активным стержнем длиной $2l$:

$$\sqrt{R_1 R_2} e^{-2ikNl} = \pm 1. \quad (12)$$

Другой предельный случай получается, если волна не проникает в призму ($R_0=1$), тогда (11) переходит в обычное условие генерации каждого стержня по отдельности:

$$R_j e^{-2ikNl} = 1 \quad (j=1, 2). \quad (13)$$

Для того, чтобы выяснить отличие резонатора с тетраэдрической призмой от обычного простого резонатора, необходимо провести сравнение результатов исследования (11) и предельных условий (12) и (13).

Проще такой анализ провести для чистого случая симметричного резонатора, когда $R_1=R_2=R$ ($n_1=n_2=n$). При этом условие генерации (11) несколько упрощается:

$$R e^{-2ikNl} = \frac{1 \pm R_0 \sqrt{\rho}}{R_0 \pm \sqrt{\rho}} = \frac{1 \pm R_0 e^{i(\gamma_0 - kn_0 d)}}{R_0 \pm e^{i(\gamma_0 - kn_0 d)}}. \quad (14)$$

Выделяя модуль и фазу в комплексном уравнении (14), получаем фазовое и энергетическое условия генерации:

$$2knl = 2m\pi + \alpha = \text{arctg} \frac{(1 - r_0) \sin(\gamma_0 - kn_0 d)}{(1 + r_0) \cos(\gamma_0 - kn_0 d) \pm 2\sqrt{r_0} \cos \alpha_0};$$

$$r e^{4k\chi l} = \frac{1 + r_0 \pm 2\sqrt{r_0} \cos(\gamma_0 + \alpha_0 - kn_0 d)}{1 + r_0 \pm 2\sqrt{r_0} \cos(\gamma_0 - \alpha_0 - kn_0 d)}, \quad (15)$$

где целое число m определяет номер собственной частоты, а r , r_0 , α и α_0 можно найти из тождеств $R = \sqrt{r} e^{i\alpha}$, $R_0 = \sqrt{r_0} e^{i\alpha_0}$.

Фазовое и энергетическое условия генерации соответствующего простого резонатора (12) при $R_1=R_2=R$ записываются в виде

$$2knl - \alpha = m\pi, \quad r e^{4k\chi l} = 1. \quad (16)$$

Сравнение формул (15) и (16) показывает, что точное определение собственных частот резонатора с призмой требует решения трансцендентного уравнения (15). Однако в общем случае спектр собственных частот резонатора с призмой и без призмы неодинаков. К тому же спектр резонатора с призмой неэквидистантен, и его характеристики зависят от геометрических размеров призмы. Спектры обоих резонаторов будут совпадать только при условии $(1 - r_0) \sin(\gamma_0 - kn_0 d) = 0$.

Порог генерации определяется из второго уравнения в (15). Для простого резонатора правая часть этого уравнения равна единице. Поэтому для мод, у которых правая часть во втором уравнении (15) меньше единицы, порог генерации будет ниже, чем в резонаторе без призмы: если больше единицы — порог генерации будет выше. Призма не изменяет порога генерации при условии $\sin \alpha_0 \sin(kn_0 d - \gamma_0) = 0$. Если $\sin \alpha_0 = 0$, для всех собственных типов колебаний порог генерации оказывается неизменным. Второе условие $\sin(kn_0 d - \gamma_0) = 0$, вообще говоря, может выполняться только для отдельных типов колебаний.

В зависимости от размеров призмы d правая часть энергетического условия (15) генерации периодически изменяется от минимального $\frac{(1 - \sqrt{r_0})^2}{(1 + \sqrt{r_0})^2}$ до максимального $\frac{(1 + \sqrt{r_0})^2}{(1 - \sqrt{r_0})^2}$ значения.

В зависимости от этого левая часть этого равенства будет изменяться в пределах:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{r_0}}{1 + \sqrt{r_0}} \right)^2 \leq r e^{4k\chi l} \leq \left(\frac{1 + \sqrt{r_0}}{1 - \sqrt{r_0}} \right)^2, \quad (17)$$

поэтому при достаточно большом значении d интервал возможного изменения порога генерации может оказаться велик. При этом для одной части собственных колебаний порог уменьшается, для второй части — увеличивается, и величина этого изменения зависит от частоты колебания. Таким образом, резонатор с призмой является селективным по порогу генерации.

Наконец, поляризационные характеристики резонатора с призмой совершенно иные, чем резонатора без призмы. Все собственные типы колебаний резонатора с призмой имеют вполне определенную поляризацию — собственную. Состояние поляризации выходного излучения E_4 определяется отношением $a_{4p} : a_{4s}$ и, согласно (5), равно

$$\frac{a_{4p}}{a_{4s}} = \frac{C_{22}Y - C_{11}}{(Y + 1)C_{12}} = \frac{\sigma - C_{11}}{C_{12}}. \quad (18)$$

Такое состояние поляризации совпадает с собственным состоянием поляризации призмы [1]. Известно, что при нормальном падении света на плоскую поверхность, поляризационные характеристики для преломления отраженного и падающего света одинаковы. Следовательно, резонатор с тетраэдрической призмой характеризуется собственной поляризацией, которая совпадает с собственной поляризацией самой призмы. Каждая такая призма имеет две собственные (как правило, эллиптические) поляризации. Только в одной из двух этих поляризаций и будет находиться излучение самого резонатора.

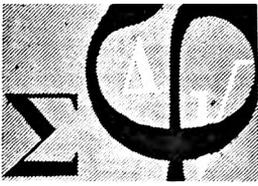
Таким образом, при использовании в лазерном резонаторе тетраэдрической призмы полного отражения появляются новые параметры, изменением которых можно существенно управлять основными характеристиками лазера: спектром, порогом генерации и поляризацией выходящего луча.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реск Е. Р.— IOSA, 1962, v. 52, № 3, p. 253.
2. Бондаренко И. Д., Ханох Б. Ю.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1., физ., мат. и мех., 1979, № 1, с. 7.
3. Мэй глэнд А., Данин М. Введение в физику лазеров.— М., 1978.

Поступила в редакцию
06.09.79.

НИИ ПФФ



В. И. ГРОМАК, Л. А. ПИЛИПЧУК, Е. В. БАЧУРИНА

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЮСОВ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В работе Н. П. Еругина [1] поставлена задача о нахождении зависимости расположения полюсов решений уравнений Пенлеве от начальных данных. Там же эта задача решается для специального класса решений второго уравнения Пенлеве:

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha. \quad (1)$$

В настоящей заметке с помощью численных методов решения уравнения (1) находятся области на плоскости независимого переменного $\{z\}$, где решение уравнения [1] с начальными условиями

$$w(z_0) = w_0, \quad w'(z_0) = w'_0 \quad (2)$$

не имеет полюсов, и области, где решение может иметь полюсы. Аналогичная задача для первого и второго уравнения Пенлеве на вещественной оси решалась в [2]. Однако авторам работы [2] не было известно о существовании рациональных решений уравнения (1) при целых α . Следовательно, численные результаты работы [2] и настоящей заметки легко проверяются на точность, так как для $\alpha = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ полюсы рациональных решений известны [3].

Любое решение уравнения (1) представляет собой функцию мероморфную:

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)},$$

где $u(z)$, $v(z)$ — целые функции, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} uu'' - u'^2 = -ziv - v'; \\ vv'' - v'^2 = -2iv. \end{cases}$$

Любое решение уравнения (1), отличное от рационального, имеет бесконечное число простых полюсов, сгущающихся к $z = \infty$.

Для нахождения ближайшего полюса z_1 к точке голоморфности z_0 решения уравнения (1) с начальными условиями (2) использован метод Рунге — Кутты, а также метод непрерывного аналитического продолжения [4].

К решению поставленной задачи было привлечено два указанных метода с целью отбора из них наиболее приемлемого, а также для сравнения результатов, полученных различными численными методами. Программа позволяет производить счет при различных начальных условиях (2) и различных значениях параметра α . Впрочем, параметр α можно рассмотреть только на интервале $[0, 1)$. Так как в [5] получен аналитический алгоритм, позволяющий построить решение уравнения

- (1) при любом значении параметра α , если известно решение уравнения
 (1) для α из $M \leq \operatorname{Re} \alpha < M+1, \forall M \in \mathbb{R}$.

Таблица 1

α	№	x	y	$\sim x$
0,0	1	0	1,0	
	2	0,1	1,01022	
	3	0,2	1,04218	

	42	1,260910	516,617	
	43	1,262472	1961,31	
0,2	44	1,264034	2986250,0	
	45	1,265596	∞^*	1,270281

0,4	...	1,242159	∞	1,245282

0,6	...	1,218722	∞	1,223407

0,8	...	1,198411	∞	1,201531

1,0	...	1,181923	∞	1,182784
	...	1,163871	∞	1,164033

* Знак ∞ означает, что значение x при соответствующем значении параметра α подозрительно на полюс функции $y(x)$.

Таблица 2

№	z	w
1	$0,0+0,1i$	1,0
2	$0,1+0,1i$	$1,01022+0,000503i$
3	$0,2+0,1i$	$1,04218+0,002050i$
4	$0,3+0,1i$	$1,09903+0,004800i$
5	$0,4+0,1i$	$1,18598+0,009026i$
6	$0,5+0,1i$	$1,31145+0,015271i$
...
402	$1,829521+0,1i$	$198,708-7,67674i$
403	$1,831083+0,1i$	$278,570-16,0507i$
404	$1,832645+0,1i$	$515,397-5084i$
405	$1,834208+0,1i$	$1862,15-563,271i$
406	$1,83577+0,1i$	$-1573610-2067420i$
407	$1,837332+0,1i$	∞

Решение задачи проводилось в двух случаях, соответственно на вещественной оси и на комплексной плоскости.

1. На вещественной оси решение задачи осуществлялось для следующих начальных условий: $x_0=0, y(0)=1, y'(0)=0$ при значениях параметра $\alpha=0, 0(0, 2)1, 0$. Оказалось, что все полюса расположены вне

отрезка $[0, 1]$. В табл. 1 приведены результаты счета на вещественной оси по методу Рунге — Кутта и методу непрерывного аналитического продолжения.

В табл. 1 x и y соответствуют значениям аргумента и функции, полученным по методу Рунге — Кутта четвертого порядка точности с вычислительной схемой:

$$\Delta y = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5),$$

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x+h, y+k_3), \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

В табл. 1 \tilde{x} — точки, полученные с помощью метода непрерывного аналитического продолжения, в которых значение функции $y(x)$ подозрительно на полюс.

2. На комплексной плоскости решение задачи проводилось для начальных условий: $\omega(0) = 1, \omega'(0) = 0$.

Счет проводился на неравномерной сетке узлов

$z_{kj} = x_k + iy_j, x_k = x_{k-1} + h_k, x_0 = 0, h_k$ — шаг, $y_j = y_0 + j\tau, y_0 = 0, \tau = 0, 1$, причем при переходе на каждый новый $j+1$ слой в качестве ω_0 и ω'_0 были взяты соответственно значения $\omega(z_{0j}), \omega'(z_{0j})$.

На плоскости (z), $\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z > 0$ найден первый полюс функции $\omega(z), z = 1,837332 + 0,1i$. Результаты счета приведены в табл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П.— Докл. АН БССР, 1958, т. 2, № 4.
2. Davis H. T., Scott W., Springer G., Resch D.— J. Northwestern University Studies, 1956, № 3.
3. Яблонский А. И.— Вестн АН БССР. Сер. физ. техн. наук, 1959, № 3.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2.— М., 1950.
5. Воробьев А. П.— Дифференц. уравнения, 1965, т. I, № 1.

Поступила в редакцию
25.01.78.

Кафедры дифференциальных уравнений
и общего программирования

УДК 681.3.06

Г. А. ДРОБУШЕВИЧ, ТО ТУАН

О СТРУКТУРНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ НА ЯЗЫКЕ АССЕМБЛЕР

В последние годы наметился значительный интерес к технологии программирования — совокупности знаний о способах и средствах получения программного продукта [1]. Литература, посвященная технологии структурного программирования на языках высокого уровня довольно обширна, однако в сравнительно немногочисленных статьях по структурному программированию на языке Ассемблер рассматривается возможность реализации с помощью макросредств языка Ассемблер необходимых управляющих структур типа *IF — THEN — ELSE — ENDF*, *DO — WHILE (UNTIL) — ENDDO*. В действительности, основной концепцией структурного программирования является концепция программирования сверху вниз [2] наряду с концепцией структурного кодирования, т. е. кодирования с использованием только трех базовых управляющих структур [3]. По мнению Деннинга, структурное программирование есть метод проектирования программ по нисходящей схеме поэтапного усовершенствования с использованием при кодировании блок-схемных образцов с одним входом и одним выходом. К этому определению

структурного программирования нужно добавить еще требование, заключающееся в том, что программные проекты должны быть организованы в соответствии с концепцией «бригады с главным программистом», предложенной и обсужденной Вайкером и Миллзом [4]. На наш взгляд, наиболее удачным является определение Хоора [5], по которому структурное программирование представляет собой систематическое применение абстракций как средства компенсации количественной ограниченности человека [6] для управления массой сложных деталей в процессе программирования.

Трудность создания и отладки Ассемблер-программ общеизвестна. Практика нашей работы показывает, что процесс обучения студентов языку Ассемблер не менее сложен, чем процесс программирования на нем. Предложенный нами структурный подход к обучению языкам программирования и языку Ассемблер, в частности, является попыткой совместить методологию обучения и методологию структурного программирования и, таким образом, систематизировать процесс обучения и формирования структурного мышления [7].

В качестве примера структурного программирования сверху вниз на языке Ассемблер рассмотрим задачу суммирования n двухбайтных упакованных чисел из массива M (входные данные вводятся с перфокарт). Очевидна следующая общая структура требуемой программы.

1. <НАЧАЛО>
2. <ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ>
3. <ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ>
4. <ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТА>
5. <ОСТАНОВ>
6. <ОБЪЯВЛЕНИЕ РАБОЧИХ ПОЛЕЙ>
7. <КОНЕЦ>

Для облегчения записи этого алгоритма будем использовать специально разработанный нами макроязык *ASTRU*. Пусть имеется следующая программа.

```
SUMAP2 PROC MAIN    основная процедура
      INPUT (R3)     ввод n в регистр R3
      INM  M,(R3)    ввод исходного вектора размера n
      <вычисление суммы>
      OUTPUT ('СУММА=',S) в S размещается сумма
      STOP          останов
      DCL  (M,100PL2),(S,PL4) объявление
      ENDPROC SUMAP2    конец процедуры
```

Теперь будем конкретизировать блок <ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ> (рис. 1). Прямоугольник наглядно изображает цикл, который должен повторяться n раз. Очевидно преимущество предлагаемого способа изображения схемы программ перед традиционной блок-схемой, которая содержит много лишних сложных фигур и линий.

На уровне 4 производится уточнение объекта M_i записью $0(2, R_2)$, которая является явным заданием адреса памяти с указанием длины. На этом же уровне возникает новый объект R_2 , являющийся наглядным обозначением общего регистра 2. Новый объект приведет к новым операторам, которые вводятся на уровне 5. Оператор $R_2 = A(M)$ пересылает адрес массива M в регистр R_2 . На уровне 7 вводятся макрокоманды *REPEAT* и *ENDREP*, которые должны реализовать требуемый цикл. Если учитывать, что число n хранится в регистре R_3 , то уровень 7 должен выглядеть следующим:

```
S=0
R2=A(M)
REPEAT TIMES=R3
  S=S+0(2,R2)
  R2=R2+2
ENDREP
```

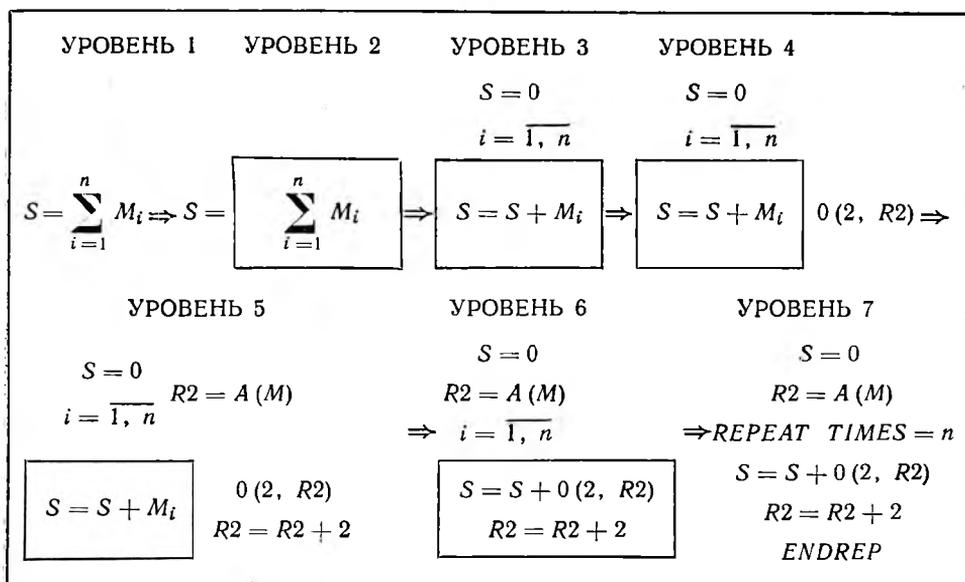


Рис. 1. Технологический процесс реализации блока <ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ>

После добавления необходимых имен и разделителей получается следующий фрагмент на языке *ASTRU*:

```

PAC S, =, 0
FIX R2, =, A(M)
REPEAT TIMES = R3
  PAC S, =, S, +, 0(2, R2)
  FIX R2, =, R2, +, 2
ENDREP

```

Полученную программу на языке *ASTRU* можно легко переводить в программу на языке Ассемблер. Язык *ASTRU* полностью реализован макросредством языка Ассемблер, и полученную *ASTRU*-программу можно выполнить на машине (в вычислительной среде ДОС/ЕС). Отметим, что блок вычисления суммы можно реализовать с помощью более обобщенной по сравнению с *REPEAT* макрокомандой *DO*:

```

PAC S, =, 0
DO R2, FROM = A(M), BY = 2, TIMES = R3
  PAC S, =, S, +, 0(2, R2)
ENDDO

```

Опыт структурного создания Ассемблер-программ по нисходящей схеме с помощью языка *ASTRU* привел нас к новому подходу к обучению языкам программирования и языку Ассемблер, в частности. Основной идеей структурного обучения является стратегия обучения сверху вниз, которая начинается с языка высокого уровня (возможно с некоторого подмножества естественного языка), а затем постепенно происходит переход (спуск) на язык менее высокого уровня, и так далее до изучаемого языка программирования. Таким образом, для каждого изучаемого языка L необходимо создать целое семейство иерархически связанных языков, $\{L_k\}$, $k = \overline{1, n}$, n — некоторое целое положительное число, а обучение языку L следует провести сверху вниз, начиная с языка L_1 . Общая схема структурного обучения языку L с помощью семейства $\{L_k\}$ иллюстрируется на рис. 2.

Довольно часто на практике обучение осуществляется по восходящей схеме. Если изучаемый язык достаточно сложен (язык Ассемблер), традиционное обучение неэффективно, поскольку им трудно управлять и

очень трудно автоматизировать, к тому же между обучаемыми и ЭВМ возникает психологический барьер. Следует отметить, что традиционный подход к обучению порождает плохой стиль программирования в отличие от структурного стиля, который предполагает постепенное развитие программы от некоторой абстрактной формы по нисходящей схеме. На рис. 3 показан структурный процесс обучения программированию арифметических выражений.

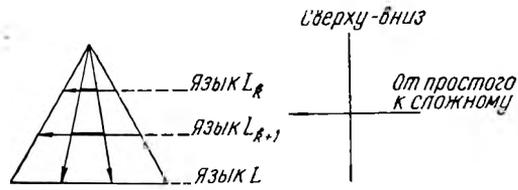


Рис. 2. Схема структурного обучения языку L

На уровне 2.1 понятие «Регистр» вводится как конечное множество ключевых слов $R = \{R_0, R_1, \dots, R_{15}\}$. Очевидно, что команды L (загрузка), A (сложение) и ST (обратная загрузка) усваиваются в таком процессе легче, чем механическое запоминание их без связи с конкретным применением (обучение снизу вверх из глубины машинных команд

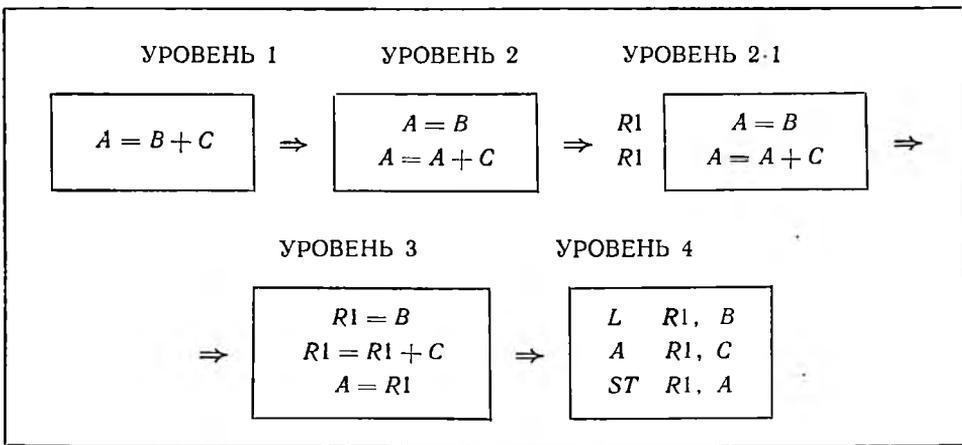


Рис. 3. Структурный процесс обучения программированию арифметических выражений.

и представлений информации). Частично описанный ранее язык *ASTRU* служит удобным средством на пути к постепенному овладению языком Ассемблера. На первых этапах обучения удобные макрокоманды языка *ASTRU* способствуют быстрому устранению психологического барьера между обучаемыми и ЭВМ. Чтобы переходить на следующий уровень обучения, нужно просто раскрыть соответствующие макрокоманды и изучить их макрорасширения, которые могут содержать другие макрокоманды. Каждый обучаемый в зависимости от успеваемости может задержаться на текущем уровне обучения, продвигаться вперед на несколько уровней. Следует отметить, что переход с одного уровня на другой обычно является частичным на определенных участках текущего уровня. Управляемость, систематичность и упорядоченность предлагаемого подхода компенсируют дополнительное время на прохождение различных уровней иерархии. После усвоения языка L , семейство $\{L_R\}$ не отбрасывается, а систематически применяется программистами в своей практике изготовления L -программ по технологии структурного программирования. Таким образом, предлагаемый многоцелевой подход к обучению является попыткой введения технологии в область обучения. Структурное обучение и структурное программирование успешно внедряются на факультете прикладной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М., Вельбицкий И. В.—Управляющие системы и машины, 1976, № 6, с. 75.
2. Wirth N.—Computing Surveys, 1974, v. 6, № 4, p. 248.
3. Dijkstra E. W.—Communs. ACM, 1968, v. 11, № 3, p. 147.
4. Baker F. T., Mills H. D.—Datamation, 1973, v. 19, № 3, p. 58.
5. Knuth D. E.—Computing Surveys, 1974, v. 6, № 4, p. 263.
6. Дейкстра Е. В.—В кн.: Структурное программирование.—М., 1975, с. 7.
7. Иодан Э. Структурное проектирование и конструирование программ.—М., 1979.

Поступила в редакцию
20.02.79.

Кафедра общего программирования

УДК 517.544

Л. П. ПРИМАЧУК

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ НА РАЗОМКНУТОЙ ДУГЕ ДЛЯ ДВУХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи. Пусть $L=ab$ — ограниченная простая гладкая разомкнутая дуга с концами a и b . Введем следующие обозначения: $D=\bar{C} \setminus L$; $H(L)$ — класс функций, удовлетворяющих на L условию Гельдера; $B^{m_1, m_2}(D)$ — класс аналитических в D векторов $\Phi(z) = (\varphi_1, \varphi_2)$, ограниченных во всякой замкнутой области, не содержащей точек a и b , причем $\varphi_i(z)$ имеет m_i нулей в D , а $\ln(\varphi_i(z))$ в окрестности точек a и b имеет слабую особенность; $B^{0,0}(D) = B(D)$; $B^{m_1, m_2}(D) \subset B^{m_1, m_2}(D)$ — подкласс вектора из $B^{m_1, m_2}(D)$, ограниченных в D .

Требуется найти аналитический вектор $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \in B^{m_1, m_2}(D)$ по следующему нелинейному краевому условию на L :

$$\varphi_1^+(t) \varphi_2^-(t) = f_1(t), \quad \varphi_2^+(t) \varphi_1^-(t) = f_2(t), \quad (1)$$

где $f_i \in H(L)$ и $f_i(t) \neq 0, \forall t \in L$.

Задача (1) для одной неизвестной функции изучалась в работах [2—5].

Решение задачи (1) в классе $B(D)$. Лемма 1. Вектор

$$\Psi(z) = (\Psi_1, \Psi_2) = \exp \frac{V(z-a)(z-b)}{4\pi i} \int_L \frac{\ln(f_1(\tau) f_2(\tau))}{V(\tau-a)(\tau-b)} \frac{d\tau}{\tau-z} \times \\ \times \left(\exp \frac{1}{4\pi i} \int_L \ln \left(\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \right) \frac{d\tau}{\tau-z}, \exp \frac{-1}{4\pi i} \int_L \ln \left(\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \right) \frac{d\tau}{\tau-z} \right) \quad (2)$$

является решением задачи (1) в классе $B(D)$.

Доказательство следует из непосредственной подстановки (2) в краевое условие (1) и свойств интеграла типа Коши на разомкнутом контуре.

Лемма 2. Пусть $\Phi(z) = (\varphi_1, \varphi_2) \in B(D)$ — решение задачи (1). Тогда вектор $\left(\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_1(z)}, \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_2(z)} \right)$ удовлетворяет краевому условию (1) с $f_i(t) \equiv 1, i = 1, 2$. Доказательство очевидно. Из леммы 1 и 2 следует

Лемма 3. Общее решение задачи (1) в классе $B(D)$ имеет вид

$$\Phi(z) = (\varphi_1(z) \psi_1(z), \varphi_2(z) \psi_2(z)), \quad (3)$$

где вектор $\Psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z))$ определяется формулой (2), а вектор $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ является общим решением задачи

$$\varphi_1^+(t) \varphi_2^-(t) = 1, \quad \varphi_2^+(t) \varphi_1^-(t) = 1. \quad (4)$$

Найдем общее решение задачи (4) в классе $B(D)$. Отметим, что векторы $(\pm 1, \pm 1)$ являются тривиальными решениями этой задачи.

Логарифмируя краевое условие (4), получаем краевую задачу Римана [1] для двух пар функций:

$$\begin{pmatrix} \ln \varphi_1^+(t) \\ \ln \varphi_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \varphi_1^-(t) \\ \ln \varphi_2^-(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_1\pi i \\ 2k_2\pi i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

Решение задачи (5) нужно искать в классе векторов, имеющих интегрируемую особенность в точках a и b . Из решения (5) вытекает

Лемма 4. Общее решение $\tilde{\Phi}(z)$ задачи (4) в классе $B(D)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z) = \exp\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{c_2 z + c_3}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\right) & \left(\pm e^{c_1} \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\frac{k_1 - k_2}{2}}, \right. \\ & \left. \pm e^{-c_1} \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\frac{k_1 - k_2}{2}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$; $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, 3}$.

Теорема 1. Общее решение задачи (1) в классе $B(D)$ определяется формулой (3), где векторы $(\psi_1(z), \psi_2(z))$, $(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ можно получить соответственно по формулам (2) и (6).

Решение задачи (1) в классе $B^{m_1, m_2}(D)$. Пусть $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \in B^{m_1, m_2}(D)$ — решение задачи (1), причем $\varphi_1(z_j) = 0$, где $z_j \neq \infty$, $j = \overline{1, p_1}$, а в точке $z = \infty$ $\varphi_1(z)$ имеет нуль кратности $l_1 = m_1 - p_1$ и $\varphi_2(z_k) = 0$, где $z_k \neq \infty$, $k = \overline{1, p_2}$, а в точке $z = \infty$ $\varphi_2(z)$ имеет нуль кратности $l_2 = m_2 - p_2$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Римана

$$\begin{pmatrix} x_1^+(t) \\ x_2^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(2\pi i m_1 \frac{t-a}{b-a}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(2\pi i m_2 \frac{t-a}{b-a}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^-(t) \\ x_2^-(t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Возьмем следующее решение задачи (7) [4];

$$\begin{aligned} X(z) = & \left(\frac{1}{(z-b)^{m_1}} \exp\left(\frac{m_1}{b-a}(z-a) \ln \frac{z-b}{z-a}\right), \right. \\ & \left. \frac{1}{(z-b)^{m_2}} \exp\left(\frac{m_2}{(z-b)^{m_2}}(z-a) \ln \frac{z-b}{z-a}\right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты вектора $X(z)$ ограничены в D и не имеют нулей в конечной части плоскости, а при $z = \infty$ обращаются в нуль соответственно порядка m_1 и m_2 . Вектор

$$\tilde{X}(z) = \left(\prod_{j=1}^{p_1} (z - z_j) x_1(z), \prod_{k=1}^{p_2} (z - z_k) x_2(z) \right) \quad (9)$$

имеет те же нули и той же кратности, что и решение $\Phi(z)$ задачи (1). Тогда вектор $\Psi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \end{pmatrix} \in B(D)$ и удовлетворяет краевому условию

$$\begin{aligned} \psi_1^+(t) \psi_2^-(t) &= \frac{f_1(t)}{\tilde{x}_1^+(t) \tilde{x}_2^-(t)}, \\ \psi_2^+(t) \psi_1^-(t) &= \frac{f_2(t)}{\tilde{x}_2^+(t) \tilde{x}_1^-(t)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Общее решение $\Phi(z)$ задачи (1) в классе $B^{m_1, m_2}(D)$ имеет вид $\Phi(z) = (\tilde{x}_1(z) \psi_1(z), \tilde{x}_2(z) \psi_2(z))$, где вектор $(\tilde{x}_1(z), \tilde{x}_2(z))$ определяется формулой (9), а $(\psi_1(z), \psi_2(z))$ — общее решение задачи (10) в классе $B(D)$, которое строится по формулам (3), (2) и (6).

З а м е ч а н и е. Случай, когда дуга L простирается в бесконечность, конформным отображением сводится к рассмотренному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1963.
2. Черепанов Г. П.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Черепанов Г. П.— Докл. АН СССР, 1962, № 3, с. 147.
4. Говоров Н. В., Кузнецов Н. К. Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков, 1974.
5. Кузнецов Н. К.— Изв. вузов СССР. Матем., 1977, № 11.

Поступила в редакцию
22.03.79.

Кафедра теории функций

УДК 517.966

А. А. ЛЕВАКОВ

ЗАВИСИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Задача А. Найти $M = \inf_{x(\cdot) \in B_{x_1}} \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt$, где B_{x_1} — множество решений задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad (2)$$

удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$; $x(t_1) = x_1$, $x_0, x_1 \in R^n$. В задаче А моменты времени t_0, t_1 фиксированы, $t_0, t_1 \in R$; U — компакт в R^m ; $f_0: T = [t_0, t_1] \times R^n \times U \rightarrow R$, $f: T \times R^n \times U \rightarrow R^n$ — непрерывные функции, кроме того, функция f имеет непрерывное частное производное отображение $\frac{\partial f}{\partial x}$, x_0 — фиксированная точка. Под решением задачи (1), (2) понимаем абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot): T \rightarrow R^n$, удовлетворяющую почти при всех $t \in T$ вместе с измеримой функцией $u(\cdot): T \rightarrow U$ соотношениям (1), (2). Оптимальное значение критерия качества M в задаче А зависит от x_1 , т. е. $M = M(x_1)$. Целью данной заметки является исследование зависимости функции M от граничного условия x_1 .

Впервые подобные исследования для некоторых задач оптимального управления были проведены в [1]. Последние результаты в этом направлении имеются в работах [2, 3]. В задачах оптимального управления, рассматриваемых в [2], момент времени t_1 не фиксирован, $f_0 > 0$, а в задачах работы [3] $u \in R^m$, $f_0 = \|u\|$. В задаче А данной заметки f_0 — произвольная непрерывная функция, моменты времени t_0, t_1 фиксированы; U — компакт. Указанные особенности задачи А не позволяют использовать известные методы для исследования зависимости функции M от граничных условий.

Предположим, что множество B_{x_1} непусто. Пусть $x_0(\cdot)$ — абсолютная минимальная в задаче А, а $u^0(\cdot)$ — соответствующее управление. Будем говорить, что $x^0(\cdot)$ удовлетворяет условию 1), если для любой абсолютно

непрерывной функции $\psi(\cdot): T \rightarrow R^n$, $\psi(t) \neq 0$, удовлетворяющей почти при всех $t \in T$ соотношению

$$\dot{\psi}(t) = - \left(\frac{\partial f(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} \right)^T \psi(t),$$

существует множество ненулевой меры $E \subset T$ такое, что

$$\psi^T(t) f(t, x^0(t), u^0(t)) \neq \max_{u \in U} \psi^T(t) f(t, x^0(t), u)$$

при всех $t \in E$ (T — знак транспонирования).

Теорема 1. Если существует абсолютная минималь $x^0(\cdot)$ в задаче А, удовлетворяющая условию 1), то функция M полунепрерывна сверху в точке x_1 .

Доказательство. Используя игольчатые вариации $u^*(\cdot)$ [4, с. 97] управления $u^0(\cdot)$, аналогично тому, как это сделано в [4, с. 105], можно построить конус достижимости K_{t_1} , который должен совпадать со всем пространством X_{t_1} [4, с. 94]. В противном случае минималь $x^0(\cdot)$ не удовлетворяла бы условию 1) (см. [5, с. 232]). Последнее условие, как нетрудно проверить, обеспечивает существование окрестности точки X_1 , в каждую точку которой можно попасть из точки x_0 за время $t_1 - t_0$ вдоль решения задачи (1), (2) с помощью некоторого варьированного управления $u^*(\cdot)$. Отсюда и из непрерывности функции f_0 следует полунепрерывность сверху функции M в точке x_1 .

З а м е ч а н и я. 1. Пусть G — множество точек, в которые можно попасть за время $t_1 - t_0$ из точки x_0 вдоль решений задачи (1), (2). Будем считать, что $M = +\infty$, если множество B_{x_1} пусто. Ясно, что для полунепрерывности сверху функции M в точке x_1 необходимо, чтобы точка x_1 была внутренней точкой множества G . Однако, как показывает следующий пример, это условие не является достаточным:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u^2(t) f(x_2(t)), & x_1(0) = 0, & x_1(1) = 1, & |u(t)| \leq 1, \\ \dot{x}_2 = v(t), & x_2(0) = 0, & x_2(1) = 0, & |v(t)| \leq 10, \end{cases}$$

$$f(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 > -1, \\ (x_2 + 1)^2 + 1, & \text{если } x_2 \leq -1, \end{cases} \quad M = \inf_{x(\cdot) \in B_{x_1}} \int_0^1 |x_2(t)| dt.$$

В этой задаче $M(1, 0) = 0$, $M(1 + \delta, 0) \geq 1$ при всех $\delta > 0$.

2. Пусть $T_*(x_1)$ — наименьшее, $T^*(x_1)$ — наибольшее время, за которое можно из точки $x_0 = x(t_0)$ перейти в точку x_1 вдоль решений задачи (1), (2) (предполагается, что в задаче А $t \in [t_0, +\infty[$). Для выполнения условия 1) необходимо, чтобы

$$T_*(x_1) < t_1 - t_0 < T^*(x_1). \quad (3)$$

Если выполнено условие (3) и $f(t, x, u) = Ax + Bu$, для выполнения условия 1) необходимо и достаточно, чтобы $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$.

Положим при каждом $(t, x) \in T \times R^n$

$$f_1(t, x, y) = \inf_{\substack{u \in U \\ y = f(t, x, u)}} f_0(t, x, u), \quad V(t, x) = \{v \mid v = f(t, x, u), u \in U\},$$

$$\varphi(t, x, y) = \overline{\text{co}} f_1(t, x, y), \quad Q(t, x) = \text{co} V(t, x),$$

при каждом (t, x) , $\text{co} V(t, x)$ — выпуклая оболочка множества $V(t, x)$, $\overline{\text{co}} f_1(t, x, y)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $f_1(t, x, y)$.

Наряду с задачей А рассмотрим задачу Б.

Задача Б. Найти $m = \inf_{x(\cdot) \in \Omega_{x_1}} \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$, где Ω_{x_1} — множество решений дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in Q(t, x(t)), \quad (4)$$

удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Под решением дифференциального включения (4) понимаем абсолютно непрерыв-

ную функцию $x(\cdot) : T \rightarrow R^n$, удовлетворяющую почти при всех $t \in T$ соотношению (4).

Теорема 2. Пусть все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены, т. е. $\|x(t)\| \leq N$, $t \in T$, $N = \text{const}$, для всех $x(\cdot) \in B_{x_1}$. Тогда функция M полунепрерывна снизу в точке x_1 в том и только в том случае, когда задача A корректна по расширению, т. е. $m(x_1) = M(x_1)$.

Доказательство. Предположим, что существует последовательность $(x_{1k}) \rightarrow x_1$ и число $\kappa > 0$ такое, что

$$M(x_{1k}) + \kappa \leq M(x_1) \quad (5)$$

для всех k .

Пусть $(x_{n, x_{1k}}^0(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче A , соответствующая граничному условию x_{1k} . Рассуждая так же, как в [7, с. 266], покажем, что из последовательности $(x_k, x_{1k}^0(\cdot))$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на T к некоторому решению $\tilde{x}(\cdot)$ из множества Ω_{x_1} . Из неравенства (5) получаем (см. [6, с. 90])

$$\int_{t_2}^{t_1} \varphi(t, \tilde{x}(t), \tilde{x}'(t)) dt \leq M(x_1) - \kappa. \quad (6)$$

Неравенство (6) противоречит условию $M(x_1) = m(x_1)$. Полученное противоречие показывает, что функция M полунепрерывна снизу в точке x_1 .

Докажем обратное. Очевидно, $M(x_1) \geq m(x_1)$. Предположим, что

$$M(x_1) \geq m(x_1) + \gamma, \quad \gamma > 0. \quad (7)$$

Из полунепрерывности снизу функции M в точке x_1 и неравенства (7) следует существование постоянной $\delta > 0$ такой, что

$$M(x'_1) \geq m(x_1) + \frac{\gamma}{2} \quad (8)$$

для всех x'_1 , $\|x'_1 - x_1\| \leq \delta$.

Согласно теореме 2.5 [6] существуют решение $\bar{x}(\cdot) \in B_{x_1}^-$, $\|x_1 - x_{11}\| \leq \delta$, и соответствующее управление $\bar{u}(\cdot)$ такие, что

$$M(\bar{x}_1) \leq \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \leq m(x_1) + \frac{\gamma}{4}. \quad (9)$$

Неравенство (9) противоречит неравенству (8). Теорема доказана.

3. Условие $M(x_1) = m(x_1)$, хотя и является достаточным для полунепрерывности снизу функции M , однако не обеспечивает непрерывности (см. пример, приведенный в замечании 1). Следующий пример показывает, что и условия теоремы 1 не влекут непрерывности функции:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t), & x_1(0) = 0, \quad x_1(10) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - x_1^4(t), & x_2(0) = 0, \quad x_2(10) = 0, \quad 1 \leq |u(t)| \leq 2, \end{cases}$$

$$M = \inf_{x(\cdot) \in B_{x_1}} \int_0^{10} f_0(x_1(t)) dt, \quad f_0(x_1) = \begin{cases} |x_1|, & \text{если } |x_1| \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - |x_1|, & \text{если } \frac{1}{2} < |x_1| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |x_1| > 1. \end{cases}$$

Легко поверить, что $M(0, 0) \geq \frac{1}{4}$, $m(0, 0) = 0$. Согласно теореме 2, функция M не является полунепрерывной снизу в точке $(0, 0)$.

4. Эффективные достаточные условия корректности по расширению задачи A приведены, например, в обзоре [8].

Пусть $(x_n^0(\cdot))$ — минимизирующая последовательность в задаче A и $C[t_0, t_1]$ — банахово пространство непрерывных функций $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$

с нормой $\|x(\cdot)\| = \max_{t \in T} \|x(t)\|$. Если D, D_1 — подмножества $C[t_0, t_1]$, то $\rho(x(\cdot), D) = \inf_{y(\cdot) \in D} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|$, $\beta(D, D_1) = \sup_{x(\cdot) \in D} \rho(x(\cdot), D_1)$. Имеют место следующие два предложения.

1. Если все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены и функция M полунепрерывна снизу в точке x_1 , то $\rho(x_n^0(\cdot), C) \rightarrow 0$, где C — множество абсолютных минималей в задаче Б.

2. Пусть все решения $x(\cdot) \in B_{x_1}$ ограничены для всех x'_1 из некоторой окрестности точки x_1 и функция M непрерывна в точке x_1 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\beta(C_{x'_1}, C_{x_1}) \leq \varepsilon$ для всех x'_1 , $\|x'_1 - x_1\| \leq \delta$; здесь $C_{x'_1}, C_{x_1}$ — множество абсолютных минималей в задаче Б с граничными условиями x'_1, x_1 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Ф. М. — Изв. вузов СССР. Матем., 1958, № 4.
2. Петров Н. Н. — Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 11.
3. Гичев Т., Розов Н. Х. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 14, № 2.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М., 1969.
5. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М., 1969.
6. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. — Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 6.
7. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М., 1972.
8. Мордухович Б. Ш. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. — М., 1976, т. 6, с. 207.

Поступила в редакцию
06.04.79.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.926

М. М. ФЕДЕНЯ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КВАЗИХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И КВАЗИМУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

1. Об экстремальном возмущении квазихарактеристического числа. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (1)$$

где A — постоянная $n \times n$ -матрица; x — n -вектор.

Квазихарактеристическим числом $\mu(A)$ для системы (1) назовем корень квазихарактеристического уравнения $\det [A - \mu I] = 0$, где I — $n \times n$ -матрица, составленная из единиц (см., например, [3]). Предположим, что $\mu(A)$ — конечное число.

З а м е ч а н и е. Ненулевое характеристическое число системы $A \frac{dx}{dt} = Ix$, $\det A \neq 0$ равно $\frac{1}{\mu}$, где μ — квазихарактеристическое число матрицы A .

Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему $\frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon E_{ij})x$. Здесь E_{ij} — $(0,1)$ -матрица порядка n , единственный ненулевой элемент которой стоит на пересечении i -ой строки и j -ого столбца.

Возмущенное квазихарактеристическое число $\mu(A + \varepsilon E_{ij})$ является корнем уравнения $\det [A + \varepsilon E_{ij} - \mu I] = 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Коэффициентом чувствительности ω_{ij} квазихарактеристического числа $\mu(A)$ называется

$$\omega_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(A + \varepsilon E_{ij}) - \mu(A)}{\varepsilon}.$$

Матрица $\Omega = [\omega_{ij}]$ порядка n называется матрицей чувствительности.

Пусть наряду с системой (1) задана система

$$\frac{dx}{dt}(A + \varepsilon B)x, \quad (2)$$

где $B = [b_{ij}]$ — постоянная $n \times n$ -матрица, для которой

$$\|B\| = \max_{i,j} |b_{ij}| \leq 1.$$

Теорема 1. Если $B = [\text{sgn } \omega_{ij}]$, то квазихарактеристическое число $\mu(A)$ получит в системе (2) максимальное возмущение $\|\Omega\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |\omega_{ij}|$.

Доказательство теоремы следует из разложения, указанного в [4]:

$$\begin{aligned} \mu(A + \varepsilon B) &= \mu\left(A + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n b_{ij} E_{ij}\right) = \mu(A) + \left(\sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} b_{ij}\right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \\ &= \mu(A) + \langle \Omega, B \rangle \varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение матриц.

2. О чувствительности и экстремальном возмущении квазимультпликатора.

Наряду с линейной системой

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (4)$$

будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \varepsilon E_{ij})x. \quad (5)$$

$$\text{Здесь } A(t) = \begin{cases} A_1, & t \in]0, \omega_0[, \\ A_2, & t \in]\omega_0, \omega[, \end{cases}$$

$A(t + \omega) = A(t)$; $\omega > 0$; A_1, A_2 — постоянные $n \times n$ -матрицы.

Пусть $X(\omega)$, $X_\varepsilon(\omega)$ — матрицы монодромии для систем (4) и (5) соответственно.

Определение 2. Квазимультпликатором $\hat{\rho}(X)$ для системы (4) назовем корень уравнения

$$\det[X(\omega) - \hat{\rho}I] = 0.$$

Возмущенный квазимультпликатор $\hat{\rho}(X_\varepsilon)$ для системы (5) является корнем уравнения

$$\det[X_\varepsilon(\omega) - \hat{\rho}I] = 0. \quad (6)$$

Определение 3. Коэффициентом чувствительности $\xi_{ij}(\omega, \omega_0)$ квазимультпликатора $\hat{\rho}(X)$ называется

$$\xi_{ij}(\omega, \omega_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\rho}(X_\varepsilon) - \hat{\rho}(X)}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Матрица $\Xi(\omega, \omega_0) = [\xi_{ij}(\omega, \omega_0)]$ порядка n называется матрицей чувствительности квазимультпликатора $\hat{\rho}(X)$.

Вычислим элементы матрицы $\Xi(\omega_1, \omega_0)$. Обозначим

$$\begin{aligned} D_{ij}(\omega, \omega_0) &= \exp(A_2(\omega - \omega_0)) \left(\int_0^{\omega - \omega_0} \exp(-A_2\tau) E_{ij} \exp(A_2\tau) d\tau \right) \times \\ &\quad \exp(A_1\omega_0) + \exp(A_1\omega_0) \int_0^{\omega_0} \exp(-A_1\tau) E_{ij} \exp(A_1\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Переписав (6) в виде

$$\det [X(\omega) + \varepsilon D_{ij}(\omega, \omega_0) - (\rho - o(\varepsilon))I] = 0,$$

учитывая (7) и (3), получим разложение для возмущенного квазимультимпликатора:

$$\hat{\rho}(X_\varepsilon) = \hat{\rho}(X) + \langle \Omega_{[X(\omega)]}, D_{ij}(\omega, \omega_0) \rangle \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Здесь $\Omega_{[X(\omega)]}$ — матрица чувствительности для квазихарактеристического числа матрицы монодромии $X(\omega)$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Матрица чувствительности $\Xi(\omega, \omega_0)$ квазимультимпликатора $\hat{\rho}(X)$ имеет вид:

$$\Xi(\omega, \omega_0) = [\langle \Omega_{[X(\omega)]}, D_{ij}(\omega, \omega_0) \rangle].$$

Пусть наряду с системой (4) заданы системы:

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \varepsilon B)x, \quad (8)$$

где $\|B\| = \max_{i,j} |b_{ij}| \leq 1$

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + \varepsilon B(t))x, \quad (9)$$

где $B(t) = \begin{cases} B_1, & t \in]0, \omega_0], \\ B_2, & t \in]\omega_0, \omega[, \end{cases}$

$B(t + \omega) = B(t)$; $\omega > 0$; B_1, B_2 — постоянные $n \times n$ -матрицы, причем

$$\|B_1\| = \max_{i,j} |b_{ij}^{(1)}| \leq 1, \quad \|B_2\| = \max_{i,j} |b_{ij}^{(2)}| \leq 1.$$

Теорема 3. Если $B = [\text{sgn } \xi_{ij}(\omega, \omega_0)]$, то квазимультимпликатор $\hat{\rho}(X)$ получит в системе (8) максимальное возмущение, равное $\|\Xi(\omega, \omega_0)\|_1$.

Обозначим $c_{ij}(\omega) = \langle \Omega_{[X(\omega)]}, X(\omega) F_{ij} \rangle$; $C(\omega) = [c_{ij}(\omega)]$;

$$F_{ij} = \int_0^{\omega_0} \exp(-A_1 \tau) E_{ij} \exp(A_1 \tau) d\tau.$$

Теорема 4. Если $B_1 = [b_{ij}^{(1)}] = [\text{sgn } c_{ij}(\omega)]$, $B_2 = [b_{ij}^{(2)}] = [\text{sgn } (\xi_{ij}(\omega, \omega_0) - c_{ij}(\omega))]$,

то квазимультимпликатор $\hat{\rho}(X)$ получит в системе (9) максимальное возмущение, равное $\|C(\omega)\|_1 + \|\Xi(\omega, \omega_0) - C(\omega)\|_1$.

Доказательство. Для возмущенного квазимультимпликатора имеем

$$\hat{\rho}(X_\varepsilon) = \hat{\rho}(X) + \langle \Omega_{[X(\omega)]}, \hat{D}(\omega, \omega_0) \rangle \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где $\hat{X}_\varepsilon(\omega) = \exp((A_2 + \varepsilon B_2)(\omega - \omega_0)) \exp(A_1 + \varepsilon B_1)\omega_0$.

Легко показать, что

$$\hat{D}(\omega, \omega_0) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^{(1)} X(\omega) F_{ij} + b_{ij}^{(2)} (D_{ij}(\omega, \omega_0) - X(\omega) F_{ij}). \quad (10)$$

Учитывая (10), получим:

$$\langle \Omega_{[X(\omega)]}, \hat{D}(\omega, \omega_0) \rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^{(1)} \langle \Omega_{[X(\omega)]}, X(\omega) F_{ij} \rangle + b_{ij}^{(2)} (\langle \Omega_{[X(\omega)]}, D_{ij}(\omega, \omega_0) \rangle - \langle \Omega_{[X(\omega)]}, X(\omega) F_{ij} \rangle),$$

$$D_{ij}(\omega, \omega_0) - (\langle \Omega_{[X(\omega)]}, X(\omega) F_{ij} \rangle) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^{(1)} c_{ij}(\omega) +$$

$$+ b_{ij}^{(2)} (\xi_{ij}(\omega, \omega_0) - c_{ij}(\omega)). \quad (11)$$

Из (11) следуют требуемые утверждения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М., 1967.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.—М., 1967.
3. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц.—Киев, 1972.
4. Феденя М. М. О чувствительности квазихарактеристических чисел и действительных компонент характеристических чисел, № 2466-78. Деп. от 20.07.78.
5. Crossley T., Porter B.—Int. J. Contr., 1969, № 2, p. 10.

Поступила в редакцию
06.04.79.

Кафедра высшей математики ФПМ

УДК 517.925.12

Н. В. ПЫЖКОВА

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3.$$

Замена переменных [1] $y = (1 - Ax - Kx^2)Y [1 + (B + Lx)Y]^{-1}$ преобразует (1) к системе (y не меняем на Y)

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2)y [1 + (B + Lx)y]^{-1}, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = [-x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)y^2 + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4)y^3] [1 + (B + Lx)y]^{-1},$$

где $a_0 = A + C$, $a_1 = 3B^2 - AC + 2K + M$,
 $a_2 = 6BL - CK - AM$, $a_3 = 3L^2 - KM$,
 $b_0 = AB + BC + L + N$, $b_1 = 2B^3 - ABC + 2BK + CL + BM - 2AN$,
 $b_2 = 6B^2L - ACL - ABM - BCK + KL + LM + A^2N - 2KN$,
 $b_3 = 6BL^2 - CKL - BKM - ALM + 2AKN$, $b_4 = 2L^3 - KLM + K^2N$. (3)

Будем считать в (2) $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ любыми действительными числами. Одним из достаточных условий центра для такой системы является $b_i = 0$, ($i = \overline{0, 4}$).

Пусть эти условия выполнены. Тогда система

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2)y [1 + (B + Lx)y]^{-1}, \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = [-x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)y^2] [1 + (B + Lx)y]^{-1}$$

имеет в $O(0, 0)$ центр.

Так как система (4) эквихронна системе

$$\frac{dx}{dt} = (1 - Ax - Kx^2)y, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)y^2,$$

то условия изохронности для (4) и (5) будут совпадать.

Непосредственные вычисления (например, по методу работы [2]) дают следующие три первые необходимые условия изохронности для (5),

а следовательно, и для (4), в предположении, что a_i — любые действительные числа:

$$\begin{aligned} & (A+a_0)(A+4a_0)+3(K+a_1)=0, \\ & a_0(A+a_0)(A+4a_0)(A+7a_0)-3a_2(A+10a_0)-3a_0a_1(A+a_0)-9a_3=0, \\ & (A+a_0)(A+4a_0)(A^4+85A^3a_0+1374A^2a_0^2+1795Aa_0^3-31895a_0^4)+ \\ & +9a_1(2A^4+52A^3a_0+453A^2a_0^2+3818Aa_0^3+3417a_0^4)+81a_1^2(A+a_0)^2- \\ & -18a_2(8A^3+45A^2a_0-168Aa_0^2-6955a_0^3)-486Aa_1a_2-10206a_0a_1a_2- \\ & -1701a_2^2=0. \end{aligned} \quad (6)$$

Дальше будем рассматривать проблему изохронности для системы (1). Используя (6) и (3), два первых необходимых условия изохронности для (1) при условии, что в (3) $b_i=0$, ($i=\overline{0,4}$), получаем в виде

$$\begin{aligned} & 2(5A^2+5AC+2C^2)+9B^2+9K+3M=0, \\ & 54(11ABL+10CBL)-9(7A^2M+2ACM-5MC^2)- \\ & -2(385A^3C+402A^2C^2+181AC^3+140A^4+26C^4)+ \\ & +9(14AB^2C+11B^2C^2+2A^2B^2)+81L^2+27B^2M+9M^2=0. \end{aligned} \quad (7)$$

Как показано в работе [1], решениями системы $b_i=0$, ($i=\overline{0,4}$), где b_i определяются по формулам (3), являются:

$$1. A = -\frac{2(BC+N)}{B} - \frac{(BC+N)^3}{2B^5}, \quad K = -\frac{(BC+N)^2}{B^2} - \frac{(BC+N)^4}{2B^6}, \quad (8)$$

$$L = BC + N + \frac{(BC+N)^3}{2B^5}, \quad M = -2B^2 - \frac{N(BC+N)}{B^2} - \frac{(BC+N)^2}{B^2}, \quad B \neq 0;$$

$$2. B^2 = -\frac{4A^3+3A^2C \mp 2A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{10A+8C}, \quad K = -\frac{A^2(A+C)}{5A+4C},$$

$$L = -\frac{A(3A+2C)(A+C) \mp A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{(5A+4C)(2A+C)} B, \quad (9)$$

$$M = -\frac{A(A+C)(A+2C) \pm 3A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{5A+4C},$$

$$N = -\frac{(A+C)^2(7A+4C) \pm A(A+C)\sqrt{-A(A+C)}}{(5A+4C)(2A+C)} B,$$

$$(5A+4C)(2A+C) \neq 0;$$

$$3. B=0, M=0, C=-2A, K=-\frac{1}{3}A^2, L=\mp\frac{1}{3\sqrt{2}}A^2,$$

$$N = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}A^2; \quad (10)$$

$$4. B=0, L=0, N=0. \quad (11)$$

Кроме того, очевидно, что решениями системы являются

$$A=C=L=N=M=0, K=-B^2; \quad (12)$$

$$A=C=L=N=K=0, M=-2B^2. \quad (13)$$

Отметим, что условия (12), (13) — частные случаи (18) из [1].

Рассматривая случай центра (10) с использованием (7) легко убеждаемся в том, что $O(0,0)$ — изохронный центр для (1) лишь при $A=0$.

Пусть теперь выполняется случай центра (9). Тогда условия изохронности (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} & (5A+4C)(8A^2+17AC+8C^2)=0, \\ & 214300A^9+1445880A^8C+4253427A^7C^2+7152555A^6C^3+ \\ & +7564584A^5C^4+5206041A^4C^5+2324052A^3C^6+646032A^2C^7+ \\ & +100800AC^8+6656C^9 = \mp\sqrt{-A(A+C)}(45000A^8+ \\ & +79020A^7C+98928A^6C^2+129213A^5C^3+99297A^4C^4+ \\ & +44928A^3C^5+11088A^2C^6+1152AC^7), \end{aligned} \quad (14)$$

$$(5A+4C)(2A+C) \neq 0.$$

Проведя исследование системы (14) убеждаемся в том, что она несовместна, а значит, $O(0,0)$ при выполнении (9) неизохронный центр для (1).

Рассматривая случай центра (8) и полагая при этом $\lambda = BC + N$, первое условие изохронности из (7) получаем в виде

$$8B^2N^2 + (18\lambda B^3 + 10\lambda^3 B^4)N + (21\lambda^4 B^4 + 5\lambda^5 + 24\lambda^2 B^3 + 6B^4) = 0. \quad (15)$$

Так как относительно N квадратное уравнение (15) не имеет действительных корней, в случае (8) центр неизохронен; заметим, что (8) рассматривался также в [3].

Рассмотрим теперь случай центра (12). Соответствующая система (5) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y + B^2 x^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + B^2 x y^2. \quad (16)$$

Воспользовавшись [4], замечаем, что $O(0, 0)$ системы (16) является изохронным центром, а значит, и $O(0, 0)$ системы (1) в (12) также представляет изохронный центр.

Изохронность центра в (12) рассматривалась в [3], однако заключение о его изохронности в этой работе является неверным. Впервые проблема изохронности центра в случае (12) разрешена в [5].

Из (7) заключаем, что в (13) начало координат является изохронным центром, лишь тогда, когда система (1) вырождается в линейную.

Переходим теперь к случаю (11). Первые три необходимые условия изохронности имеют вид

$$2(5A^2 + 5AC + 2C^2) + 9K + 3M = 0. \quad (17)$$

$$9(7A^2M + 2ACM - 5MC^2) + 2(385A^3C + 402A^2C^2 + 181AC^3 + 140A^4 + 26C^4) - 9M^2 = 0. \quad (18)$$

$$439640A^6 + 2138018A^5C + 4316828A^4C^2 + 4608522A^3C^3 + 2716232A^2C^4 + 821432AC^5 + 95516C^6 + 128274A^4M + 310716A^3CM + 184005A^2C^2M - 53046AC^3M - 52941C^4M - 1899A^2M^2 - 3384ACM^2 + 1314C^2M^2 = 0. \quad (19)$$

Составляя для (18), (19) результат относительно M [6, 7] и приравнявая его к нулю, необходимое условие изохронности получаем в виде

$$19908799500A^{12} + 306700120153A^{11}C + 1804438619266A^{10}C^2 + 5898552746273A^9C^3 + 12378207349076A^8C^4 + 17903572673618A^7C^5 + 18527752449860A^6C^6 + 13958312903450A^5C^7 + 7665482666492A^4C^8 + 3017039903909A^3C^9 + 813014972986A^2C^{10} + 135050630485AC^{11} + 10424609508C^{12} = 0. \quad (20)$$

Рассматривая условие (20), как уравнение относительно A/C , где $C \neq 0$, с использованием [6, 8], убеждаемся в том, что условию (20) будут удовлетворять не менее четырех и не более десяти значений A/C , расположенных на $]-9, 0[$, причем четыре из этих значений будут удовлетворять неравенствам:

$$-\frac{1}{2} < A/C < -\frac{1}{3}, \quad -1 < \frac{A}{C} < -\frac{1}{2}, \quad -2 < A/C < -1, \quad -8 < A/C < -7.$$

Если $A/C \geq 0$ или $A/C \leq -9$, то $O(0, 0)$ в случае (11) не может быть изохронным центром для (1).

Вопрос об изохронности центра в случае (11) изучался также в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский А. П. — Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 9.
2. Руденок А. Е. — Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5.
3. Кононова О. А. — Дифференц. уравнения, 1968, т. 4, № 6.
4. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. — Кишинев, 1976.
5. Плешкан И. И. V Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений. — Кишинев, 1979.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М., 1965.
7. Ван-дер-Варден. Современная алгебра, т. 2. — М., 1947.
8. Turgowicz A. Geometria zer wielomianów. — Warszawa, 1967.

Л. Д. ЕРОВЕНКО

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ УЛУЧШЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t) = \Phi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad (2)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — n -вектор; $u = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ — r -вектор; $\tau > 0$ — число, характеризующее запаздывание; A, A_1, B — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Задан функционал качества

$$I(u) = \varphi(x(T)) \quad (3)$$

на траекториях $x(t)$, $t \in [t_0, T]$, порожденных начальным условием (2) и допустимыми управлениями из класса r -векторных кусочно-непрерывных функций со значениями из U . На траекторию $x(t)$ наложено ограничение

$$g(x(T)) \leq 0. \quad (4)$$

Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$, $g(x)$ и $\Phi(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 6.5 из [1].

Требуется среди допустимых управлений выбрать такое, которое минимизирует функционал (3). Необходимые и достаточные условия оптимальности для решения этой задачи имеются в работах [2, 3].

Метод улучшения управляющей функции [1]. Пусть $u(t)$ — допустимое кусочно-гладкое управление; $x(t)$ — соответствующая ей траектория уравнения (1) — (2). Найдем решение уравнения

$$\frac{d\psi'(t)}{dt} = -\psi'(t) \cdot A - \psi'(t + \tau) \cdot A_1, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $\psi(T) = -\partial\varphi(x(T))/\partial x$.

Построим функции

$$H(t) = H(x(t), y(t), \psi(t), u(t), t), \quad (6)$$

$$H_1(t) = H(x(t), y(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), y(t), \psi(t), u, t), \quad (6)$$

где $H(x, y, \psi, u, t) = \psi' f(x, y, u, t)$. Выберем β и положим $\sigma_1 = \left[\Theta_1 - \frac{\delta_1}{2}, \Theta_1 + \frac{\delta_1}{2} \right]$, где Θ_1 — точка максимума функции $\Delta \tilde{H}(t) = H_1(t) - H(t)$, $t \in [t_0, T]$, а $\delta_1 = \delta_1(\beta)$ таково, что

$$\Delta \tilde{H}(t) \geq \beta \cdot \|B \cdot (\tilde{u}(t) - u(t))\|, \quad t \in \sigma_1. \quad (7)$$

Всюду в дальнейшем будем обозначать $y(t) = x(t - \tau)$.

Найдем решение $\bar{\psi}(t)$ уравнения (5), удовлетворяющее условию $\bar{\psi}(T) = -\partial g(x(T))/\partial x$. По формулам (6), (7) и найденной функции $\bar{\psi}(t)$ вычислим функции $\bar{H}(t)$, $\bar{H}_1(t)$, отрезок σ_2 , точки Θ_2 , δ_2 .

Предположим сначала, что отрезки σ_1 и σ_2 не пересекаются. По найденным функциям $\tilde{u}(t)$ и $\bar{u}(t)$ строим управление

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \sigma_1 \cup \sigma_2, \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1, \\ \bar{u}(t), & t \in \sigma_2. \end{cases} \quad (8)$$

Если $I(u_1) < I(u)$, то в качестве начального управления берем улучшенное управление $u_1(t)$. Если на каком-то шаге $I(u_1) > I(u)$, то возвращаемся к предыдущему управлению $u(t)$, уменьшая параметр β вдвое и повторяем процесс улучшения сначала.

В случае, когда отрезки σ_1 и σ_2 пересекаются, строим управление следующим образом:

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}, \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1, \\ \bar{u}(t), & t \in \sigma_2 \setminus \sigma_1 \cap \sigma_2. \end{cases} \quad (9)$$

Если условие $g(x_1(T)) \leq \varepsilon_1$ не выполняется, строим управление

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t \in \overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}, \\ \tilde{u}(t), & t \in \sigma_1 \setminus \sigma_1 \cap \sigma_2, \\ \bar{u}(t), & t \in \sigma_2 \end{cases} \quad (10)$$

Процесс итераций заканчиваем, когда выполняются условия

$$g(x_1(T)) \leq \varepsilon_1, \quad |I(u_1) - I(u)| < \varepsilon_2, \quad (11)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — заданные точности, либо параметр β достаточно мал, и дальнейшее его уменьшение не приводит к уменьшению функционала I .

I	-2,5069	-3,0675	-3,4038
β	0,5	0,5	0,5
$u^{(i)}(t)$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
t			
0,0000	0,000	0,000	-1,000
0,0785	0,156	0,156	-1,000
0,1570	-1,000	-1,000	-1,000
0,2355	-1,000	-1,000	-1,000
0,3140	-1,000	-1,000	-1,000
0,3925	-1,000	-1,000	-1,000
0,4710	-1,000	-1,000	-1,000
0,5495	-1,000	-1,000	-1,000
0,6280	-1,000	-1,000	-1,000
0,7065	0,988	-1,000	-1,000
0,7850	1,000	-1,000	-1,000
0,8635	-1,000	-1,000	-1,000
0,9420	-1,000	-1,000	-1,000
1,0000	-1,000	-1,000	-1,000

Алгоритм численного решения. Выберем на отрезке $[t_0, T]$ систему интервалов (t_{i+1}, t_i) следующим образом: $h = \tau/L$, где τ — запаздывание; L — заданное целое число; $t_{i+1} = t_i + h$, $i = 1, 2, \dots, n_s - 1$, $t_{n_s} = T$. Процесс решения состоит из отдельных итераций последовательного улучшения значений управления, k -ая итерация заключается в следующем ($k = 1, 2, \dots$).

1. Интегрируем уравнение (1) с начальным условием (2) от t_0 до T по модифицированной формуле Адамса [4] с заданным шагом h .

Формируем таблицу значений $x^{(k)}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_s$ и вычисляем $\partial \Phi(x^{(k)}(T))/\partial x$, $\partial g(x^{(k)}(T))/\partial x$.

2. Интегрируем «справа на лево» сопряженную систему (5) с граничным условием $\psi(T) = -\partial \Phi(x^{(k)}(T))/\partial x$ по методу Эйлера и формируем таблицу значений $\psi(t_i)$.

3. По формулам (6) вычисляем функции $H(t_i)$ и $H_1(t_i)$. Определяем управление $\bar{u}^{(k)}(t_i)$.

4. Находим точку максимума t_{k_s} функции $\Delta \bar{H}(t_i) = H_1(t_i) - H(t_i)$ и выбираем величину δ_1 из условия $\Delta \bar{H}(t_i) \geq \beta \|B(\bar{u}^{(k)}(t_i) - u^{(k)}(t_i))\|$, $t_i \in \sigma_1 = [t_{k_s} - \frac{\delta_1}{2}, t_{k_s} + \frac{\delta_1}{2}]$, по заданному параметру β .

5. Возвращаемся к блоку 2 и решаем сопряженную систему (5) с граничным условием $\bar{\psi}(T) = -\partial g(x^{(k)}(T))/\partial x$. Вычисляем функции $\bar{\psi}(t_i)$, $\bar{H}(t_i)$, $\bar{H}_1(t_i)$, $\Delta \bar{H}(t_i)$, $\bar{u}^{(k)}(t_i)$ и находим t_{k_m} , δ_2 , σ_2 , затем после блока 4 переходим к блоку 6.

6. В зависимости от того, пересекаются отрезки σ_1 и σ_2 или нет, по найденным управлениям $\bar{u}^{(k)}(t_i)$, $\bar{u}^{(k)}(t_i)$ строим управление $u^{(k+1)}(t_i)$, используя одну из формул (8), (9), (10).

7. Интегрируем исходную систему (1) с управлением $u^{(k+1)}(t_i)$ и определяем траекторию $x^{(k+1)}(t_i)$. По формулам (11) проводим анализ на точность полученного решения. В случае необходимости повторяем процесс, начиная с блока 2. Если от итерации к итерации значение функционала I не убывает, параметр β уменьшается вдвое.

Изложенный алгоритм решения задачи (1)–(4) реализован в виде стандартной программы на языке Фортран для ЕС ЭВМ.

Пример. Рассмотрим вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы под действием внешней силы, меняющейся по гармоническому закону [5]. Уравнение вынужденных колебаний такой системы имеет вид

$$\ddot{z}(t) = -p^2 z(t) + \gamma p^2 z(t-\tau) + h_1 \sin \omega t,$$

где $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$; m — масса; c — жесткость; γ — коэффициент внутреннего трения; ω — частота колебаний. Введем обозначения $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = \dot{z}(t)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -p^2 x_1(t) + \gamma p^2 x_1(t-\tau) + h_1 \sin \omega t. \end{cases} \quad (12)$$

Задача решалась при значениях $m=0,2$, $c=1$, $h_1=2$, $\gamma=0,01$, $0 \leq t \leq 1$. Начальные условия имеют вид $x_1(t)=2$, $x_2(t)=0$, $t \in [-\tau, 0]$. Требуется определить управление $u(t)$ на отрезке $[0, 1]$, которое минимизирует функционал

$$I(u) = -x_1^2(T) \quad (13)$$

при ограничениях на траекторию

$$g(x(T)) = x_2(T) - 3 \leq 0.$$

В качестве начального управления возьмем управление $u^{(0)}(t) = \sin 2t$.

Тогда $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,785$. Число интервалов $n_s = 14$, шаг интегрирования

$h = \frac{\tau}{10} = 0,0785$, $\epsilon_1 = 0,01$, $\epsilon_2 = 0,5$. Результаты вычислений приводятся в таблице, где i — номер итерации; I — значение функционала на $x^{(i)}(T)$, $u^{(i)}(t)$ — управление. Начальному приближению $u^{(0)}(t)$ отвечает значение $I = -0,5468$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М., 1971.

2. Габасов Р., Чуракова С. В.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 1, с. 29.

2. Габасов Р., Чуракова С. В.— Автоматика и телемеханика, 1968, № 2, с. 29.

4. Зверкина Т. С.— Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1962, с. 1.

5. Альтшуль Б. А.— Труды Московского ин-та инженеров железнодорожного транспорта, 1964, с. 193.

Поступила в редакцию
10.10.79.

Вычислительный центр

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим дискретный стационарный случайный процесс $x(t)$, $t \in Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $Mx(t) = 0$. Пусть $x(0), \dots, x(T-1)$ — выборка T наблюдений за процессом $x(t)$. Возникает задача построения оценок спектральных плотностей вторых и высших порядков процесса $x(t)$ по наблюдаемой выборке и исследования свойств этих оценок. Цель настоящей работы — привести некоторые результаты исследований по данному вопросу.

Аналогично работе [1] введем в рассмотрение смешанные моменты n -го порядка: $m_n(t_1, \dots, t_n)$ и смешанные семинварианты n -го порядка: $c_n(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n \in Z$ и n — конечное число. Так как $x(t)$ — стационарный процесс, то для любого n , любых $t_1, \dots, t_n \in Z$ и любого $t \in Z$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} c_n(t_1+t, \dots, t_n+t) &= c_n(t_1, \dots, t_n), \\ m_n(t_1+t, \dots, t_n+t) &= m_n(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Заметим, что $m_2(\tau) = c_2(\tau) = R(\tau)$, где $R(\tau)$ — ковариационная функция процесса $x(t)$.

Далее предположим, что смешанные семинварианты имеют представление Фурье, т. е.

$$c_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \delta^* \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) f_n(x_1, \dots, x_n) e^{i \sum_{j=1}^n x_j t_j} dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

где $\delta^*(x) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi t)$, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Функцию $f_n(x_1, \dots, x_n)$, сосредоточенную на многообразиях вида $\sum_{j=1}^n x_j = 0 \pmod{2\pi}$ назовем спектральной плотностью n -го порядка. Она периодична с периодом 2π по каждому из аргументов. Из работы [2] следует, что класс случайных стационарных процессов, для которых возможно представление (1), существует. В случае $n = 2$ из равенства (1) нетрудно получить, что $c_2(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ixt} dx$, где $f(x) = f_2(x, -x)$ — обыч-

ная спектральная плотность стационарного случайного процесса $x(t)$.

В дальнейшем будем предполагать, что на спектральную плотность наложены ограничения:

$$f(x+\lambda) = f(\lambda) + R(x, \lambda), \quad (2)$$

где

$$|R(x, \lambda)| \leq C|x|. \quad (3)$$

Выборочной спектральной плотностью, или периодограммой, называется статистика

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-1} x(t_1) x(t_2) e^{i\lambda(t_1-t_2)}, \quad (4)$$

где $-\pi \leq \lambda \leq \pi$. Из [3] известно, что, если принять статистику (4) за оценку спектральной плотности, она будет асимптотически несмещенной, но не состоятельной оценкой. Как оценку спектральной плотности $f(\lambda)$ в точке λ_s , где

$$\lambda_s = \frac{2\pi s}{T}, \quad -\left[\frac{T}{2}\right] \leq s \leq \left[\frac{T}{2}\right], \quad (5)$$

рассмотрим выражение

$$\hat{f}_T(\lambda_s) = \sum_k \varphi_T(k) I_T(\lambda_{s+k}). \quad (6)$$

В равенстве (6) $\varphi_T(k)$ — некоторая функция, называемая спектральным окном и удовлетворяющая свойствам: $\varphi_T(k) \geq 0$, $\sum_k \varphi_T(k) = 1$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_k \varphi_T(k) |k| < \infty, \quad -\left[\frac{T}{2}\right] \leq k \leq \left[\frac{T}{2}\right].$$

Сформулируем несколько теорем, которые дают представление о свойствах оценки (6).

Теорема 1. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ удовлетворяет соотношениям (2) и (3), то для оценки $\hat{f}_T(\lambda_s)$, задаваемой (6), справедливо неравенство

$$|M \hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s)| \leq \frac{2\pi C}{T} \left(\sum_k \varphi_T(k) |k| + \frac{3}{2} \ln T \right). \quad (7)$$

Из теоремы 1 следует, что оценка спектральной плотности $\hat{f}_T(\lambda_s)$, задаваемая (6), является асимптотически несмещенной.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 T} \frac{\sin \frac{T z_1}{2}}{\sin \frac{z_1}{2}} \frac{\sin \frac{T z_2}{2}}{\sin \frac{z_2}{2}} \frac{\sin \frac{T z_3}{2}}{\sin \frac{z_3}{2}} \frac{\sin \frac{T(z_1 + z_2 + z_3)}{2}}{\sin \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}}.$$

Из работы [3] известно, что

$$\sup_T \frac{1}{(2\pi)^3 T} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi(z_1, z_2, z_3)| dz_1 dz_2 dz_3 \leq C_3.$$

Теорема 2. Пусть процесс $x(t)$ имеет первые четыре момента и спектральные плотности вторых порядков удовлетворяют (2) и (3). Тогда, если

$$\sup_{\lambda} |f(\lambda)| \leq C_1, \quad \sup_{\lambda_i, i=1, 2, 3} |f_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)| \leq C_2,$$

то

$$\begin{aligned} & |D \hat{f}_T(\lambda_s) - \sum_k \varphi_T^2(k) f^2(\lambda_s) - \sum_m \varphi_T(s+m) \varphi_T(s-m) f^2(\lambda_m)| \leq \\ & \leq \frac{2\pi C_2 \cdot C_3}{T} + \frac{4\pi^2 C^2}{T^2} \left(\sum_k \varphi_T^2(k) k^2 + 32 \ln^2 T \right) + \frac{4\pi C \cdot C_1}{T} \left(\sum_k \varphi_T^2(k) |k| + 2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим среднеквадратичное отклонение для оценки (9), т. е.

$$M |\hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s)|^2 = |M \hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s)|^2 + D \hat{f}_T(\lambda_s). \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (9) значение $\hat{f}_T(\lambda_s)$ и находя математическое ожидание и дисперсию оценки (6), получаем

$$M \hat{f}_T(\lambda_s) - f(\lambda_s) = \sum_k \varphi_T(k) \int_{-\pi}^{\pi} [f(z + \lambda_{s+k}) - f(\lambda_s)] \Phi_T(z) dz, \quad (10)$$

где функция $\Phi_T(z) = \frac{1}{2\pi T} \frac{\sin^2 \frac{Tz}{2}}{\sin^2 \frac{z}{2}}$ есть ядро Фейера.

$$\begin{aligned}
 \hat{Df}_T(\lambda_s) = & \frac{2\pi}{T} \sum_{k_1, k_2} \varphi_T(k_1) \varphi_T(k_2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_4(z_1 - \lambda_{s+k_1}, z_2 - \lambda_{s+k_1}, z_3 - \lambda_{s+k_2}) \times \\
 & \times \Phi(z_1, z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 + \sum_{k_1, k_2} \varphi_T(k_1) \varphi_T(k_2) \times \\
 & \times \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi(x - \lambda_{s+k_1}, x - \lambda_{s+k_2}) dx \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi(x - \lambda_{s+k_1}, x - \lambda_{s+k_2}) dx \right)^2 \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Из равенств (10) и (11) легко видеть, что они взаимосвязаны. Если мы будем уменьшать смещение, то дисперсия будет увеличиваться, а если будем уменьшать дисперсию, то смещение будет увеличиваться. Из теоремы 1 и 2 видно, что при $T \rightarrow \infty$ среднеквадратичное отклонение стремится к нулю.

З а м е ч а н и е 1. Если $x(t)$ — непрерывный случайный процесс, тогда по наблюдению $x(t)$, $t \in [0, T]$ можно построить оценку спектральной плотности, аналогичную оценке (6), только вместо сумм будут интегралы. В этом случае будут справедливы теоремы, подобные теоремам 1 и 2.

З а м е ч а н и е 2. Изложенное можно распространить и на однородные случайные поля.

Далее рассмотрим некоторые аспекты оценки спектральных плотностей высших порядков. Так как спектральная плотность n -го порядка

$$f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \text{ сосредоточена на многообразиях вида } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0 \pmod{2\pi},$$

то спектральная плотность n -го порядка будет функцией $n-1$ переменных. Действительно,

$$\begin{aligned}
 f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Big|_{\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0 \pmod{2\pi}} &= f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -\lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1}) = \\
 &= f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Заметим, что при исследовании оценок спектральных плотностей второго порядка появляются спектральные плотности 4-го порядка, о которых мы предполагаем, что они ограничены. Но важно построить удовлетворительную оценку этой плотности. Оценки спектральных плотностей высших порядков так же необходимы при проверке процессов на гауссовость (известно, что все спектральные плотности при $n > 2$ равны нулю для гауссовского случайного процесса). Кроме того, оценки старших спектральных плотностей используются во многих приложениях [4].

Как оценку спектральной плотности $f_n(\lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_{n-1}})$, рассмотрим статистику

$$\hat{f}_n(\lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_{n-1}}) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) I_n(\lambda_{s_1+k_1}, \dots, \lambda_{s_{n-1}+k_{n-1}}), \quad (12)$$

где $\lambda_{s_j} = \frac{2\pi s_j}{T}$, $-\left[\frac{T}{2}\right] \leq s_j \leq \left[\frac{T}{2}\right]$, $j = \overline{1, n-1}$; функция $\varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) \geq 0$ удовлетворяет свойствам:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) &= 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}} \varphi_n^T(k_1, \dots, k_{n-1}) |k_i| < \infty, \\
 -\left[\frac{T}{2}\right] \leq k_i &\leq \left[\frac{T}{2}\right], \quad i = \overline{1, n-1}.
 \end{aligned}$$

Функция $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется периодограммой n -го порядка и задается выражением

$$I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} T} \sum_{t_1, \dots, t_{n-1}=0}^{T-1} x(t_1) \dots x(t_n) e^{-i \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j},$$

где $\lambda_{s_n} = -\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{s_j}$.

Для оценки спектральной плотности n -го порядка можно сформулировать теоремы, подобные теоремам для оценки спектральной плотности второго порядка [5], откуда будет следовать, что оценка (12) асимптотически несмещенная и состоятельная.

Различные вопросы исследования оценок спектральных плотностей второго и высших порядков стационарных случайных процессов и полей можно найти в монографиях [3, 6] и работах [1—5, 8—13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбенко И. Г.— Докл. АН СССР, 1974, т. 5, с. 214.
2. Леонов И. П., Ширяев А. Н.— Теория вероятностей и ее применение, 1959, т. 4, вып. 3, с. 324.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1976.
4. Brillinger D. An introduction to polyspectra.— Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 1351.
5. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, вып. 1, с. 65.
6. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.— М., 1974.
7. Журбенко И. Г.— Украинский матем. сб., 1978, № 2.
8. Ибрагимов И. А.— Теория вероятностей и ее применение, 1963, т. 14, вып. 4, с. 319.
9. Алексеев В. Г.— Теория вероятностей и ее применение, 1973, т. 18, вып. 2, с. 280.
10. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1972, т. 12, вып. 1, с. 55.
11. Бенткус Р., Рудзкис Р., Сушинскас Ю.— Литовский матем. сб., 1974, т. 14, вып. 3.
12. Труш Н. Н. Исследование оценок спектральных плотностей однородных случайных полей. Деп. в ВИНТИ, № 1572-78 от 11.05.78.
13. Brillinger P. Asymptotic theory of estimates of k -th spectra.— Advanced Seminar on spectral analysis of time series (ed. B. Harris).— New-York, 1965, p. 153.

Поступила в редакцию
16.10.79.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 62—50

В. Л. МЕРЕЖА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$z(t) = Hx(t), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \quad -h \leq \tau < 0, \quad x(0) = x^0. \quad (3)$$

Здесь $x, x^0 \in R^n$; $z \in R^m$; $u \in R^r$; A, A_1, B, H — постоянные матрицы соответствующих размеров; h — постоянное запаздывание; $\varphi(\tau), \tau \in [-h, 0]$ — кусочно-непрерывная n -вектор-функция.

Определение. Система (1), (2) называется полностью управляемой, если для любого начального состояния (3) существуют момент $t_1, t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), t > 0, u(t) \equiv 0, t \geq t_1$, такие, что для соответствующего решения системы (1) выполняется соотношение $z(t) \equiv 0, t \geq t_1$.

Обозначим $\Delta(\lambda) = [\lambda E_n - A - A_1 \exp(-\lambda h)]$. Будем рассматривать только случай, когда уравнение $\det \Delta(\lambda) = 0$ имеет конечное число нулей λ_i

кратности ν_i , $i = \overline{1, N}$ соответственно.

Введем векторы c_{ijs} , $d_{ijs} \in R^n$ такие, что

$$\sum_{l=0}^{\nu_{ij}-s} \Delta^{(l)}(\lambda_i) \frac{c_{ijs+l}}{l!} = 0; \quad \sum_{l=0}^{\nu_{ij}-s} \frac{d_{ijs+l}}{l!} \Delta^{(l)}(\lambda_i) = 0, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}},$$

$$\sum_{j=1}^{l_i} \nu_{ij} = \nu_i;$$

$$\langle \Phi_{ijs}(\sigma), \Psi_{klm}(\sigma) \rangle = 0, \quad i, k = \overline{1, N}, i \neq k, j = \overline{1, l_i}, l = \overline{1, l_k},$$

$$s = \overline{1, \nu_{ij}}, m = \overline{1, \nu_{kl}}. \quad (4)$$

$$\langle \Phi_{ijs}(\sigma), \Psi_{ikl}(\sigma) \rangle = \begin{cases} 1, & j = k, s + l = \nu_{ij} \\ 0, & j \neq k, \text{ либо } j = k, s + l \neq \nu_{ij} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}; j, k = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}}, l = \overline{1, \nu_{ik}},$$

где билинейная форма [1]

$$\langle \Phi(\sigma), \Psi(\sigma) \rangle = \psi'(0) \Phi(0) + \int_{-h}^0 \psi'(h + \tau) A_1 \Phi(\tau) d\tau,$$

$$\Phi_{ijs}(\sigma) = \left\{ e^{\lambda_i \sigma} \sum_{l=0}^{\nu_{ij}-s} c_{ijs+l} \frac{\sigma^l}{l!} \quad -h \leq \sigma \leq 0 \right\},$$

$$\Psi_{ijs}(\sigma) = \left\{ e^{-\lambda_i \sigma} \sum_{l=0}^{\nu_{ij}-s} (-1)^l d_{ijs+l} \frac{\sigma^l}{l!}, \quad 0 \leq \sigma \leq h \right\}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}}.$$

Пусть $x_t = x(t + \tau)$, $-h \leq \tau \leq 0$, $t \geq 0$ — часть траектории $x(t)$ системы (1) с начальными условиями (3);

$$y(t) = \text{col} \{y_{ijs}(t), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}}\}, \quad y_{ijs}(t) = \langle x_t, \Psi_{ijs}(\sigma) \rangle.$$

Тогда [2]

$$\dot{y}(t) = Gy(t) + Cu(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$y(0) = \{ \langle x_0, \Psi_{ijs}(\sigma) \rangle, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}} \}, \quad (6)$$

где $G = \text{Diag} \{G_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}\}$,

$$G_{ij} = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right] \nu_{ij},$$

$$C = \{d_{ijs} B, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}}\}.$$

Пусть

$$\dot{z}(t) = HMy(t), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где $M = \{c_{ijs}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}}, 1\}$ — матрица, M имеет размеры

$n \times n$, так как $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \nu_{ij} = n$ [3].

Предположим теперь, что $u(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Тогда $\overset{\vee}{x}(t) = x(t_1 + t)$ является решением однородной системы $\overset{\vee}{\dot{x}}(t) = A \overset{\vee}{x}(t) + A_1 \overset{\vee}{x}(t - h)$, $t \geq 0$, с начальными условиями $\overset{\vee}{x}(\tau) = x(t_1 + \tau)$, $-h \leq \tau \leq 0$. Из [4] и (4) следует, что для $t \geq (n - 1)h$

$$\begin{aligned}
 x_{t_1+t} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{\nu_{ij}} \langle x_{t_1+t}, \psi_{ijs}(\tau) \rangle \Phi_{ij\nu_{ij}-s+1}(\tau) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{\nu_{ij}} y_{ijs}(t_1+t) \Phi_{ij\nu_{ij}-s+1}(\tau),
 \end{aligned}$$

откуда получаем

$$x(t_1+t) = My(t_1+t), \quad t \geq (n-1)h. \quad (8)$$

Теорема 1. Для того, чтобы система (1), (2) была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы система (5), (7) была полностью управляемой.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1), (2) полностью управляема и $y^0 = \text{col} \{y_{ijs}^0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, \nu_{ij}}\}$ — произвольный n -вектор. Выберем начальные условия в (3) в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{\nu_{ij}} y_{ijs}^0 \Phi_{ij\nu_{ij}-s+1}(\tau), \quad -h \leq \tau \leq 0.$$

Из полной управляемости системы (1), (2) следует, что в этом случае найдется t_1 и $u(t)$, $t \geq 0$, $u(t) = 0$, $t \geq t_1$, такие, что $Hx(t) = 0$, $t \geq t_1$. Из (7) и (8) тогда получаем, что

$$\dot{z}(t) = HMy(t) = Hx(t) = 0, \quad t \geq (n-1)h + t_1,$$

где $y(t)$ решение (5) с начальными условиями $y(0) = y^0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть система (5), (7) полностью управляема. Тогда для произвольных начальных условий (3), найдется t_1 и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \geq 0$, $u(t) = 0$, $t \geq t_1$ такие, что $HMy(t) = 0$, $t \geq t_1$ для решения системы (5) с начальными условиями (6).

Из (8) для $t \geq (n-1)h + t_1$ имеем $z(t) = Hx(t) = HMy(t) = 0$.

Теорема 1 полностью доказана. На основании результатов работы [5] теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Система (1), (2) тогда и только тогда полностью управляема, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} HM \\ HMG \\ \dots \\ HMG^{n-1} \end{bmatrix} [C : GC : \dots : G^{n-1}C] = \text{rank} \begin{bmatrix} HM \\ HMG \\ \dots \\ HMG^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $H = E_n$. Тогда полная управляемость системы (1), (2) эквивалентна полной управляемости системы (1), определение которой было введено в [6].

Следствие. Для того, чтобы система (1) была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы система (5) была полностью управляемой в смысле Калмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шиманов С. Н. — Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 1.
2. Осипов Ю. С. — Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 5.
3. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М., 1975.
4. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М., 1967.
5. Марченко В. М., Мережа В. Л. — Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1978, № 2.
6. Марченко В. М. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5.

Поступила в редакцию
12.12.79.

Кафедра методов оптимального
управления

М. И. ДАВОРИ, А. И. КАЛИНИН

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Пусть на траекториях обыкновенной динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

где x — n -вектор состояния; u — r -вектор управления, в классе r -мерных кусочно-непрерывных функций $u(t)$ со значениями из некоторого открытого множества $U \subset R^r$ минимизируется функционал

$$I(u) = \varphi(x(t_1)). \quad (2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что вектор-функция $f(x, u, t)$ имеет непрерывные частные производные по x и u до второго порядка включительно, а функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема по x .

Как известно [1], оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (1) — (2) удовлетворяет условию максимума $H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$, где $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$; $x^0(t)$ — оптимальная траектория, соответствующая управлению $u^0(t)$, а $\psi^0(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}^0(t) = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad \psi^0(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}, \quad (3)$$

Следуя [2], допустимое управление $u(t)$ назовем особым, если для любого вектора $u \in U$, $H(x(t), \psi(t), u(t), t) \equiv H(x(t), \psi(t), u, t)$, $t \in T$.

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, — особое оптимальное управление в задаче (1) — (2). Наряду с $u^0(t)$ рассмотрим «возмущенное» управление $\tilde{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, и пусть $\tilde{x}(t) = x^0(t) + \Delta x(t)$ — траектория системы (1), порожденная управлением $\tilde{u}(t)$. Приращение критерия качества запишем следующим образом:

$$\Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2).$$

Пусть $\psi^0(t)$, $t \in T$, — решение системы (3), а $\Psi^*(t)$ — $(n \times n)$ -матричная симметричная функция, удовлетворяющая условию $\Psi^*(t_1) = - \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2}$.

Тогда приращение критерия качества может быть представлено в виде [3]

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Delta \tilde{u}' H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \Delta \tilde{u}' f'(x^0, u^0, t) \Psi^*(t) \Delta x(t) \right] dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\Psi^*(t) + \frac{\partial f'(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi^*(t) + \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} \right] \Delta x(t) dt + \eta, \quad (4)$$

где $\eta = o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|^2) dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Psi^*(t) o_3(\|\Delta x(t)\|) dt$.

Выше использованы следующие обозначения:

$$\Delta_{\tilde{u}} f(x^0, u^0, t) = f(x^0, \tilde{u}, t) - f(x^0, u^0, t),$$

$$\Delta_{\tilde{u}} H(x^0, \psi^0, u^0, t) = H(x^0, \psi^0, \tilde{u}, t) - H(x^0, \psi^0, u^0, t).$$

Пусть θ — произвольный момент времени из полуинтервала $[t_0, t_1)$; ε — положительное число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$. Положим

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \theta) \\ u, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon) \\ S(t) \Delta x(t), & t \in [\theta + \varepsilon, t_1), \end{cases} \quad (5)$$

где u — произвольный вектор из U , $S(t)$ — $(r \times n)$ -матричная функция с кусочно-непрерывными элементами. На полуинтервале $[\theta, \theta + \varepsilon)$ приращение $\Delta x(t)$ можно представить в виде

$$\Delta x(t) = \Delta \dot{x}(\theta)(t - \theta) + o_3(t - \theta) = \Delta_u f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta)(t - \theta) + o_4(\varepsilon), \quad (6)$$

откуда, в частности, следует, что на отрезке $[\theta + \varepsilon, t_1]$ $\Delta x(t)$ имеет порядок малости ε .

На вариации (5) приращение критерия качества будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_0^{\theta + \varepsilon} \left[\frac{\partial \Delta_u H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \Delta_u f'(x^0, u^0, t) \Psi^*(t) \Delta x(t) \right] dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\theta + \varepsilon}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}^*(t) + \frac{\partial f'(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi^*(t) + \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} + S'(t) \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x \partial u} S(t) + \\ & \left. + S'(t) \frac{\partial f'(x^0, u^0, t)}{\partial u} \Psi^*(t) + \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} S(t) \right] \Delta x(t) dt + o_5(\varepsilon^2). \quad (7) \end{aligned}$$

Пусть $\Psi^*(t)$ есть решение матричного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}^*(t) = & - \left[\frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} S(t) \right]' \Psi^*(t) - \\ & - \Psi^*(t) \left[\frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} S(t) \right] - S'(t) \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u \partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x \partial u} S(t) - \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x^2}, \quad \Psi^*(t_1) = - \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2}, \quad (8) \end{aligned}$$

тогда второй интеграл в правой части равенства (7) будет иметь порядок

малости выше ε^2 , и в силу (6) имеем $\Delta J(u^0) = - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta_u H'(x^0, \psi^0, u^0, \theta)}{\partial x} \times \right. \\ \times \Delta_u f(x^0, u^0, \theta) + \Delta_u f'(x^0, u^0, \theta) \Psi^*(\theta) \Delta_u f(x^0, u^0, \theta) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$. В силу оптимальности управления $u^0(t)$ $\Delta J(u^0) \geq 0$, что влечет за собой выполнение условия

$$\frac{\partial \Delta_u H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta_u f(x^0, u^0, t) + \Delta_u f'(x^0, u^0, t) \Psi^*(t) \Delta_u f(x^0, u^0, t) \leq 0, \quad (9)$$

для любых $u \in U$ и $t \in [t_0, t_1)$.

Теорема. Для того, чтобы особое управление $u^0(t)$, $t \in T$, было оптимальным в задаче (1) — (2) необходимо, чтобы для любого вектора $u \in U$ и любого момента $t \in [t_0, t_1)$ имело место неравенство (9), где $\Psi^*(t)$ — решение уравнения (8) с произвольной кусочно-непрерывной $(r \times n)$ -матрицей $S(t)$.

Так как множество U — открытое, то из неравенства (9) следует, что $(r \times r)$ -матрица

$$\frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u \partial x} \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} + \frac{\partial f'(x^0, u^0, t)}{\partial u} \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u}$$

является знакоотрицательной.

Необходимое условие оптимальности особых управлений (9) является обобщением известного условия в матричных импульсах Р. Габасова [4], которое следует из (9) при $S(t) \equiv 0$. Новое условие может оказаться

эффективным в тех случаях, когда условие в матричных импульсах «не работает».

Пример. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = -ux_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\varphi(x) = x_3$.

Легко проверить, что управление $u^0(t) \equiv 0$ является особым. Полагая $S = (1, 0, 0)$, находим, что вдоль этого управления

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi^* \frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{1}{2} - t\right) e^{2(1-t)} + \frac{1}{2} > 0, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right),$$

что противоречит условию (9). Таким образом, управление $u^0(t) \equiv 0$ не является оптимальным.

Заметим, что условие в матричных импульсах в данном примере неэффективно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов.— М., 1961.
2. Розоноэр Л. И.— Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 11.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления.— М., 1973.
4. Габасов Р.— Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1968, № 5.

Поступила в редакцию
22.03.79.

Кафедры МОУ, теории вероятностей и
математической статистики

Краткие сообщения

УДК 681.323:681.326.3

Г. К. АФАНАСЬЕВ, В. И. ЛЕБЕДЕВ, А. М. ОРАНСКИЙ

К ИЗМЕРЕНИЮ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ЗАДАННОЙ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть прямая проходит через две точки $M'(X', Y')$ и $M''(X'', Y'')$ в системе координат XOY (см. рисунок). Требуется найти кратчайшее расстояние h от точки $M^0(X^0, Y^0)$ до прямой $M'M''$.

Для того, чтобы найти h , необходимо перейти от системы координат XOY к новой системе $X_k O Y_k$, полученной вращением системы координат (в нашем случае в направлении против вращения часовой стрелки) на угол φ , чтобы новая ось OX_k стала перпендикулярной к прямой $M'M''$. Переход от системы координат XOY к системе $X_k O Y_k$ эквивалентен вращению в противоположном направлении на этот же угол векторов \vec{OM}' , \vec{OM}'' и \vec{OM}^0 . Новые значения координат всех трех точек связаны с углом вращения векторов следующим образом:

$$\begin{cases} x'_k = x' \cos \varphi + qy' \sin \varphi; \\ x''_k = x'' \cos \varphi + qy'' \sin \varphi; \\ x^0_k = x^0 \cos \varphi + qy^0 \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где $q = \begin{cases} +1 & \text{при вращении по часовой стрелке;} \\ -1 & \text{при вращении против часовой стрелки.} \end{cases}$

В результате поворота указанных векторов проекции точек M' и M'' на ось OX_k стали одинаковыми: $x'_k = x''_k = x_k$. Кратчайшее расстояние h оказалось равным разности составляющих по оси OX_k точек M^0 и $M'(M'')$:

$$h = |x_k - x^0_k|.$$

Решение системы (1) связано с подбором таких значений φ (и вычислением $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$), которые приводят к равенству составляющих x'_k и x''_k . Реализация указанного алгоритма связана с большими аппаратурными затратами, вызванными в основном необходимостью реализации операций умножения и хранения двух массивов констант вида $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$.

Уменьшение объема оборудования и времени вычисления возможно с использованием метода псевдоповоротов вектора [1], исключающего необходимость проведения операций умножения и не требующего ЗУ для

хранения констант. Метод предусматривает поворот вектора \vec{R} на угол β_i , при котором его конец перемещается по направлению перпендикулярному к его первоначальному положению. При этом модуль вектора уве-

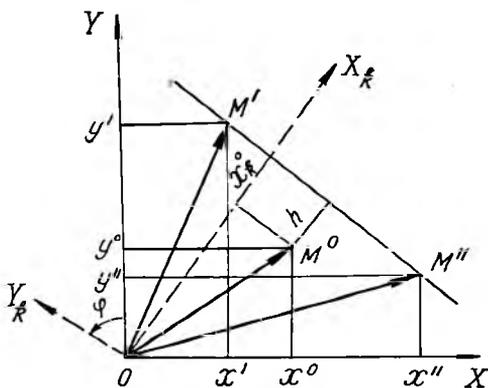
личивается в $\frac{1}{\cos \beta_i}$ раз. Проведя ряд таких итерационных шагов и выбирая такую последовательность β_i , чтобы они были кратны степени двойки: $\operatorname{tg} \beta_i = 2^{-i}$, $i = 1, n$, получаем следующую систему уравнений для вычисления значений очередных приращений:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + q_i y_{i-1} 2^{-i}; \\ y_i = y_{i-1} - q_i x_{i-1} 2^{-i}. \end{cases} \quad (2)$$

В результате проведения n итерационных шагов вектор \vec{R} окажется равным $K_n \vec{R}$, где K_n — коэффициент деформации, зависящий от количества итерационных шагов: $K_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \cos \beta_i} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_i)} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 + 2^{-2i})}$.

Если такой итерационный процесс, направленный на достижение равенства составляющих \vec{OM}' и \vec{OM}'' по оси OX_k , организовать для всех трех векторов \vec{OM}' , \vec{OM}'' и \vec{OM}^0 , то система (2) преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} x_{m, i+1} = x_{m, i} + q_i y_{m, i} 2^{-(i+1)}; \\ y_{m, i+1} = y_{m, i} - q_i x_{m, i} 2^{-(i+1)}; \\ q_i = \operatorname{sign} \gamma_i = \begin{cases} +1, & \gamma_i \geq 0; \\ -1, & \gamma_i < 0; \end{cases} & \gamma_{i+1} = x'_i - x''_i; \\ i = \overline{0, n-1}; m = \overline{0, 1, 2}; \\ h = \frac{1}{k_n} |x'_n - x''_n|. \end{cases} \quad (3)$$



Система (3) представляет собой комплекс однородных алгоритмов вращения трех векторов. Это дает возможность реализации системы (3) однотипными решающими модулями с простой схемой управления, обеспечивающей функционирование модулей в заданном порядке. Структура модулей так же проста: каждый из них содержит по два сдвиговых регистра, сумматор и коммутатор. При параллельно-параллельной структуре вычислителя и при совмещении операций суммирования

и сдвига, а также при организации однотактного многозарядного сдвига общее время решения задачи (без учета конечной операции умножения) $\tau = (n+2)T$, где T — период тактовой частоты.

Следует отметить, что конечную операцию умножения можно реализовать достаточно эффективно на основе программируемых логических матриц [2], например, способом, описанным в [3].

Вычисление расстояния по предлагаемому алгоритму в сравнении с непосредственным вычислением его по известным формулам, например, $h = \frac{AX^0 + BY^0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, позволяет уменьшить время вычислений не менее, чем в 1,5 раза при более простой и регулярной структуре вычислителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оранский А. М. Аппаратные методы в цифровой вычислительной технике.— Минск, 1977.
2. Якубайтис Э. А.— АВТ, 1975, № 5, с. 1.
3. Афанасьев Г. К., Лебедев В. И.— В сб.: Теория и методы автоматизации проектирования, вып. 2.— Минск, 1979, с. 127.

Поступила в редакцию
04.07.79.

Кафедра ЭММ

УДК 517.925

С. С. БЕЛЯВСКИЙ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим две n -мерные системы дифференциальных уравнений

$$x_1' = f(t, x_1), \quad (1)$$

$$x_2' = g(t, x_2), \quad (2)$$

правые части которых непрерывны и обладают свойством существования и единственности решений в $R_+ \times R^n$. Предположим, что решения $x_1(t, x_0)$ и $x_2(t, x_0)$ соответственно систем (1) и (2) продолжимы на R_+ , если они начинаются в R^n при $t=0$. Будем также полагать, что эти решения перестановочны [1].

Зафиксируем точку $x_0 \in R^n$ и e , принимающее значение 1 или 2. Выберем некоторую точку x_i , для которой существует $t_i \geq 0$ такое, что выполнено условие

$$x_e(t_i, x_i) = x_0 \quad (3)$$

и обозначим

$$P_e(x_0, x_i) = \{x/x = x_e(t, x_i), t \geq 0\}, M_e^1(x_0) = \bigcup_{x_i} P_e(x_0, x_i).$$

(Объединение берется по всем x_i , для которых выполнено условие (3)).

Выберем произвольную точку x_i , для которой существует $t_i \geq 0$ такое, что выполнено условие

$$x_e(t_i, x_i) \in M_e^1(x_0) \quad (4)$$

и обозначим

$$P_e[M_e^1(x_0), x_i] = \{x/x = x_e(t, x_i), t \geq 0\}, M_e^2(x_0) = \bigcup_{x_i} P_e[M_e^1(x_0), x_i].$$

(Объединение берется по всем x_i , для которых выполнено условие (4)).

Аналогично определим множества $M_e^k(x_0)$, $k = 1, 2, \dots$, а затем множество $M_e(x_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_e^k(x_0)$. Из определения перестановочности решений систем (1) и (2) следует

Теорема 1. Если $x_1(t, x_0)$ — периодическое решение системы (1), то и любое решение этой системы, начинающееся на $M_2(x_0)$ при $t=0$, также периодическое.

Следствие 1. Если $x_1(t, x_0)$ и $x_2(t, x_0)$ периодические, то $M_1(x_0) = M_2(x_0)$.

Следствие 2. Множество всех точек покоя системы (1) является инвариантным относительно системы (2).

Следствие 3. Если точки покоя системы (1) образуют замкнутую кривую L и на L нет точек покоя системы (2), то L является интегральной кривой системы (2).

Пусть системы (1) и (2) стационарны, т. е. имеют вид

$$x'_1 = f(x_1), \quad (5)$$

$$x'_2 = g(x_2). \quad (6)$$

Тогда имеет место.

Лемма. Решения системы $z' = \lambda f(z) + \mu g(z)$, где λ и μ — постоянные, перестановочны с решениями систем (5) и (6). Из леммы следует.

Теорема 2. Если решения систем (5) и (6) имеют в точке x_0 общую касательную, то они совпадают.

Предположим, что системы (5) и (6) двумерные, тогда из теоремы 2 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 4. Если системы (5) и (6) имеют общую особую точку типа центр, то их траектории совпадают.

Следствие 5. Если x_0 является особой точкой типа центр системы (5), то она не может быть особой точкой типа седло системы (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белявский С. С. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, с перестановочными решениями. № 2020. Деп. от 06.06.79.

Поступила в редакцию
16.10.79.

Кафедра высшей математики и математической физики

УДК 532.529.5:622.276.031

А. А. КЛЕВЧЕНЯ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ВОДОЙ

Рассматривается одномерная задача о прямолинейном изотермическом вытеснении вязко-пластической нефти водой из недеформируемого пласта, когда капиллярные силы не учитываются, фазы несжимаемы и взаимонерастворимы.

Пусть x — координата в области течения; z — ось, направленная вертикально вверх; t — время ($0 \leq t \leq t_1$); p — давление; k — абсолютная проницаемость среды; f_i и μ_i — относительная фазовая проницаемость и вязкость i -ой фазы соответственно; G — предельный градиент давления нефти ($G = \text{const}$); α — угол между осями z и x ; ρ_i — плотность i -ой фазы; g — ускорение свободного падения; индексы $i = 1$ и 2 относятся к воде и нефти соответственно.

Законы фильтрации фаз запишем в виде:

$$\omega_1 = - \frac{k f_1}{\mu_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\omega_2 = - \delta \frac{k f_2}{\mu_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \left(1 - \frac{G}{\left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|} \right), \quad \delta = \begin{cases} 1 & \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right| > G \\ 0 & \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right| \leq G, \end{cases}$$

где $\psi_i = p + \rho_i g z$.

Введем безразмерные переменные:

$$\varphi = \frac{p}{G_* \cdot L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t \cdot k_* \cdot G_*}{m \cdot L \cdot \mu_2}, \quad \eta = \frac{k}{k_*}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_*}, \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_*},$$

$$G_* = \rho_* \cdot g, \quad q = \frac{\omega \mu_2}{k_* G_*},$$

где G_* , k_* , ρ_* — характерные предельный градиент давления нефти, абсолютная проницаемость среды, плотность соответственно; $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

После несложных преобразований (по аналогии с [1]) из законов фильтрации (1) и уравнений неразрывности фаз для определения безразмерного давления φ и водонасыщенности s может быть получена система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (A \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + B) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \tau} + q \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

где $A = \eta f_1 / \mu + \delta \eta f_2$, $B = \eta f_1 / \mu \cdot \tilde{\rho}_1 \cdot \cos \alpha + \delta \eta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G})$;

$$F_0 = \frac{f_1}{f_1 + \mu f_2}, \quad q = -A \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - B;$$

$$F = \begin{cases} 1, & q \leq \eta f_1 / \mu [\cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1) + \tilde{G}] \\ F_0 \{1 + \eta f_2 / q [\tilde{G} + \cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1)]\}, & q > \eta f_1 / \mu [\cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1) + \tilde{G}]. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы (2) следует, что суммарный поток q не зависит от ξ , т. е. $q = q(\tau)$.

Формулировка начальных и граничных условий, а также метод решения системы (2), когда $\alpha = 90^\circ$ описаны в [2]. Как известно [3], в зависимости от безразмерного π_0 , который в случае наклонного пласта запишется в виде $\pi_0 = \frac{\eta [\tilde{G} + \cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1)]}{q}$ реализуются три режима вытеснения: поршневой, с образованием зоны застывшей нефти и зоны движения смеси и режим Баклея—Левретта.

Для расчета давления применим следующий метод. Учитывая, что

$$q = -(\eta \frac{f_1}{\mu} + \delta \eta f_2) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\eta f_1}{\mu} \tilde{\rho}_1 \cos \alpha + \delta \eta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G}), \quad (3)$$

имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{q}{\eta f_1 / \mu + \delta \eta f_2} - \frac{f_1 / \mu \cdot \tilde{\rho}_1 \cos \alpha + \delta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G})}{f_1 / \mu + \delta f_2}. \quad (4)$$

$$\text{Обозначим: } \Phi_1 = \frac{1}{\eta f_1 / \mu + \delta \eta f_2}, \quad \Phi_2 = \frac{f_1 / \mu \cdot \tilde{\rho}_1 \cos \alpha + \delta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G})}{f_1 / \mu + \delta f_2}.$$

Предположим, что на некотором временном слое с номером n известно распределение насыщенности и рассмотрим метод расчета давления, если при $\xi = 0$ задано условие $\varphi(\tau, 0) = \varphi_1$. Проинтегрируем уравнение (4) по ξ в интервале $0 \leq \xi \leq \xi$, используя значения давления на слое $n-1$:

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) - q \int_0^\xi \Phi_1 d\xi - \int_0^\xi \Phi_2 d\xi. \quad (5)$$

Интегралы вычисляются по правилу трапеции. При $\xi = 1$ будем иметь

$$q = -\frac{\varphi(1) - \varphi(0) + \int_0^1 \Phi_2 d\xi}{\int_0^1 \Phi_1 d\xi}. \quad (6)$$

Метод расчета давления состоит в следующем: по известным на временном слое с номером n распределению насыщенности и временном слое с номером $n-1$ распределению давления из (6) находим q на слое n . Затем из (5) находим распределение давления на слое n .

Для оценки эффективности предлагаемого метода результаты расчетов сопоставлялись с данными [2] в случае всех трех режимов вытеснения. Затраченное машинное время расчета любого варианта, когда реализуется режим Баклея—Левретта, в обоих случаях приблизительно одинаковое, так как в обоих случаях при расчете давления практически не требуется проводить итерации по нелинейности. Для двух остав-

шихся режимов вытеснения время расчета одного варианта по предлагаемому методу в три — четыре раза меньше, чем по методу [2]. Предложенный в [2] метод без затруднений может быть обобщен и применен для решения двумерных задач, однако, в одномерном случае при его численной реализации требуется выполнять относительно большое число итераций по нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей.— М., 1975, с. 121.
2. Клевченя А. А., Таранчук В. Б.— Изв. вузов СССР. Нефть и газ, 1979, № 2, с. 51.
3. Алишаев М. Г.— В сб.: Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.— Новосибирск, 1975, с. 38.

Поступила в редакцию
30.10.79.

НИИ ПФП

УДК 510.1

Г. И. МАЛЫХИНА

«ФОРМЫ СТРОГОЙ НАУКИ» Р. ГРАССМАНА И ИХ ОТНОШЕНИЕ К ЕСТЕСТВЕННОМУ ЯЗЫКУ

Построение универсального символического языка связано с решением проблемы взаимоотношения формализованных исчислений с естественным языком человеческого общения. Сознвая это, немецкий логик и математик конца прошлого века Р. Грассман, теоретическое наследие которого является незаслуженно забытым, будучи совершенно незнаком с работами Дж. Буля, одновременно с ним и независимо от него, пытался создать искусственный язык, который был бы свободен от известных недостатков естественного языка. Основным своеобразием его логического исчисления является то, что логике предпосылается своего рода «протологика» в виде «Учения о величинах» [1]. В последнем доказываются положения, имеющие место во всех прочих формах «строгой науки» или математики (учение о понятии или логика, учение о связи или комбинаторика, учение о числе или арифметика, учение о протяженности), ибо осуществление идеала научной классификации необходимо предполагает наличие завершеного знания об основных операциях, служащих для соединения элементов понятий (в данном случае — величин), о свойствах этих операций, а также знание законов связи понятий. Вся эта предварительная работа выпадает на долю «Учения о величинах». Вслед за понятием «величины» определяются равные и неравные величины, вводится определение «связи величин». При этом Грассман различает *всеобщий знак связи*, который обозначает любую связь двух величин и обозначается знаком « \circ » (например, « $a \circ b$ » читается: « a , связанное с b » или просто « a с b », и *особые знаки связи*, которыми являются знак равенства и знак неравенства. Сложение и умножение величин являются первыми двумя уровнями связи, обладающими свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Логика же, как естественное продолжение «Учения о величинах» (а, стало быть, в ней имеют значение все основоположения данного учения) за основание берет следующие три положения: $e + e = e$; $e \cdot e = e$; $e_1 \cdot e_2 = 0$, в которых e означает элементарную величину, не являющуюся результатом связи других величин, первые два положения означают, что сумма или произведение двух равных понятий вновь дает это же понятие, наконец, третье положение означает, что произведение двух понятий, не имеющих общих элементов, равно нулю.

Дав определение исходных понятий, возможных операций и их свойств, Грассман излагает свое логическое учение, придерживаясь тра-

диционной структуры (учение о понятии, учение о суждении, учение об умозаключении), осуществляя его путем тождественных преобразований и индуктивно доказываемых теорем. При этом, по его мнению, простые для понимания преобразования, лежащие в основе данного логического исчисления, не предполагают использования законов естественного языка. Благодаря этому оно обладает строгостью, которая отсутствует в обычном языке и в котором, в отличие от учения о величинах, каждое слово имеет множественный смысл [2].

Но хотя собственный прогресс учения о формах содержится в доказательствах теорем и преобразованиях формул, это учение, как справедливо замечает Грассман, не может обойтись без естественного языка человеческого общения, поскольку вся передача мыслей происходит с его помощью. Без него невозможны также предварительные пояснения того, что необходимо понимать под теми или иными знаками величин и их связей. «Рассуждения,— пишет в этой связи советский ученый Бирюков Б. В.— необходимы хотя бы тогда, когда происходит запись исходных данных на языке (символическими средствами) исчисления. Кроме того, при построении самих исчислений всегда в конце концов приходится прибегать к содержательным рассуждениям, к общечеловеческой логике» [3].

Развитие современной логики со всей очевидностью показало, что не существует общего метода, позволяющего заменить любые рассуждения вычислением, а также то, что не существует полного и одновременно непротиворечивого исчисления не только всех возможных истин (как мечтал Лейбниц), но даже арифметических. В связи с этим между учением о формах и естественным языком у Грассмана существует двойное отношение. С одной стороны, естественный язык используется для «перевода» на общепонятный язык получаемых в этом учении «уравнений величин», теорем и доказательств, что позволяет пояснить их содержание. С другой стороны, учение о формах применяется и к мышлению и языку с целью придания ему определенности, которой обыденный язык не обладает.

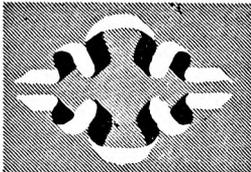
Таким образом, алгебро-логическое исчисление Грассмана является серьезной попыткой решать традиционные логические задачи алгебраическими методами. При таком подходе любое суждение выражается в виде уравнений с символами, в которых действуют логические законы, подобные законам алгебры. Операции с системой знаков осуществляются по правилам, которые определяются только формой выражений, состоящих из этих символов. И, хотя учение о формах Грассмана, включающее лишь начала логики и некоторые разделы математики, вряд ли могло претендовать на роль — «внесения строгости» в язык и мышление, однако, в силу своей уверенности в практической осуществимости и безграничных возможностей универсального символического языка, он был одним из тех, кто подготовил почву для открытия конкретных ограниченных методов формализованных языков, что и было доказано несколько десятилетий спустя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grassmann R. Die Formenlehre oder Mathematik.— Stettin, 1872, Bd. 1, S. 26.
2. Ibid., Bd. 3, S. 4.
3. Бирюков Б. В. Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике.— М., 1963, с. 114.

Поступила в редакцию
14.05.79.

Институт математики АН БССР



Наши юбиляры

ИЛЬЯ ГРИГОРЬЕВИЧ НЕКРАШЕВИЧ (К 75-летию со дня рождения)



Исполнилось 75 лет со дня рождения и 50 лет научно-педагогической и общественной деятельности известного белорусского ученого и педагога, одного из старейших выпускников БГУ имени В. И. Ленина, профессора кафедры радиотехники и физической электроники Ильи Григорьевича Некрашевича.

Поступив в 1923 г. на физико-математическое отделение педагогического факультета Белорусского государственного университета, Илья Григорьевич связал свою судьбу с университетом, пройдя путь от студента до профессора, заведующего кафедрой.

После успешного окончания университета и аспирантуры при МГУ с 1930 г. он работает в БГУ имени В. И. Ленина вначале в должности ассистента, а затем доцента кафедры. С 1937 г. бессменно заведует кафедрой физики.

С первых дней Великой Отечественной войны И. Г. Некрашевич стал членом подпольной коммунистической организации г. Минска (группа М. Б. Осиповой), а с 1943 г. вошел в состав партизанского отряда 2-й Минской Краснопартизанской бригады. За участие в партизанском движении награжден медалью «Партизану Великой Отечественной войны I степени» и медалями: «За отвагу», «За победу над

Германией в Великой Отечественной войне», юбилейными медалями.

После освобождения г. Минска И. Г. Некрашевич возвратился в университет и продолжил работу в должности заведующего кафедрой, отдавая много сил и энергии восстановлению физических лабораторий. И. Г. Некрашевич активно занимается научной деятельностью. Список его публикаций, первая из которых вышла в 1930 г., ныне насчитывает свыше 150 наименований.

Научную работу И. Г. Некрашевич тесно увязывал с деятельностью руководимой им в период с 1948 по 1961 г. лабораторией электрофизики физико-технического института АН БССР. В 1961 г. при кафедре была создана научно-исследовательская лаборатория, вошедшая в 1970 г. в состав НИИ ПФП.

Под руководством И. Г. Некрашевича были начаты и получили широкое развитие исследования по физике явлений, происходящих при взаимодействии плазмы с поверхностью твердых тел. В ходе этих исследований И. Г. Некрашевичем совместно с И. А. Бакуто создана миграционная теория электрической эрозии металлов при конденсированных электрических разрядах; совместно с А. А. Лабудой предложены и разработаны диагностические методы исследования нестационарных плазменных процессов в контакте плазмы с полупроводниками и металлами. Эти работы способствовали развитию нового научного направления на кафедре: плазменных методов обработки и исследования поверхности твердых тел применительно к микроэлектронике.

За время своей многолетней научно-педагогической деятельности И. Г. Некрашевич подготовил большое количество молодых специалистов для народного хозяйства, 15 кандидатов наук.

За многолетнюю и плодотворную научно-педагогическую деятельность И. Г. Некрашевич в 1961 г. был награжден орденом Ленина, а в 1972 г. удостоен звания заслуженного деятеля науки БССР.

Илья Григорьевич Некрашевич продолжает плодотворно трудиться на благородном поприще педагога, ученого, воспитателя молодежи.

Коллектив студентов, преподавателей и сотрудников университета желают ему доброго здоровья и новых творческих успехов на благо нашей Родины.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 532.516

Т. В. Веремеенко, М. М. Чепинога. Движение жидкости в пористых диффузорах. № 2387-79. Деп. от 28.06.79.

Рассмотрены нелинейные задачи об установившихся движениях вязкой несжимаемой жидкости в плоском и коническом пористых диффузорах. Получены теоретические решения задач. Сделаны численные расчеты на ЭВМ и установлено влияние однородного просачивания на характер течения.

УДК 519.82

О. И. Костюкова. Безопорные методы решения задачи о потоке минимальной стоимости на обобщенной сети. № 2478-79. Деп. от 09.07.79.

Для решения сетевой распределительной задачи предлагаются прямой и двойственный методы. Для улучшения начальной информации используются α -подходящие направления, построение которых осуществляется методом динамического программирования.

УДК 517.948.32

Г. В. Кухарчук. Неоднородная краевая задача Римана на счетном множестве параллельных прямых. № 2479-79. Деп. от 09.07.79.

Получены формулы общего решения неоднородной краевой задачи Римана на счетном множестве параллельных прямых, а также найдены условия разрешимости исследуемой задачи в классе ограниченных функций.

УДК 519.10

В. М. Лихачев. О гранях транспортного многогранника. № 2653-79. Деп. от 18.07.79.

Получены явные формулы для подсчета числа вершин любой грани максимальной размерности невырожденного транспортного многогранника с заданным числом граней и минимальным числом вершин. Показано, что многогранник с $(m-1)n+k$ гранями и минимальным числом вершин при $3 \leq k \leq n$ имеет k граней диаметра единица и $(m-1)n$ граней, диаметр каждой из которых равен диаметру самого многогранника. Указан класс многогранников обобщенной транспортной задачи, эквивалентных граням транспортного многогранника. Доказано, что число базисов такой обобщенной транспортной задачи размера $m \times n$ выражается формулой $(m-1)(n-1)m^{n-2}n^{m-2}$.

УДК 530.1.53.02/08

В. А. Коробов. Физические понятия и теория нечетких множеств. № 2654-79. Деп. от 18.07.79.

Предлагается описание структуры физических понятий на основе теории нечетких множеств и нечеткой логики, позволяющее учитывать и общность, и различие смысла одного и того же физического понятия в разных теориях при описании однопорядковых явлений. Обосновывается, что физическим рассуждениям более адекватна нечеткая логика. Предложенный подход полезен при аксиоматизации физики и при исследовании связей различных теорий.

УДК 517.948.32

В. А. Габринович. Смешанная краевая задача для полианалитических функций. № 2655-79. Деп. от 18.07.79.

Решается смешанная краевая задача методом конформного склеивания, проводимым в два этапа. Исходная задача сводится к последовательности краевых задач Римана для аналитических функций на сложном контуре с некоторыми дополнительными условиями. С помощью теории задачи Римана находятся условия разрешимости и число решений.

УДК 621.315.592

В. В. Красковская, П. Ф. Лугаков, В. В. Шуша. Роль кластеров радиационных дефектов в изменении электрофизических характеристик кремния при облучении высокоэнергетическими γ -квантами. № 2656-79. Деп. от 18.07.79.

Проанализированы процессы накопления и отжига радиационных дефектов (РД) в n - и p -кремнии, облученном γ -квантами тормозного спектра с $E_m = 100$ МэВ. Показано, что при таком облучении в результате фотоядерных реакций эффективно образуются кластеры РД, играющие доминирующую роль в изменении концентрации и подвижности носителей заряда.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комбинат ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

В. Т. Ерофеевко, А. Н. Крючков. **Решение задач дифракции в плоско-слоистом пространстве с шаровыми включениями. II (расчет на ЭВМ).** № 2657-79. Деп. от 18.07.79.

Решена краевая задача дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на однородный шар с конечной проводимостью, расположенный возле не идеально проводящей плоской границы раздела двух сред. На основании теорем сложения, связывающих сферические, цилиндрические и плоские решения уравнений Максвелла, решение задачи дифракции сведено к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. Получено аналитическое выражение для диаграммы направленности. Изложена методика вычисления на ЭВМ несобственных интегралов специального типа, возникающих в процессе решения задачи. Приведены диаграммы направленности, полученные на ЭВМ, при различных электродинамических характеристиках системы. Разработано соответствующее математическое обеспечение в рамках ДЭС ЕС. Предложенная методика может быть применена для решения задач дифракции в многослойном пространстве с шаровыми включениями.

УДК 539

А. С. Гахович, А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский. **Определение интенсивности стохастического потока, генетически связанного с нестационарным потоком сигналов.** ^{60}Co № 2881-79. Деп. от 02.08.79.

Рассмотрен вопрос определения интенсивности случайного потока, генетически связанного с нестационарным стохастическим потоком событий.

УДК 621.315.592

Ю. М. Покотило, Л. И. Шадурская. **Рекомбинация неравновесных носителей заряда в германии n -типа, облученном протонами с энергией 660 МэВ и γ -квантами** ^{60}Co . № 2881-79. Деп. от 02.08.79.

Исследованы температурные и инжекционные зависимости стационарного времени жизни неравновесных носителей заряда в германии n -типа, облученном протонами энергией 660 МэВ и γ -квантами ^{60}Co . В результате теоретического анализа процессов рекомбинации получено выражение для времени жизни неосновных носителей заряда, позволяющее учесть особенности захвата носителей на центры, локализованные в пределах областей разупорядочения, а также определить зависимость границ областей нелинейной рекомбинации от параметров дефектов. Установлено: 1) при обоих видах облучения вводится акцепторный дефект с уровнем $E_c - 0,20$ эВ; 2) при облучении протонами этот дефект локализован внутри областей разупорядочения, окруженных потенциальным барьером $\psi_0 = 0,05$ эВ; 3) величина сечения захвата на центр с уровнем $E_c - 0,20$ эВ $\gamma_{n2} = 1,3 \cdot 10^{-7}$ см²/с, и центр с уровнем $E_v + 0,45$ эВ $\gamma_{n1} = 3,6 \cdot 10^{-12}$ см²/с; 4) величина отношения коэффициентов захвата на дефект с уровнем $E_c - 0,20$ эВ $\gamma_{p2}/\gamma_{n2} = 5 \cdot 10^2$.

УДК 621.3.042

Д. И. Бринкевич, В. И. Курганский, А. С. Сасим, В. И. Уренов. **О постановке лабораторной работы «Исследование эффекта Холла в полупроводниках».** № 3369-79. Деп. от 21.09.79.

Описана конструкция установки для измерения эффекта Холла при различных температурах. Использована малогабаритная система криостат — магнит, позволяющая снизить мощность, потребляемую электромагнитом, до 2—3 В, проводить измерения эффекта Холла в области температур 100—150 К. Измерители Э. Д. С. Холла терморезисторы и тока через исследуемый образец выполнены на интегральных схемах. Небольшой размер установки позволил добиться наглядности в конструкции узлов, имеющих принципиальное значение, простоты управления и низких питающих напряжений.

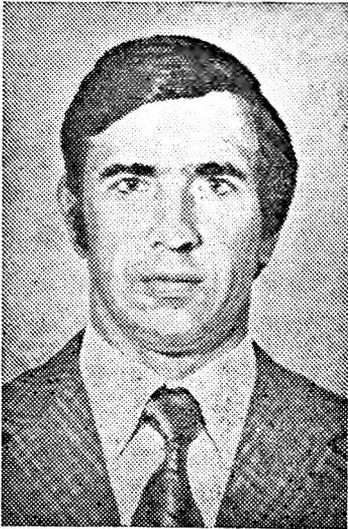
УДК 621.315.592

Л. А. Казакевич, В. И. Кузнецов, П. Ф. Лугаков, Т. А. Лукашевич, В. В. Лукьяница. **Влияние исходного совершенства и условий облучения на образование радиационных дефектов в кремнии.** № 3370-79. Деп. от 21.09.79.

Изучалось образование и отжиг радиационных дефектов (РД) в n - и p -кремнии ($\rho = 2 \div 2000$ Ом·см, плотность дислокаций $10^4 \div 10^8$ см⁻²), облученном γ -квантами Co^{60} , электронами 2,5—100 МэВ, протонами 30 и 640 МэВ. Полученные экспериментальные результаты по кинетике накопления и отжига основных РД интерпретируются с учетом влияния исходного совершенства кристаллов и условий облучения (интенсивность, температура) на процессы радиационного дефектообразования.

Памяти товарища

ИВАН ИВАНОВИЧ КОМЯК



На 38 году жизни трагически погиб доцент кафедры теории функций БГУ имени В. И. Ленина, кандидат физико-математических наук Иван Иванович Комяк.

И. И. Комяк родился 30 апреля 1943 г. в деревне Первомайск Солигорского района Минской области в семье колхозника. После окончания в 1964 г. математического факультета Белгосуниверситета Иван Иванович был оставлен в аспирантуре. И. И. Комяк, успешно защитив кандидатскую диссертацию в 1968 г., работал на кафедре математического анализа, преобразованной в кафедру теории функций.

И. И. Комяк вел исключительно интенсивную научно-исследовательскую работу. Научные интересы И. И. Комяка относились к различным областям краевых задач теории аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений. Им получен ряд основополагающих результатов в теории интегральных уравнений типа свертки, двумерных сингулярных интегральных уравнений, различных типов одномерных линейных и нелинейных краевых задач, опубликовано около 40 научных работ в центральных и республиканских математических изданиях, которые могли составить основу для докторской диссертации.

Иван Иванович Комяк — один из лучших учеников академика АН БССР Ф. Д. Гахова — находился в расцвете творческих сил и незаурядного таланта. Он был одним из наиболее активных участников Минского городского научного семинара по краевым задачам имени Ф. Д. Гахова, участником всесоюзных, республиканских и региональных научных конференций. Короткая, но плодотворная научная деятельность Ивана Ивановича может служить прекрасным образцом для начинающих исследователей, а его научные идеи и результаты, несомненно, получат дальнейшее развитие и приложения.

И. И. Комяк успешно совмещал активную научно-исследовательскую работу с педагогической деятельностью. Его лекции и практические занятия неизменно пользовались популярностью у студентов. Это объяснялось не только его педагогическим талантом, но и глубокой ответственностью, с которой Иван Иванович относился к подготовке и проведению занятий. И. И. Комяк выполнял большую работу по совершенствованию математических курсов, подготовил и опубликовал ряд методических пособий.

И. И. Комяк активно участвовал в общественной жизни. Он был одним из организаторов и первым председателем общества юных математиков Минской области, постоянно участвовал в проведении олимпиад среди школьников и студентов, работал в методических комиссиях. Будучи хорошим спортсменом, И. И. Комяк неоднократно выступал на соревнованиях, защищая спортивную честь механико-математического факультета.

Иван Иванович Комяк был чутким и отзывчивым товарищем, человеком щедрой души, исключительного трудолюбия и работоспособности. Он пользовался заслуженным авторитетом среди сотрудников и студентов университета. Светлая память об Иване Ивановиче Комяке навсегда сохранится в сердцах его товарищей по работе и всех тех, кто общался с ним.

РЕФЕРАТЫ

УДК 537.312

Анищик В. М., Гуманский Г. А., Драко В. М. Изменение электросопротивления имплантированных пленок меди и железа при отжиге.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Исследован изохронный отжиг электросопротивления тонких пленок железа, имплантированных ускоренными ионами молекулярного азота и углерода, и тонких пленок меди, имплантированных ионами висмута с энергией 60 кэВ. Наблюдаемый спад сопротивления в случае отжига имплантированных азотом пленок железа объясняется распадом образованных при имплантации нитридов железа, тогда как рост сопротивления имплантированных углеродом пленок железа — образованием карбидов железа в процессе отжига.

Библ. 4 назв., ил. 3.

УДК 535.33

Прима А. М., Прима В. М. Применимость модели эффективных зарядов и отношение интенсивностей полос в ИК спектрах, обусловленных валентными и деформационными колебаниями.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

На основе общих представлений о свойствах электронной плотности молекулы дан вывод формул для дипольного момента связи и дипольного момента молекулы. Формулы используются для полуэлектрической схемы расчета интенсивностей полос в инфракрасных спектрах.

Библ. 15 назв., ил. 1.

УДК 621.391.15

Агранов Г. А., Зайцева А. А., Коренная Л. Н., Соболев В. С. Исследование алгоритмов сокращения информации при использовании преобразований Уолша — Адамара.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Анализируются методы сжатия информации, основанные на исключении высокочастотных коэффициентов Уолша — Адамара. Получены аналитические функции для кривых усечения. Проведено сравнение с экспериментальными данными.

Библ. 6 назв., ил. 2.

УДК 681.32

Личко Г. П. Быстрое преобразование Фурье больших массивов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Приводится текст программы БПФ массивов размерности до 1024×1024 , реализующей алгоритм Эклунда, написанной на языке Фортран, эффективность которой подтверждается экспериментальными оценками быстродействия, полученными для ЭВМ системы ЕС.

Библ. 3 назв., табл. 1.

УДК 535.34

Зятьков И. П., Княжевич Н. Д., Сагайдак Д. И., Парфианович Н. В. Роль весовой функции и фонового вклада в формировании кривой ошибок при количественном анализе по спектрам поглощения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Исследовано влияние весовой функции и фонового вклада в формировании кривой ошибок Δ_v при определении абсолютных ошибок Δ_n состава многокомпонентных систем с незначительным взаимодействием компонентов. Показано, что для двухкомпонентной смеси с практически не взаимодействующими компонентами минимальные ошибки при определении содержания компонентов имеют место при $P_v = \epsilon_v^0$ и $D_v^{\text{фон}} =$

$$= \sum_{n=1}^N d_{vn}/N.$$

Библ. 2 назв., ил. 1, табл. 2.

УДК 681.142.01

Коляда А. А. Структура быстродействующих АУ в обобщенных СОК.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Приводится описание быстродействующего арифметического устройства в обобщенных системах остаточных классов (ОСОК). Отличительной особенностью алгоритмов арифметики ОСОК является высокий уровень параллелизма, позволяющего не только выполнять каждую из операций вычислительного процесса за минимальное число модульных тактов, но и совмещать во времени их выполнение, что значительно увеличивает скорость вычислений. Структура рассматриваемого арифметического устройства полностью согласуется с указанным параллелизмом.

Библ. 9 назв., ил. 3.

УДК 621.382.23

Громенко Г. И., Лойко В. И., Некрашевич И. Г. Зависимость распределения напряжений от природы изгибающих сил в двухслойных системах.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Рассмотрены случаи распределения напряжений в двухслойных системах при механическом и термическом изгибах. Показано, что существует принципиальное различие в распределении напряжений при различных изгибах однотипных пластин, учет которых необходим для правильной оценки экспериментальных результатов.

Библ. 9 назв., ил. 1.

УДК 537.525.5

Граков В. Е., Майга А. С. Влияние продольного магнитного поля на катодное падение потенциала и устойчивость электрических вакуумных дуг.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Измерялись катодные падения U_c и средняя продолжительность горения τ электрических вакуумных дуг размыкания на чистых металлах (Al, Mg, Cr, Co, Ni, Sn, Cd) при наложении на них продольного магнитного поля до 0,115 тл. Магнитное поле вызывает линейное повышение U_c и экспоненциальный спад τ . Рассмотрен возможный механизм влияния продольного магнитного поля на катодные процессы вакуумной дуги.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.373.018.756 : 621.373.029.67

Данилов В. А., Зенченко С. А., Шаронов Г. В. Спектральные и временные характеристики излучения аргонового лазера в режиме синхронизации мод.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Описываются результаты экспериментальных исследований аргонового лазера с активной синхронизацией мод, которая осуществляется с помощью внутрирезонаторной модуляции потерь как на частоте межмодовых биений, так и на удвоенной частоте. Приведены осциллограммы выходных импульсов и спектров излучения. Проводится оценка средней выходной мощности аргонового лазера в режиме синхронизации мод по сравнению с режимом свободной генерации.

Библ. 6 назв., ил. 3.

УДК 621.375

Фам Чонг Хьен, Ханок Б. Ю., Хапалюк А. П. Особенности генерации в резонаторе с тетраэдрическим призмным отражателем.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

В приближении плоских волн теоретически изучены условия стационарной генерации в резонаторе из двух активных стержней и тетраэдрической призмы полного отражения. Исследованы факторы, которые приводят к понижению порога генерации, а также условия селекции собственных типов колебаний.

Библ. 3 назв., ил. 1.

УДК 517.925

Громак В. И., Пилипчук Л. А., Бачурин Е. В. О распределении полюсов решений второго уравнения Пенлеве.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

С помощью методов численного решения дифференциальных уравнений изучаются аналитические характеристики решений второго уравнения Пенлеве.

Библ. 5 назв., табл. 2.

УДК 681.3.06

Дробушевич Г. А., То Туан. О структурном программировании на языке Ассемблер.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Работа посвящается технологии структурного программирования на языке Ассемблер и пути формирования навыков к работе по такой технологии.

Библ. 7 назв., ил. 3.

УДК 517.544

Примачук Л. П. Нелинейная задача сопряжения на разомкнутой дуге для двух голоморфных функций.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Получено решение следующей нелинейной задачи сопряжения: $\varphi_1^+(t) \varphi_2^-(t) = f_1(t)$, $\varphi_2^+(t) \varphi_1^-(t) = f_2(t)$, $t \in L$, где L — простая гладкая разомкнутая дуга.

Библ. 5 назв.

УДК 517.966

Леваков А. А. Зависимость оптимального значения критерия качества от граничных условий.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Рассматривается задача оптимального управления с фиксированным временем и закрепленными концами. Получены условия, при которых оптимальное значение критерия качества непрерывно зависит от граничных условий.

Библ. 8 назв.

УДК 517.926

Феденя М. М. Об экстремальном возмущении квазихарактеристических чисел и квазимножителей.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Вводятся понятия квазимножителя, коэффициента чувствительности квази-

мультипликатора. Решены задачи об экстремальном возмущении квазихарактеристического числа для линейной системы и квазимультимпликатора для кусочно-постоянной ω -периодической системы.

Библ. 5 назв.

УДК 517.925.12

Пыжкова Н. В. Решение проблемы изохронности центра для одной системы нелинейных колебаний.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Исследуется вопрос об изохронности центра системы $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2yMxy^2 + Ny^3$ в предположении, что посредством преобразования $y = \frac{(1 - Ax - Kx^2)Y}{1 + (B + Lx)Y}$ она сводится к системе с траекториями, симметричными относительно оси OX .

Библ. 8 назв.

УДК 517.948.34

Еровенко Л. Д. Об одном алгоритме улучшения допустимых управлений в системах с запаздыванием.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Разработан алгоритм метода улучшения первоначальных управлений для линейных задач оптимального управления с запаздывающим аргументом. Приводятся результаты численного решения задачи вынужденных колебаний механической системы.

Библ. 5 назв.

УДК 519.24

Журбенко И. Г., Труш Н. Н. Спектральный анализ случайных стационарных процессов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Рассматривается дискретный стационарный случайный процесс. По наблюдениям за процессом строятся оценки спектральных плотностей вторых и высших порядков и исследуются их первые два момента.

Библ. 13 назв.

УДК 62-50

Мережа В. Л. К управляемости систем с запаздыванием.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Получен критерий вполне относительной управляемости для систем с запаздыванием в случае конечного спектра.

Библ. 6 назв.

УДК 62-50

Даворин М. И., Калинин А. И. Об одном необходимом условии оптимальности особых управлений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

С помощью вариации типа обратной связи получено новое необходимое условие оптимальности особых управлений в простейшей задаче терминального управления обыкновенными динамическими системами.

Библ. 4 назв.

УДК 681.323 : 681.326.3

Афанасьев Г. К., Лебедев В. И., Оранский А. М. К измерению расстояния между точкой и заданной прямой на плоскости.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Предлагается быстродействующий алгоритм вычисления расстояния на плоскости, ориентированный на аппаратную реализацию. Рассматривается структура соответствующего вычислителя.

Библ. 3 назв., ил. 1.

УДК 517.925

Белявский С. С. О периодических перестановочных решениях двух систем дифференциальных уравнений.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Изучается взаимное расположение траекторий систем с перестановочными решениями. Указываются начальные множества периодических решений.

Библ. 1 назв.

УДК 532.529.5 : 622.276.031

Клевченя А. А. Об одном методе численного решения задачи вытеснения неньютоновской жидкости водой.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Рассматривается одномерная задача вытеснения неньютоновской нефти водой с учетом гравитационных сил. Сравняются два метода расчета давления.

Библ. 3 назв.

УДК 510.1

Малыхина Г. И. «Формы строгой науки» Р. Грассмана и их отношение к естественному языку.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1981, № 1.

Рассматривается вклад Р. Грассмана в подготовку открытия конкретных ограничений метода формализованных языков.

Библ. 3 назв.