

$$x'_1 = f(x_1), \quad (5)$$

$$x'_2 = g(x_2). \quad (6)$$

Тогда имеет место.

Лемма. Решения системы $z' = \lambda f(z) + \mu g(z)$, где λ и μ — постоянные, перестановочны с решениями систем (5) и (6). Из леммы следует.

Теорема 2. Если решения систем (5) и (6) имеют в точке x_0 общую касательную, то они совпадают.

Предположим, что системы (5) и (6) двумерные, тогда из теоремы 2 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 4. Если системы (5) и (6) имеют общую особую точку типа центр, то их траектории совпадают.

Следствие 5. Если x_0 является особой точкой типа центр системы (5), то она не может быть особой точкой типа седло системы (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белявский С. С. Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, с перестановочными решениями. № 2020. Деп. от 06.06.79.

Поступила в редакцию
16.10.79.

Кафедра высшей математики и математической физики

УДК 532.529.5:622.276.031

А. А. КЛЕВЧЕНЯ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ВОДОЙ

Рассматривается одномерная задача о прямолинейном изотермическом вытеснении вязко-пластической нефти водой из недеформируемого пласта, когда капиллярные силы не учитываются, фазы несжимаемы и взаимонерастворимы.

Пусть x — координата в области течения; z — ось, направленная вертикально вверх; t — время ($0 \leq t \leq t_1$); p — давление; k — абсолютная проницаемость среды; f_i и μ_i — относительная фазовая проницаемость и вязкость i -ой фазы соответственно; G — предельный градиент давления нефти ($G = \text{const}$); α — угол между осями z и x ; ρ_i — плотность i -ой фазы; g — ускорение свободного падения; индексы $i=1$ и 2 относятся к воде и нефти соответственно.

Законы фильтрации фаз запишем в виде:

$$w_1 = - \frac{k f_1}{\mu_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$w_2 = - \delta \frac{k f_2}{\mu_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \left(1 - \frac{G}{\left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|} \right), \quad \delta = \begin{cases} 1 & \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right| > G \\ 0 & \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right| \leq G, \end{cases}$$

где $\psi_i = p + \rho_i g z$.

Введем безразмерные переменные:

$$\varphi = \frac{p}{G_* \cdot L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t \cdot k_* \cdot G_*}{m \cdot L \cdot \mu_2}, \quad \eta = \frac{k}{k_*}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_*}, \quad \tilde{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\rho_*},$$

$$G_* = \rho_* \cdot g, \quad q = \frac{w \mu_2}{k_* G_*},$$

где G_* , k_* , ρ_* — характерные предельный градиент давления нефти, абсолютная проницаемость среды, плотность соответственно; $w = w_1 + w_2$.

После несложных преобразований (по аналогии с [1]) из законов фильтрации (1) и уравнений неразрывности фаз для определения безразмерного давления φ и водонасыщенности s может быть получена система уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (A \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + B) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \tau} + q \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

где $A = \eta f_1 / \mu + \delta \eta f_2$, $B = \eta f_1 / \mu \cdot \tilde{\rho}_1 \cdot \cos \alpha + \delta \eta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G})$;

$$F_0 = \frac{f_1}{f_1 + \mu f_2}, \quad q = -A \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - B;$$

$$F = \begin{cases} 1, & q \leq \eta f_1 / \mu [\cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1) + \tilde{G}] \\ F_0 \{1 + \eta f_2 / q [\tilde{G} + \cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1)]\}, & q > \eta f_1 / \mu [\cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1) + \tilde{G}]. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы (2) следует, что суммарный поток q не зависит от ξ , т. е. $q = q(\tau)$.

Формулировка начальных и граничных условий, а также метод решения системы (2), когда $\alpha = 90^\circ$ описаны в [2]. Как известно [3], в зависимости от безразмерного π_0 , который в случае наклонного пласта запишется в виде $\pi_0 = \frac{\eta [\tilde{G} + \cos \alpha (\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1)]}{q}$ реализуются три режима вытеснения: поршневой, с образованием зоны застывшей нефти и зоны движения смеси и режим Баклея—Левверетта.

Для расчета давления применим следующий метод. Учитывая, что

$$q = -(\eta \frac{f_1}{\mu} + \delta \eta f_2) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\eta f_1}{\mu} \tilde{\rho}_1 \cos \alpha + \delta \eta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G}), \quad (3)$$

имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{q}{\eta f_1 / \mu + \delta \eta f_2} - \frac{f_1 / \mu \cdot \tilde{\rho}_1 \cos \alpha + \delta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G})}{f_1 / \mu + \delta f_2}. \quad (4)$$

$$\text{Обозначим: } \Phi_1 = \frac{1}{\eta f_1 / \mu + \delta \eta f_2}, \quad \Phi_2 = \frac{f_1 / \mu \cdot \tilde{\rho}_1 \cos \alpha + \delta f_2 (\tilde{\rho}_2 \cos \alpha + \tilde{G})}{f_1 / \mu + \delta f_2}.$$

Предположим, что на некотором временном слое с номером n известно распределение насыщенности и рассмотрим метод расчета давления, если при $\xi = 0$ задано условие $\varphi(\tau, 0) = \varphi_1$. Проинтегрируем уравнение (4) по ξ в интервале $0 \leq \xi \leq \xi$, используя значения давления на слое $n-1$:

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) - q \int_0^\xi \Phi_1 d\xi - \int_0^\xi \Phi_2 d\xi. \quad (5)$$

Интегралы вычисляются по правилу трапеции. При $\xi = 1$ будем иметь

$$q = -\frac{\varphi(1) - \varphi(0) + \int_0^1 \Phi_2 d\xi}{\int_0^1 \Phi_1 d\xi}. \quad (6)$$

Метод расчета давления состоит в следующем: по известным на временном слое с номером n распределению насыщенности и временном слое с номером $n-1$ распределению давления из (6) находим q на слое n . Затем из (5) находим распределение давления на слое n .

Для оценки эффективности предлагаемого метода результаты расчетов сопоставлялись с данными [2] в случае всех трех режимов вытеснения. Затраченное машинное время расчета любого варианта, когда реализуется режим Баклея—Левверетта, в обоих случаях приблизительно одинаковое, так как в обоих случаях при расчете давления практически не требуется проводить итерации по нелинейности. Для двух остав-

шихся режимов вытеснения время расчета одного варианта по предлагаемому методу в три — четыре раза меньше, чем по методу [2]. Предложенный в [2] метод без затруднений может быть обобщен и применен для решения двумерных задач, однако, в одномерном случае при его численной реализации требуется выполнять относительно большое число итераций по нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — М., 1975, с. 121.
2. Клевченя А. А., Таранчук В. Б. — Изв. вузов СССР. Нефть и газ, 1979, № 2, с. 51.
3. Алишаев М. Г. — В сб.: Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. — Новосибирск, 1975, с. 38.

Поступила в редакцию
30.10.79.

НИИ ПФП

УДК 510.1

Г. И. МАЛЫХИНА

«ФОРМЫ СТРОГОЙ НАУКИ» Р. ГРАССМАНА И ИХ ОТНОШЕНИЕ К ЕСТЕСТВЕННОМУ ЯЗЫКУ

Построение универсального символического языка связано с решением проблемы взаимоотношения формализованных исчислений с естественным языком человеческого общения. Созная это, немецкий логик и математик конца прошлого века Р. Грассман, теоретическое наследие которого является незаслуженно забытым, будучи совершенно незнаком с работами Дж. Буля, одновременно с ним и независимо от него, пытался создать искусственный язык, который был бы свободен от известных недостатков естественного языка. Основным своеобразием его логического исчисления является то, что логике предпосылается своего рода «протологика» в виде «Учения о величинах» [1]. В последнем доказываются положения, имеющие место во всех прочих формах «строгой науки» или математики (учение о понятии или логика, учение о связи или комбинаторика, учение о числах или арифметика, учение о протяженности), ибо осуществление идеала научной классификации необходимо предполагает наличие завершеного знания об основных операциях, служащих для соединения элементов понятий (в данном случае — величин), о свойствах этих операций, а также знание законов связи понятий. Вся эта предварительная работа выпадает на долю «Учения о величинах». Вслед за понятием «величины» определяются равные и неравные величины, вводится определение «связи величин». При этом Грассман различает *всеобщий знак связи*, который обозначает любую связь двух величин и обозначается знаком « $\circ$ » (например, « $a \circ b$ » читается: « a , связанное с b » или просто « a с b », и *особые знаки связи*, которыми являются знак равенства и знак неравенства. Сложение и умножение величин являются первыми двумя уровнями связи, обладающими свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Логика же, как естественное продолжение «Учения о величинах» (a , стало быть, в ней имеют значение все основоположения данного учения) за основание берет следующие три положения: $e + e = e$; $e \cdot e = e$; $e_1 \cdot e_2 = 0$, в которых e означает элементарную величину, не являющуюся результатом связи других величин, первые два положения означают, что сумма или произведение двух равных понятий вновь дает это же понятие, наконец, третье положение означает, что произведение двух понятий, не имеющих общих элементов, равно нулю.

Дав определение исходных понятий, возможных операций и их свойств, Грассман излагает свое логическое учение, придерживаясь тра-