

Краткие сообщения

УДК 681.323:681.326.3

Г. К. АФАНАСЬЕВ, В. И. ЛЕБЕДЕВ, А. М. ОРАНСКИЙ

К ИЗМЕРЕНИЮ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКОЙ И ЗАДАННОЙ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть прямая проходит через две точки $M'(X', Y')$ и $M''(X'', Y'')$ в системе координат XOY (см. рисунок). Требуется найти кратчайшее расстояние h от точки $M^0(X^0, Y^0)$ до прямой $M'M''$.

Для того, чтобы найти h , необходимо перейти от системы координат XOY к новой системе X_kOY_k , полученной вращением системы координат (в нашем случае в направлении против вращения часовой стрелки) на угол φ , чтобы новая ось OX_k стала перпендикулярной к прямой $M'M''$. Переход от системы координат XOY к системе X_kOY_k эквивалентен вращению в противоположном направлении на этот же угол векторов $\vec{OM'}$, $\vec{OM''}$ и $\vec{OM^0}$. Новые значения координат всех трех точек связаны с углом вращения векторов следующим образом:

$$\begin{cases} x'_k = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi; \\ x''_k = x'' \cos \varphi + y'' \sin \varphi; \\ x^0_k = x^0 \cos \varphi + y^0 \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где $q = \begin{cases} +1 & \text{при вращении по часовой стрелке;} \\ -1 & \text{при вращении против часовой стрелки.} \end{cases}$

В результате поворота указанных векторов проекции точек M' и M'' на ось OX_k стали одинаковыми: $x'_k = x''_k = x_k$. Кратчайшее расстояние h оказалось равным разности составляющих по оси OX_k точек M^0 и $M'(M'')$:

$$h = |x_k - x^0_k|.$$

Решение системы (1) связано с подбором таких значений φ (и вычислением $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$), которые приводят к равенству составляющих x'_k и x''_k . Реализация указанного алгоритма связана с большими аппаратурными затратами, вызванными в основном необходимостью реализации операций умножения и хранения двух массивов констант вида $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$.

Уменьшение объема оборудования и времени вычисления возможно с использованием метода псевдоповоротов вектора [1], исключающего необходимость проведения операций умножения и не требующего ЗУ для хранения констант. Метод предусматривает поворот вектора $\vec{R}$ на угол β_i , при котором его конец перемещается по направлению перпендикулярному к его первоначальному положению. При этом модуль вектора уве-

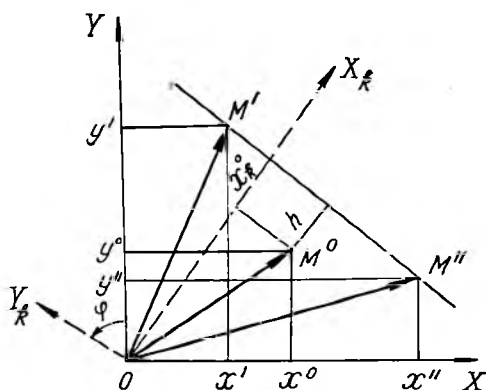
личивается в $\frac{1}{\cos \beta_i}$ раз. Проведя ряд таких итерационных шагов и выбирая такую последовательность β_i , чтобы они были кратны степени двойки: $\operatorname{tg} \beta_i = 2^{-i}, i = 1, n$, получаем следующую систему уравнений для вычисления значений очередных приращений:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + q_i y_{i-1} 2^{-i}; \\ y_i = y_{i-1} - q_i x_{i-1} 2^{-i}. \end{cases} \quad (2)$$

В результате проведения n итерационных шагов вектор $\vec{R}$ окажется равным $K_n \vec{R}$, где K_n — коэффициент деформации, зависящий от количества итерационных шагов: $K_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \cos \beta_i} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_i)} = \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 + 2^{-2i})}$.

Если такой итерационный процесс, направленный на достижение равенства составляющих $\vec{OM}'$ и $\vec{OM}''$ по оси OX_k , организовать для всех трех векторов $\vec{OM}'$, $\vec{OM}''$ и $\vec{OM}^0$, то система (2) преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} x_{m, i+1} = x_{m, i} + q_i y_{m, i} 2^{-(i+1)}; \\ y_{m, i+1} = y_{m, i} - q_i x_{m, i} 2^{-(i+1)}; \\ q_i = \operatorname{sign} \gamma_i = \begin{cases} +1, & \gamma_i \geq 0; \\ -1, & \gamma_i < 0; \end{cases} \quad \gamma_{i+1} = x'_i - x''_i; \\ i = \overline{0, n-1}; \quad m = 0, 1, 2; \\ h = \frac{1}{k_n} |x'_n - x''_n|. \end{cases} \quad (3)$$



Система (3) представляет собой комплекс однородных алгоритмов вращения трех векторов. Это дает возможность реализации системы (3) однотипными решающими модулями с простой схемой управления, обеспечивающей функционирование модулей в заданном порядке. Структура модулей так же проста: каждый из них содержит по два сдвиговых регистра, сумматор и коммутатор. При параллельно-параллельной структуре вычислителя и при совмещении операций суммирования

и сдвига, а также при организации однократного многоразрядного сдвига общее время решения задачи (без учета конечной операции умножения) $\tau = (n+2)T$, где T — период тактовой частоты.

Следует отметить, что конечную операцию умножения можно реализовать достаточно эффективно на основе программируемых логических матриц [2], например, способом, описанным в [3].

Вычисление расстояния по предлагаемому алгоритму в сравнении с непосредственным вычислением его по известным формулам, например, $h = \frac{AX^0 + BY^0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, позволяет уменьшить время вычислений не менее, чем в 1,5 раза при более простой и регулярной структуре вычислителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оранский А. М. Аппаратные методы в цифровой вычислительной технике.— Минск, 1977.
2. Якубайтис Э. А.— АВТ, 1975, № 5, с. 1.
3. Афанасьев Г. К., Лебедев В. И.— В сб.: Теория и методы автоматизации проектирования, вып. 2.— Минск, 1979, с. 127.

Поступила в редакцию
04.07.79.

Кафедра ЭММ

УДК 517.925

С. С. БЕЛЯВСКИЙ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим две n -мерные системы дифференциальных уравнений

$$x_1' = f(t, x_1), \quad (1)$$

$$x_2' = g(t, x_2), \quad (2)$$

правые части которых непрерывны и обладают свойством существования и единственности решений в $R_+ \times R^n$. Предположим, что решения $x_1(t, x_0)$ и $x_2(t, x_0)$ соответственно систем (1) и (2) продолжимы на R_+ , если они начинаются в R^n при $t=0$. Будем также полагать, что эти решения перестановочны [1].

Зафиксируем точку $x_0 \in R^n$ и e , принимающее значение 1 или 2. Выберем некоторую точку x_i , для которой существует $t_i \geq 0$ такое, что выполнено условие

$$x_e(t_i, x_i) = x_0 \quad (3)$$

и обозначим

$$P_e(x_0, x_i) = \{x/x = x_e(t, x_i), t \geq 0\}, M_e^1(x_0) = \bigcup_{x_i} P_e(x_0, x_i).$$

(Объединение берется по всем x_i , для которых выполнено условие (3)).

Выберем произвольную точку x_i , для которой существует $t_i \geq 0$ такое, что выполнено условие

$$x_e(t_i, x_i) \in M_e^1(x_0) \quad (4)$$

и обозначим

$$P_e[M_e^1(x_0), x_i] = \{x/x = x_e(t, x_i), t \geq 0\}, M_e^2(x_0) = \bigcup_{x_i} P_e[M_e^1(x_0), x_i].$$

(Объединение берется по всем x_i , для которых выполнено условие (4)).

Аналогично определим множества $M_e^k(x_0)$, $k = 1, 2, \dots$, а затем множество $M_e(x_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_e^k(x_0)$. Из определения перестановочности решений систем (1) и (2) следует

Теорема 1. Если $x_1(t, x_0)$ — периодическое решение системы (1), то и любое решение этой системы, начинающееся на $M_2(x_0)$ при $t=0$, также периодическое.

Следствие 1. Если $x_1(t, x_0)$ и $x_2(t, x_0)$ периодические, то $M_1(x_0) = M_2(x_0)$.

Следствие 2. Множество всех точек покоя системы (1) является инвариантным относительно системы (2).

Следствие 3. Если точки покоя системы (1) образуют замкнутую кривую L и на L нет точек покоя системы (2), то L является интегральной кривой системы (2).

Пусть системы (1) и (2) стационарны, т. е. имеют вид