

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Пусть на траекториях обыкновенной динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

где x — n -вектор состояния; u — r -вектор управления, в классе r -мерных кусочно-непрерывных функций $u(t)$ со значениями из некоторого открытого множества $U \subset R^r$ минимизируется функционал

$$I(u) = \varphi(x(t_1)). \quad (2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что вектор-функция $f(x, u, t)$ имеет непрерывные частные производные по x и u до второго порядка включительно, а функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема по x .

Как известно [1], оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (1) — (2) удовлетворяет условию максимума $H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$, где $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$; $x^0(t)$ — оптимальная траектория, соответствующая управлению $u^0(t)$, а $\psi^0(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}^0(t) = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad \psi^0(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}, \quad (3)$$

Следуя [2], допустимое управление $u(t)$ назовем особым, если для любого вектора $u \in U$, $H(x(t), \psi(t), u(t), t) \equiv H(x(t), \psi(t), u, t)$, $t \in T$.

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, — особое оптимальное управление в задаче (1) — (2). Наряду с $u^0(t)$ рассмотрим «возмущенное» управление $\tilde{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, и пусть $\tilde{x}(t) = x^0(t) + \Delta x(t)$ — траектория системы (1), порожденная управлением $\tilde{u}(t)$. Приращение критерия качества запишем следующим образом:

$$\Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2).$$

Пусть $\psi^0(t)$, $t \in T$, — решение системы (3), а $\Psi^*(t)$ — $(n \times n)$ -матричная симметричная функция, удовлетворяющая условию $\Psi^*(t_1) = - \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2}$.

Тогда приращение критерия качества может быть представлено в виде [3]

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Delta \tilde{u}' H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \Delta \tilde{u}' f'(x^0, u^0, t) \Psi^*(t) \Delta x(t) \right] dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\Psi^*(t) + \frac{\partial f'(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi^*(t) + \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} \right] \Delta x(t) dt + \eta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\eta = o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|^2) dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Psi^*(t) o_3(\|\Delta x(t)\|) dt$.

Выше использованы следующие обозначения:

$$\Delta_{\tilde{u}} f(x^0, u^0, t) = f(x^0, \tilde{u}, t) - f(x^0, u^0, t),$$

$$\Delta_{\tilde{u}} H(x^0, \psi^0, u^0, t) = H(x^0, \psi^0, \tilde{u}, t) - H(x^0, \psi^0, u^0, t).$$

Пусть θ — произвольный момент времени из полуинтервала $[t_0, t_1]$; ε — положительное число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$. Положим

$$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \theta) \\ u, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon) \\ S(t) \Delta x(t), & t \in [\theta + \varepsilon, t_1], \end{cases} \quad (5)$$

где u — произвольный вектор из U , $S(t)$ — $(r \times n)$ -матричная функция с кусочно-непрерывными элементами. На полуинтервале $[\theta, \theta + \varepsilon)$ приращение $\Delta x(t)$ можно представить в виде

$$\Delta x(t) = \Delta \dot{x}(\theta)(t - \theta) + o_3(t - \theta) = \Delta_u f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta)(t - \theta) + o_4(\varepsilon), \quad (6)$$

откуда, в частности, следует, что на отрезке $[\theta + \varepsilon, t_1]$ $\Delta x(t)$ имеет порядок малости ε .

На вариации (5) приращение критерия качества будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_0^{\theta + \varepsilon} \left[\frac{\partial \Delta_u H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \Delta_u f'(x^0, u^0, t) \Psi^*(t) \Delta x(t) \right] dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\theta + \varepsilon}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}^*(t) + \frac{\partial f'(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi^*(t) + \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, \tilde{u}, t)}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} + S'(t) \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x \partial u} S(t) + \\ & \left. + S'(t) \frac{\partial f'(x^0, u^0, t)}{\partial u} \Psi^*(t) + \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} S(t) \right] \Delta x(t) dt + o_5(\varepsilon^2). \quad (7) \end{aligned}$$

Пусть $\Psi^*(t)$ есть решение матричного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}^*(t) = & - \left[\frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} S(t) \right]' \Psi^*(t) - \\ & - \Psi^*(t) \left[\frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} S(t) \right] - S'(t) \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u \partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x \partial u} S(t) - \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x^2}, \quad \Psi^*(t_1) = - \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1))}{\partial x^2}, \quad (8) \end{aligned}$$

тогда второй интеграл в правой части равенства (7) будет иметь порядок

малости выше ε^2 , и в силу (6) имеем $\Delta J(u^0) = - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Delta_u H'(x^0, \psi^0, u^0, \theta)}{\partial x} \times \right. \\ \times \Delta_u f(x^0, u^0, \theta) + \Delta_u f'(x^0, u^0, \theta) \Psi^*(\theta) \Delta_u f(x^0, u^0, \theta) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right]$. В силу оптимальности управления $u^0(t)$ $\Delta J(u^0) \geq 0$, что влечет за собой выполнение условия

$$\frac{\partial \Delta_u H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta_u f(x^0, u^0, t) + \Delta_u f'(x^0, u^0, t) \Psi^*(t) \Delta_u f(x^0, u^0, t) \leq 0, \quad (9)$$

для любых $u \in U$ и $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема. Для того, чтобы особое управление $u^0(t)$, $t \in T$, было оптимальным в задаче (1) — (2) необходимо, чтобы для любого вектора $u \in U$ и любого момента $t \in [t_0, t_1]$ имело место неравенство (9), где $\Psi^*(t)$ — решение уравнения (8) с произвольной кусочно-непрерывной $(r \times n)$ -матрицей $S(t)$.

Так как множество U — открытое, то из неравенства (9) следует, что $(r \times r)$ -матрица

$$\frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u \partial x} \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u} + \frac{\partial f'(x^0, u^0, t)}{\partial u} \Psi^*(t) \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial u}$$

является знакоотрицательной.

Необходимое условие оптимальности особых управлений (9) является обобщением известного условия в матричных импульсах Р. Габасова [4], которое следует из (9) при $S(t) \equiv 0$. Новое условие может оказаться

эффективным в тех случаях, когда условие в матричных импульсах «не работает».

Пример. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = -ux_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\varphi(x) = x_3$.

Легко проверить, что управление $u^0(t) \equiv 0$ является особым. Полагая $S = (1, 0, 0)$, находим, что вдоль этого управления

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi^* \frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{1}{2} - t\right) e^{2(1-t)} + \frac{1}{2} > 0, t \in [0, \frac{1}{4}),$$

что противоречит условию (9). Таким образом, управление $u^0(t) \equiv 0$ не является оптимальным.

Заметим, что условие в матричных импульсах в данном примере неэффективно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов.— М., 1961.
2. Розоноэр Л. И.— Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 11.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления.— М., 1973.
4. Габасов Р.— Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1968, № 5.

Поступила в редакцию
22.03.79.

Кафедры МОУ, теории вероятностей и
математической статистики