

Функция $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется периодограммой n -го порядка и задается выражением

$$I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} T} \sum_{t_1, \dots, t_{n-1}=0}^{T-1} x(t_1) \dots x(t_n) e^{-i \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j},$$

где $\lambda_{s_n} = - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{s_j}$.

Для оценки спектральной плотности n -го порядка можно сформулировать теоремы, подобные теоремам для оценки спектральной плотности второго порядка [5], откуда будет следовать, что оценка (12) асимптотически несмещенная и состоятельная.

Различные вопросы исследования оценок спектральных плотностей второго и высших порядков стационарных случайных процессов и полей можно найти в монографиях [3, 6] и работах [1—5, 8—13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбенко И. Г.— Докл. АН СССР, 1974, т. 5, с. 214.
2. Леонов И. П., Ширяев А. Н.— Теория вероятностей и ее применение, 1959, т. 4, вып. 3, с. 324.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1976.
4. Brillinger D. An introduction to polyspectra.— Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 1351.
5. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, вып. 1, с. 65.
6. Хеннан Э. Многомерные временные ряды.— М., 1974.
7. Журбенко И. Г.— Украинский матем. сб., 1978, № 2.
8. Ибрагимов И. А.— Теория вероятностей и ее применение, 1963, т. 14, вып. 4, с. 319.
9. Алексеев В. Г.— Теория вероятностей и ее применение, 1973, т. 18, вып. 2, с. 280.
10. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1972, т. 12, вып. 1, с. 55.
11. Бенткус Р., Рудзкис Р., Сушинскас Ю.— Литовский матем. сб., 1974, т. 14, вып. 3.
12. Труш Н. Н. Исследование оценок спектральных плотностей однородных случайных полей. Деп. в ВИНТИ, № 1572-78 от 11.05.78.
13. Brillinger P. Asymptotic theory of estimates of k -th spectra.— Advanced Seminar on spectral analysis of time series (ed. B. Harris).— New-York, 1965, p. 153.

Поступила в редакцию
16.10.79.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 62—50

В. Л. МЕРЕЖА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$z(t) = Hx(t), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \quad -h \leq \tau < 0, \quad x(0) = x^0. \quad (3)$$

Здесь $x, x^0 \in R^n$; $z \in R^m$; $u \in R^r$; A, A_1, B, H — постоянные матрицы соответствующих размеров; h — постоянное запаздывание; $\varphi(\tau), \tau \in [-h, 0]$ — кусочно-непрерывная n -вектор-функция.

Определение. Система (1), (2) называется полностью управляемой, если для любого начального состояния (3) существуют момент $t_1, t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t), t > 0, u(t) \equiv 0, t \geq t_1$, такие, что для соответствующего решения системы (1) выполняется соотношение $z(t) \equiv 0, t \geq t_1$.

Обозначим $\Delta(\lambda) = [\lambda E_n - A - A_1 \exp(-\lambda h)]$. Будем рассматривать только случай, когда уравнение $\det \Delta(\lambda) = 0$ имеет конечное число нулей λ_i

кратности v_i , $i = \overline{1, N}$ соответственно.

Введем векторы c_{ijs} , $d_{ijs} \in R^n$ такие, что

$$\sum_{l=0}^{v_{ij}-s} \Delta^{(l)}(\lambda_i) \frac{c_{ijs+l}}{l!} = 0; \quad \sum_{l=0}^{v_{ij}-s} \frac{d_{ijs+l}}{l!} \Delta^{(l)}(\lambda_i) = 0, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}},$$

$$\sum_{j=1}^{l_i} v_{ij} = v_i;$$

$$\langle \Phi_{ijs}(\sigma), \psi_{klm}(\sigma) \rangle = 0, \quad i, k = \overline{1, N}, i \neq k, j = \overline{1, l_i}, l = \overline{1, l_k},$$

$$s = \overline{1, v_{ij}}, m = \overline{1, v_{kl}}. \quad (4)$$

$$\langle \Phi_{ijs}(\sigma), \psi_{ikl}(\sigma) \rangle = \begin{cases} 1, & j = k, s + l = v_{ij} \\ 0, & j \neq k, \text{ либо } j = k, s + l \neq v_{ij} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}; \quad j, k = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}, l = \overline{1, v_{ik}},$$

где билинейная форма [1]

$$\langle \Phi(\sigma), \psi(\sigma) \rangle = \psi'(0) \Phi(0) + \int_{-h}^0 \psi'(h + \tau) A_1 \Phi(\tau) d\tau,$$

$$\Phi_{ijs}(\sigma) = \left\{ e^{\lambda_i \tau} \sum_{l=0}^{v_{ij}-s} c_{ijs+l} \frac{\sigma^l}{l!} - h \leq \sigma \leq 0 \right\},$$

$$\psi_{ijs}(\sigma) = \left\{ e^{-\lambda_i \tau} \sum_{l=0}^{v_{ij}-s} (-1)^l d_{ijs+l} \frac{\sigma^l}{l!}, \quad 0 \leq \sigma \leq h \right\}, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}.$$

Пусть $x_t = x(t + \tau)$, $-h \leq \tau \leq 0$, $t \geq 0$ — часть траектории $x(t)$ системы (1) с начальными условиями (3);

$$y(t) = \text{col} \{y_{ijs}(t), i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}\}, \quad y_{ijs}(t) = \langle x_t, \psi_{ijs}(\sigma) \rangle.$$

Тогда [2]

$$\dot{y}(t) = Gy(t) + Cu(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$y(0) = \{\langle x_0, \psi_{ijs}(\sigma) \rangle, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}\}, \quad (6)$$

где $G = \text{Diag} \{G_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}\}$,

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \bigg\} v_{ij},$$

$$C = \{d'_{ijs} B, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}\}.$$

Пусть

$$\dot{z}(t) = HMy(t), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где $M = \{c_{ijs}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}, 1\}$ — матрица, M имеет размеры

$$n \times n, \quad \text{так как} \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} v_{ij} = n \quad [3].$$

Предположим теперь, что $u(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Тогда $\overset{\vee}{x}(t) = x(t_1 + t)$ является решением однородной системы $\dot{\overset{\vee}{x}}(t) = A \overset{\vee}{x}(t) + A_1 \overset{\vee}{x}(t - h)$, $t \geq 0$, с начальными условиями $\overset{\vee}{x}(\tau) = x(t_1 + \tau)$, $-h \leq \tau \leq 0$. Из [4] и (4) следует, что для $t \geq (n - 1)h$

$$\begin{aligned}
 x_{t_1+t} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{v_{ij}} \langle x_{t_1+t}, \psi_{ijs}(\tau) \rangle \Phi_{ij, v_{ij}-s+1}(\tau) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{v_{ij}} y_{ijs}(t_1+t) \Phi_{ij, v_{ij}-s+1}(\tau),
 \end{aligned}$$

откуда получаем

$$x(t_1+t) = My(t_1+t), \quad t \geq (n-1)h. \quad (8)$$

Теорема 1. Для того, чтобы система (1), (2) была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы система (5), (7) была полностью управляемой.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1), (2) полностью управляема и $y^0 = \text{col} \{y_{ijs}^0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, l_i}, s = \overline{1, v_{ij}}\}$ — произвольный n -вектор. Выберем начальные условия в (3) в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{s=1}^{v_{ij}} y_{ijs}^0 \Phi_{ij, v_{ij}-s+1}(\tau), \quad -h \leq \tau \leq 0.$$

Из полной управляемости системы (1), (2) следует, что в этом случае найдется t_1 и $u(t)$, $t \geq 0$, $u(t) = 0$, $t \geq t_1$, такие, что $Hx(t) = 0$, $t \geq t_1$. Из (7) и (8) тогда получаем, что

$$\dot{z}(t) = HMy(t) = Hx(t) = 0, \quad t \geq (n-1)h + t_1,$$

где $y(t)$ решение (5) с начальными условиями $y(0) = y^0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть система (5), (7) полностью управляема. Тогда для произвольных начальных условий (3), найдется t_1 и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \geq 0$, $u(t) = 0$, $t \geq t_1$ такие, что $HMy(t) = 0$, $t \geq t_1$ для решения системы (5) с начальными условиями (6).

Из (8) для $t \geq (n-1)h + t_1$ имеем $z(t) = Hx(t) = HMy(t) = 0$.

Теорема 1 полностью доказана. На основании результатов работы [5] теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Система (1), (2) тогда и только тогда полностью управляема, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} HM \\ HMG \\ \dots \\ HMG^{n-1} \end{bmatrix} [C : GC : \dots : G^{n-1}C] = \text{rank} \begin{bmatrix} HM \\ HMG \\ \dots \\ HMG^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $H = E_n$. Тогда полная управляемость системы (1), (2) эквивалентна полной управляемости системы (1), определение которой было введено в [6].

Следствие. Для того, чтобы система (1) была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы система (5) была полностью управляемой в смысле Калмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шиманов С. Н. — Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 1.
2. Осипов Ю. С. — Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 5.
3. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М., 1975.
4. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М., 1967.
5. Марченко В. М., Мережа В. Л. — Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук, 1978, № 2.
6. Марченко В. М. — Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 5.

Поступила в редакцию
12.12.79.

Кафедра методов оптимального
управления